

Асимптотическое разложение спектра поляризации двухуровневой системы в полихроматическом поле в пределе малых амплитуд

© А.Г. Антипов, С.А. Пулькин, С.В. Уварова

Санкт-Петербургский государственный университет,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: usvik2009@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.09.2018 г.

В окончательной редакции 19.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

Воздействие полихроматического поля на двухуровневую среду рассмотрено в пределе малых амплитуд. В указанном пределе получены асимптотические разложения спектров поляризации произвольного порядка малости. Полученные спектры поляризации сравнивались с результатами численного решения уравнения матрицы плотности. По сравнению с численными методами расчета асимптотическое разложение позволяет аналитически оценить вклад каждой отдельной компоненты полихроматического поля и описать межмодовое взаимодействие. Однако с увеличением интенсивности воздействующего поля вычислительная эффективность способа падает, поскольку для достижения требуемой точности приходится увеличивать порядок асимптотического разложения.

Ключевые слова: двухуровневая система, спектр поляризации, приближение малых амплитуд

DOI: 10.21883/OS.2019.08.48043.246-18

Введение

Описание спектра поляризации двухуровневой атомной системы в полихроматических полях было получено в работе [1] как результат аналитического решения уравнений матрицы плотности в приближении вращающейся волны. Однако полученное решение плохо подходит для непосредственного вычисления спектра поляризации, поскольку предполагает выполнение суммирования значений, определенных на сетке точек в пространстве, размерность которого пропорциональна количеству компонент действующего поля. В результате при числе компонент поля больше десятка расчеты оказываются трудноосуществимыми.

Для того, чтобы иметь возможность вычислить спектры поляризации для большого числа компонент воздействующего поля, в работе [2] рассмотрено разложение [3] полученного в [1] решения в пределе малых амплитуд. В первом, линейном приближении в спектре поляризации возникает известный лоренцев контур [4]. Квадратичная поправка, так же как и остальные поправки четного порядка, отсутствует в асимптотическом разложении по степеням амплитуды в силу симметрии спектра воздействующего поля относительно частоты перехода. Поправка третьего порядка, также полученная в [2], позволяет описывать нелинейные эффекты и межмодовое взаимодействие. Однако поправка третьего порядка позволяет корректно описывать спектр поляризации лишь в ограниченном диапазоне малых амплитуд воздействующего поля. Чтобы расширить границы диапазона в область больших амплитуд, требуется рассматривать поправки более высокого порядка — пятого, седьмого и т. п.

В настоящей работе представлено разложение для спектра поляризации (как вещественной, так и мнимой частей) двухуровневой атомной системы в полихроматических полях в пределе малых амплитуд. Это разложение есть обобщение результатов, полученных в работе [2], на случай произвольного порядка разложения по степеням амплитуд.

Спектры поляризации, вычисленные с использованием асимптотических разложений различного порядка, сравнивались с аналогичными спектрами, полученными численными методами [5,6]. Также проводилось сравнение с результатами расчетов компоненты разности заселенностей на частоте перехода, приведенными в работе [7].

Разложение в пределе малых амплитуд

При условии равенства констант продольной и поперечной релаксаций взаимодействие двухуровневой среды с полихроматическим, симметричным относительно частоты перехода ω_{21} полем

$$E(t) = \left(E_0 + 2 \sum_{k=1}^K E_k \cos(k\Delta t) \right) \cos \omega_{21}t$$

в приближении вращающейся волны и неподвижного атома описывается уравнением матрицы плотности

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[V(t), \rho] - \gamma\rho + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где E_k — амплитуды k -компоненты поля, а единственный недиагональный элемент матрицы взаимодействия

$V_{12} = V_{21}$ равен

$$V_{12} = \frac{\Omega_0}{2} + \sum_{k=1}^K \Omega_k \cos(k\Delta t). \quad (2)$$

Величины $\Omega_k = d_{21}E_k/\hbar$, $k = 0, \dots, K$ определяются амплитудами эквидистантного воздействующего поля, d_{21} — дипольный момент перехода, Δ — межмодовое расстояние, γ есть постоянная релаксации, $\lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ — разность накачек на уровни. Поляризация $P(t)$ пропорциональна недиагональному элементу матрицы плотности $\rho_{12} = \rho_{21}^*$ и дипольному моменту перехода.

