Фазовый переход в изотропной m-векторной модели на случайном графе

© П.Н. Тимонин, В.П. Сахненко

Научно-исследовательский институт физики Ростовского государственного университета,
344090 Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: timonin@aaanet.ru, sakh@ip.rsu.ru

(Поступила в Редакцию 19 февраля 2003 г.)

Исследована термодинамика фазового перехода в изотропной m-векторной модели на графе с редкими случайными связями, описывающей сверхпроводимость и сверхтекучесть ($m = 2$), гайзенберговские магнетики ($m = 3$) и некоторые структурные переходы в различных системах с макроскопическим беспорядком (гелях, композитах, пористых средах). Показано, что фазовый переход имеет классические эффективно-полевые аномалии. Исследована также термодинамика модели при низких температурах. Определены зависимости термодинамических параметров от внешнего поля, среднего координационного числа и размерности параметров порядка.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант N 2001-0826).

Исследование фазовых переходов в неупорядоченных структурах представляет собой весьма обширную область физики конденсированного состояния, что связано с большим разнообразием физических реализаций неупорядоченных структур, таких как кристаллические твердые растворы, композиты, гели, пористые среды и др. Существует множество типов фазовых переходов в таких структурах, связанных с различными видами упорядочивающихся элементов (магнитных моментов, атомных смещений, волновых функций конденсата). Имеют место также чисто геометрические переходы протекания, обусловленные появлением связных макроскопических кластеров.

Исследования переходов в моделях неупорядоченных решеток методом ренормализационной группы [1] выявили некоторые качественные особенности критического поведения при наличии беспорядка, в частности изменение критических индексов в моделях с переходом второго рода (см., например, [2]). Изучение другого класса моделей, описывающих макроскопический структурный беспорядок в пористых средах, гелях и композитах и представляемых разными типами случайных графов, показало, что геометрия случайной среды оказывает во многих случаях определяющее влияние на термодинамику фазового перехода. В исследованиях моделей Изинга и Поттса на случайных графах было установлено, что изменение геометрических свойств графа может приводить как к изменению критических индексов [3,4], так и к изменению рода перехода [3–6], его расщеплению [7] или полному отсутствию [8].

Среди рассматривавшихся моделей макроскопически неупорядоченных сред самой простой является модель графа с редкими случайными связями [9]. В такой модели полагается, что связи могут иметь любые пары из N точек с вероятностью p/N. Параметр p имеет смысл среднего координационного числа, и при $p = 1$ реализуется переход протекания [10].

Фазовый переход в модели Изинга на таком графе исследовался в работах [11,12]. Было установлено, что особенности термодинамических величин вблизи $T_c(p)$ имеют эффективно-полевой характер, и изучена фазовая диаграмма модели при наличии случайного обмена, приводящего к появлению стекольной фазы. Несомненными достоинставами полученных результатов являются исчерпывающее описание термодинамики в области применимости приближения эффективного поля и возможность обобщения использованных методов на другие типы случайных графов [3,4].

Вместе с тем имеется много экспериментальных исследований фазовых переходов в неупорядоченных средах, которые описываются многокомпонентными параметрами порядка (например, сверхпроводящих, структурных и магнитных переходов в кристаллических твердых растворах и пористых средах [13–15]). Исследования таких переходов методом ренормализационной группы ограничены моделями неупорядоченных решеток и малой окрестностью перехода [1,2], тогда как описание термодинамики в более широких областях изменения температуры и параметров беспорядка, а также для разных типов случайных графов было выполнено только для моделей Изинга и Поттса [3–8]. В связи с этим в настоящей работе предпринято исследование термодинамики фазового перехода в изотропной m-векторной модели на графе со случайными редкими связями, которая может описывать сверхпроводимость и сверхтекучесть ($m = 2$), гайзенберговские магнетики ($m = 3$) и некоторые структурные переходы в различных средах с макроскопическим беспорядком.

1. Репличный формализм

Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} J_{ij}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j - \mathbf{H}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{S}_i.$$

где $\mathbf{S}i$ — единичные m-компонентные векторы,

$$\mathbf{S}_i\mathbf{S}_i = 1,$$

$\mathbf{H}$ — сопряженное поле, J_{ij} — случайное обменное взаимодействие с функцией распределения

$$P(J_{ij}) = \left(1-\frac{p}{N}\right)\delta(J_{ij}) + \frac{p}{N}\delta(J_{ij}-J).$$

Чтобы найти усредненный по случайному обмену термодинамический потенциал и другие термодинамические параметры, будем использовать метод реплик, состоящий в вычислении усредненной n-й степени статсуммы с последующим переходом к пределу $n\to 0$,

$$\langle Z^n\rangle_C = \int\prod_{j\neq j}^{N} dJ_{ij}P(J_{ij})\int\prod_{\alpha,i} d\mathbf{S}_{\alpha,i}\exp -\beta\sum_{\alpha=1}^{n}\mathscr{H}_\alpha.$$

Интегрирование по $\mathbf{S}_i$ здесь определено так, что

$$\int d\mathbf{S}_i = 1.$$

$\langle Z^n\rangle_C$ при $N\to\infty$ можно представить как

$$\langle Z^n\rangle_C = \int\prod_{\alpha,i} d\mathbf{S}_{\alpha,i}\, e^{-\beta\mathscr{H}_r}.$$

Здесь репличный гамильтониан имеет вид

$$\mathscr{H}_r \approx -\frac{pT}{2N}\sum_{j\neq j}^{N}\left[\exp(K\mathbf{S}_{i\alpha}\mathbf{S}_{j\alpha}) - 1\right] - \mathbf{H}\sum_{i,\alpha}\mathbf{S}_{i\alpha}$$

с суммированием по репличному индексу α от 1 до n и $K=\beta J$.

Следуя [4], можно свести вычисление $\langle Z^n\rangle_C$ к одночастичной задаче. Для этого введем функцию

$$w\big(\{\boldsymbol{\sigma}\},\{\mathbf{S}\}\big) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{n}\delta(\boldsymbol{\sigma}_\alpha - \mathbf{S}_{i,\alpha}),$$

с помощью которой можно избавиться от суммирования по пáрам узлов в репличном гамильтониане, представив его в виде

$$\mathscr{H}_r \approx -\frac{pTN}{2}\int\prod_{\alpha=1}^{n} d\boldsymbol{\sigma}_\alpha d\boldsymbol{\sigma}'_\alpha \exp(K\boldsymbol{\sigma}_\alpha\boldsymbol{\sigma}'_\alpha) w\big(\{\boldsymbol{\sigma}\},\{\mathbf{S}\}\big)$$

$$\times\, w\big(\{\boldsymbol{\sigma}'\},\{\mathbf{S}\}\big) + \frac{pTN}{2} - \mathbf{H}\sum_{i,\alpha}\mathbf{S}_{i\alpha}.$$

Далее, используя тождество

$$\int D\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\delta\big[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - w(\{\boldsymbol{\sigma}\},\{\mathbf{S}\})\big] = 1,$$

можно представить $\langle Z^n\rangle_C$ в виде континуального интеграла

$$\langle Z^n\