В работе [1] приведены выражения для спектра поляризации двухуровневой атомной системы в полихроматическом поле:

$$\text{Re}(P)_j = \frac{\lambda_{12}d_{21}}{4} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{l}} R(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \left(\delta_j^{F(\mathbf{n}, \mathbf{l})} - \delta_j^{-F(\mathbf{n}, \mathbf{l})} \right), \quad (3)$$

$$\text{Im}(P)_j = -\frac{\lambda_{12}d_{21}}{4} \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{l}} I(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \left(\delta_j^{F(\mathbf{n}, \mathbf{l})} + \delta_j^{-F(\mathbf{n}, \mathbf{l})} \right), \quad (4)$$

где суммирование проводится по двум мультииндексам длиной K : $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_K\}$ и $\mathbf{l} = \{l_1, l_2, \dots, l_K\}$. Зависящие от мультииндексов выражения представляют собой:

$$R(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \frac{\gamma}{\gamma^2 + f(\mathbf{n})^2} \prod_{k=1}^K J_{n_k} \left(-\frac{2\Omega_k}{k\Delta} \right) J_{l_k} \left(\frac{2\Omega_k}{k\Delta} \right),$$

$$I(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \frac{f(\mathbf{n})}{\gamma^2 + f(\mathbf{n})^2} \prod_{k=1}^K J_{n_k} \left(-\frac{2\Omega_k}{k\Delta} \right) J_{l_k} \left(\frac{2\Omega_k}{k\Delta} \right),$$

$$f(\mathbf{n}) = \Omega_0 - \sum_{k=1}^K kn_k\Delta,$$

δ — символ Кронекера, а выражения F , определяющие, на какой именно частоте дает вклад соответствующий мультииндекс, равны

$$F(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = \sum_{k=1}^K k(n_k + l_k).$$

Размерность пространства, в котором выполняется суммирование в (3), (4), т. е. суммарная длина мультииндексов \mathbf{n} и \mathbf{l} , равна $2K$. Поэтому вычисление спектров, используя непосредственно формулы (3), (4), становится практически неосуществимым при большом числе гармоник воздействующего поля. Чтобы решить эту проблему, в [2] предложено выполнить асимптотическое разложение [3] по степеням амплитуд компонент поля в пределе $\Omega_k \rightarrow 0$, $k = 0, \dots, K$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(P)_j &= \frac{\lambda_{12}d_{21}}{4} \left(\text{Re}P_j^{(1)} + \text{Re}P_j^{(3)} + \text{Re}P_j^{(5)} + \dots \right), \\ \text{Im}(P)_j &= -\frac{\lambda_{12}d_{21}}{4} \left(\text{Im}P_j^{(1)} + \text{Im}P_j^{(3)} + \text{Im}P_j^{(5)} + \dots \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\text{Re}P_j^{(N)} = \underline{O}(\Omega^N)$, $\text{Im}P_j^{(N)} = \underline{O}(\Omega^N)$ — поправки N -го порядка малости в пределе малых амплитуд,

$N = 1, 3, 5, \dots$. Поправки четного порядка в разложениях (5) отсутствуют из-за симметрии спектра воздействующего поля (2) относительно частоты перехода. Нечетные поправки $\text{Re}P_j^{(N)}$, $\text{Im}P_j^{(N)}$ представляют собой линейные комбинации произведений неотрицательных степеней амплитуд различных компонент полихроматического поля, сумма показателей степеней равна N . Амплитуды поля не обязательно равны друг другу, но имеют одинаковый порядок малости $\Omega_k = \underline{O}(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, K$. Отсюда следует, что указанная линейная комбинация произведений действительно имеет порядок N по параметру малости Ω .

Обобщая результаты [2] на случай асимптотического разложения произвольной длины, для поправки N -го порядка к мнимой части поляризации имеем

$$\begin{aligned} \text{Im}P_j^{(N)} &= \sum_{n=0}^N \sum_{\mathbf{k}^{(n)}} \frac{\Omega_0^{N-n} \Omega_{k_1}^{(n)} \dots \Omega_{k_n}^{(n)}}{n! k_1^{(n)} k_2^{(n)} \dots k_n^{(n)} \Delta^n} \times \\ &\times \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} a_\nu^{(N+1-n)}}{\left(\gamma^2 + \left(\Delta \sum_{l=1}^{\nu} k_l^{(n)} \right)^2 \right)^{N+1-n}} \times \\ &\times \left(\delta_j^{k_1^{(n)} + \dots + k_n^{(n)}} + \delta_j^{-k_1^{(n)} - \dots - k_n^{(n)}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где суммирование по мультииндексу $\mathbf{k}^{(n)} = \{k_1^{(n)}, \dots, k_n^{(n)}\}$ проводится в n -мерном пространстве, причем каждый из индексов $k_l^{(n)}$, $l = 1, \dots, n$, изменяется в пределах от $-K$ до K , исключая значение 0. Коэффициенты $a_\nu^{(l)}$, $\nu = 0, \dots, n$, $l = 1, \dots, N+1$, фигурирующие в (6), представляют собой полиномы степени l от γ и Δ :

$$a_\nu^{(1)} = \Delta \sum_{l=1}^{\nu} k_l^{(n)},$$

$$a_\nu^{(2)} = \gamma^2 - \left(a_\nu^{(1)} \right)^2,$$

$$a_\nu^{(3)} = \left(-3\gamma^2 + \left(a_\nu^{(1)} \right)^2 \right) a_\nu^{(1)},$$

$$a_\nu^{(4)} = -\gamma^4 + 6\gamma^2 \left(a_\nu^{(1)} \right)^2 - \left(a_\nu^{(1)} \right)^4,$$

$$a_\nu^{(5)} = \left(5\gamma^4 - 10\gamma^2 - \left(a_\nu^{(1)} \right)^2 + \left(a_\nu^{(1)} \right)^4 \right) - a_\nu^{(1)}.$$

Отметим, что $a_0^{(l)} = (-1)^{l/2+1} \gamma^l$ для четных l и обращается в 0 для нечетных l .

Структура формулы (6) отражает факт наличия межмодового взаимодействия. В числителе присутствует произведение амплитуд компонент воздействующего поля. Таким образом, каждое слагаемое под знаком суммирования по мультииндексу $\mathbf{k}^{(n)}$ соответствует некоторой комбинации из N взаимодействующих компонент. В первом приближении ($N = 1$) межмодовое взаимодействие отсутствует, в третьем приближении описывается взаимодействие трех мод, в следующем, пятом —

пяти и т. п. Сомножитель, стоящий при произведении амплитуд, определяет силу взаимодействия рассматриваемых компонент. Этот сомножитель представляет собой сумму из $n + 1$ слагаемого со знаменателями лоренцева типа с различным характерным отношением постоянной релаксации и межмодового расстояния. Частота, на которой наблюдается результат взаимодействия, есть комбинация частот взаимодействующих компонент, что описывается последним сомножителем с двумя символами Кронекера внутри.

Схожее с (6) выражение можно получить и для N -й поправки в пределе малых амплитуд в асимптотическом разложении вещественной части поляризации:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}P_j^{(N)} &= \sum_{n=0}^N \sum_{\mathbf{k}^{(n)}} \frac{\Omega_0^{N-n} \Omega_{k_1}^{(n)} \dots \Omega_{k_n}^{(n)} \gamma}{n! k_1^{(n)} k_2^{(n)} \dots k_n^{(n)} \Delta^n} \times \\ &\times \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^{n-v} \binom{n}{v} a_v^{(N+1-n)}}{\left(\gamma^2 + \left(\Delta \sum_{l=1}^v k_l^{(n)}\right)^2\right)^{N+1-n}} \times \\ &\times \left(\delta_j^{k_1^{(n)} + \dots + k_n^{(n)}} - \delta_j^{-k_1^{(n)} - \dots - k_n^{(n)}}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Слагаемые в асимптотическом разложении вещественной части поляризации отличаются от слагаемых в разложении мнимой части наличием множителя γ в числителе, полиномиальные коэффициенты $b_v^{(l)}$, присутствующие в (7), имеют степень $l - 1$, а не l как в (6):

$$\begin{aligned} b_v^{(1)} &= -1, \\ b_v^{(2)} &= 2a_v^{(1)}, \\ b_v^{(3)} &= \gamma^2 - 3\left(a_v^{(1)}\right)^2, \\ b_v^{(4)} &= \left(-4\gamma^2 + 4\left(a_v^{(1)}\right)^2\right)a_v^{(1)}, \\ b_v^{(5)} &= -\gamma^4 + 10\gamma^2\left(a_v^{(1)}\right)^2 - 5\left(a_v^{(1)}\right)^4. \end{aligned}$$

В первом, линейном приближении ($N = 1$) слагаемое с $n = 0$ в (7) равно нулю, поскольку $b_0^{(2)} = 0$. В слагаемом с $n = 1$ внутреннее суммирование выполняется по одному лишь индексу $k \equiv k_1^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}P_j^{(1)} &= \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K \frac{\Omega_k \gamma}{k \Delta} \left(-\frac{b_0^{(1)}}{\gamma^2} + \frac{b_1^{(1)}}{\gamma^2 + \Delta^2 k^2}\right) \left(\delta_j^k - \delta_j^{-k}\right) = \\ &= \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K \frac{\Omega_k \Delta k}{\gamma \left(\gamma^2 + \Delta^2 k^2\right)} \left(\delta_j^k - \delta_j^{-k}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2\Omega_j \Delta j}{\gamma \left(\gamma^2 + \Delta^2 j^2\right)}, & |j| \leq K, \\ 0, & |j| > K. \end{cases} \end{aligned}$$

У мнимой части поляризации в первом приближении слагаемое с $n = 0$ отлично от нуля, зато обращается в

нуль слагаемое $n = 1, v = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}P_j^{(1)} &= \frac{\Omega_0 a_0^{(2)}}{\gamma^2} 2\delta_j^0 + \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K \frac{\Omega_k}{k \Delta} \frac{a_1^{(1)}}{\gamma^2 + \Delta^2 k^2} \left(\delta_j^k + \delta_j^{-k}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2\Omega_j}{\gamma^2 + \Delta^2 j^2}, & |j| \leq K, \\ 0, & |j| > K. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, в первом приближении в спектре поляризации возникает лоренцев контур, ограниченный набором частот воздействующего поля.

В третьем приближении из (6), (7) при $N = 3$ получаются формулы, представленные в [2].

Результаты расчетов спектра поляризации

На рис. 1, 2 показаны результаты расчетов спектров поглощения и дисперсии, выполненные с использованием формул (6) и (7). В разложении (5) было задействовано от одного (линейное приближение по Ω) до трех слагаемых (поправка пятого порядка по Ω). Воздействующее полихроматическое поле состоит из 101 эквидистантных компонент ($K = 50$), амплитуды которых равны $\Omega_0 = \Omega_1 = \dots = \Omega_K = 0.1\gamma$, расстояние между компонентами $\Delta = 0.3\gamma$. По горизонтальной оси отложены номера компонент, частота перехода соответствует частоте компоненты с индексом $j = 0$.

Непрерывные кривые на рис. 1, 2 показывают результаты, полученные численно: прямым решением уравнения матрицы плотности (1) методом Рунге-Кутты с последующим Фурье-преобразованием полученной временной зависимости, а также посредством разложения решения в гармоническом базисе — способе, который в литературе зачастую описывается как метод Флоке [8]. Точность численного решения весьма высока, что подтверждается отличием результатов, полученных двумя совершенно различными методами менее чем на 0.1%.

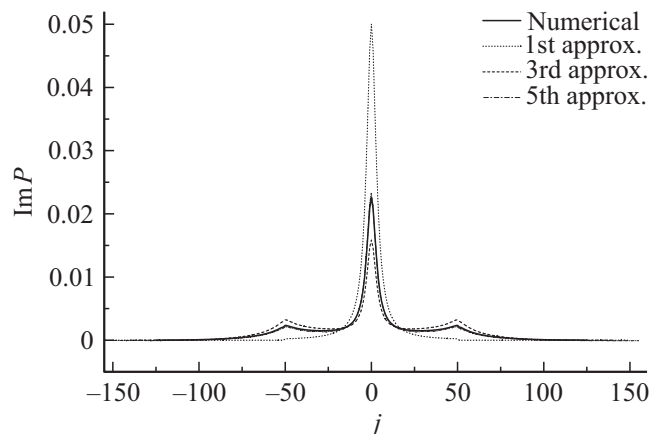


Рис. 1. Спектр мнимой части поляризации при $\Omega_0 = \dots = \Omega_K = 0.1\gamma$. $K = 50, \Delta = 0.3\gamma$.

Как видно из рис. 1, 2, при заданном значении амплитуды воздействующего поля $\Omega = 0.1\gamma$ первое, линейное приближение дает явно неудовлетворительное описание спектров поляризации: величина центрального, на частоте перехода импульса в спектре мнимой части оказывается приблизительно в 2 раза больше, чем значение, полученное численно. Побочные импульсы на частотах, определяемых границами спектра воздействующего поля, вообще отсутствуют в первом приближении.

Приближение третьего порядка по амплитуде дает качественно правильное описание спектра поляризации, однако количественные оценки недостаточно точны. Так, амплитуда центрального импульса спектра мнимой части занижена приблизительно на 30%, амплитуда боковых — напротив, завышена на треть. Поправка пятого порядка дает гораздо более точное описание спектра при $\Omega = 0.1\gamma$ по сравнению с поправкой третьего порядка: величины центрального и боковых импульсов отличаются от результатов численного расчета на 3% и 5% соответственно.

Для проверки правильности расчетов результат сравнивался с полученными в [7] зависимостями компоненты разности заселенностей уровней на частоте перехода от амплитуды полихроматического поля. Для этого была использована связь между поляризацией и разностью заселенностей

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right) P = i d_{21} V_{12} (\rho_{11} - \rho_{22}), \quad (8)$$

вытекающая из уравнений матрицы плотности (1). Записанное в гармоническом базисе соотношение (8) дает возможность получить спектр разности заселенностей из спектра поляризации посредством обращения ленточной матрицы Тёплица [7]. Для сравнения с данными [7] нас интересует лишь компонента спектра с индексом 0 — на частоте перехода.

На рис. 3 показана зависимость компоненты разности заселенностей уровней $(\rho_{22} - \rho_{11})/2$ на частоте перехода от амплитуды воздействующего полихроматического

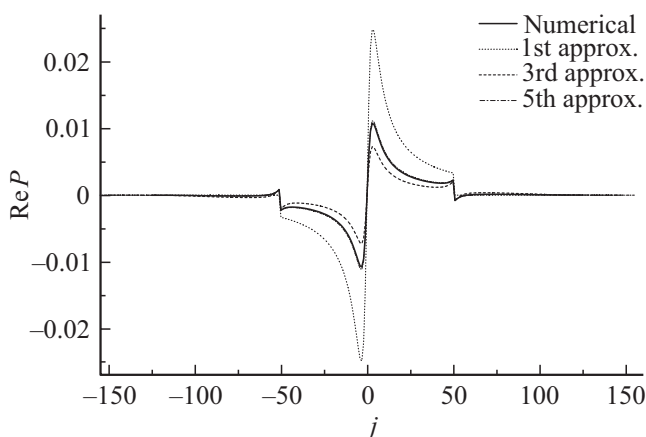


Рис. 2. Спектр вещественной части поляризации при $\Omega_0 = \dots = \Omega_K = 0.1\gamma$. $K = 50$, $\Delta = 0.3\gamma$.

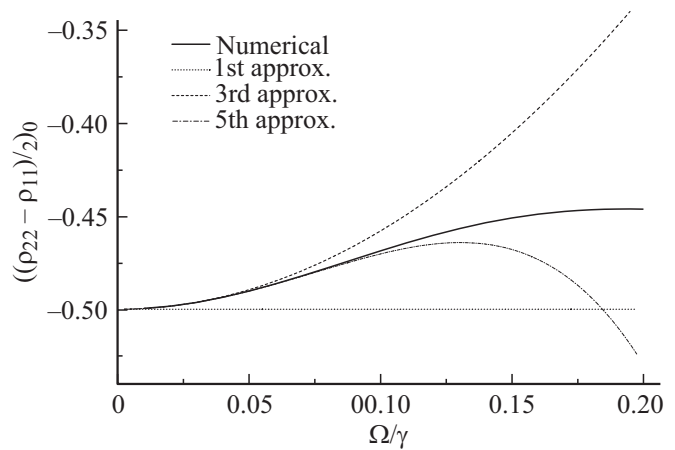


Рис. 3. Компонента разности заселенностей на частоте перехода в зависимости от Ω . $\Omega = \Omega_0 = \dots = \Omega_K$, $K = 10$, $\Delta = 0.3\gamma$.

поля. Амплитуды каждой из 21 компонент поля ($K = 10$) совпадают, расстояние между компонентами $\Delta = 0.3\gamma$. В начальном приближении, в котором принимается в расчет только одно слагаемое асимптотического ряда (5), разность заселенностей постоянна, не зависит от амплитуды действующего поля. В последующих приближениях при условии равенства амплитуд всех компонент поля, зависимость компонент спектра разности заселенностей от амплитуды представляет собой полином четной степени: второй, четвертой и т. д. С увеличением порядка приближения диапазон амплитуд, в котором асимптотическое разложение дает приемлемое описание разности заселенностей, растет. Если считать допустимым отклонение разности заселенностей уровней на частоте перехода на 1% от истинного, то первое приближение приводит к корректному значению при $\Omega \lesssim 0.03\gamma$, третье — при $\Omega \lesssim 0.08\gamma$, пятое — при $\Omega \lesssim 0.12\gamma$.

Выводы

Предложен способ вычисления спектров поляризации в диапазоне малых амплитуд действующего поля. По сравнению с численными методами расчета, асимптотическое разложение позволяет аналитически оценить вклад каждой отдельной компоненты полихроматического поля и описать межмодовое взаимодействие. Однако с увеличением интенсивности воздействующего поля вычислительная эффективность способа падает, поскольку для достижения требуемой точности приходится увеличивать порядок асимптотического разложения.

Данный подход может быть обобщен на случай систем с большим числом уровней.

Финансирование работы

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №18-02-01095).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Антипов А.Г., Пулькин С.А., Сумароков А.С., Уварова С.В., Яковлева В.И. // Оптика и спектроскопия. 2015. Т. 118. С. 977.
- [2] Антипов А.Г., Пулькин С.А., Уварова С.В. // Известия РАН. Серия Физическая. 2017. Т. 81. С. 1657.
- [3] Copson E.T. Asymptotic Expansions. Cambridge University Press, 1965.
- [4] Ficek Z., Swain S. Quantum Interference and Coherence. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [5] Antipov A.G., Kalinichev A.A., Pulkin S.A. et al. // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 735. P. 012029.
- [6] Антипов А.Г., Матвеева Н.И., Пулькин С.А., Уварова С.В. // Оптика и спектроскопия. 2016. Т. 121. С. 105.
- [7] Ficek Z., Seke J., Soldatov A.V., Adam G. // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2000. V. 2. P. 780.
- [8] Ficek Z., Seke J., Soldatov A.V., Adam G. // Physical Review A. 2003. V. 64. P. 013813.
- [9] Trench W.F. // Mathematics of Computations. 1974. V. 28 P. 1089.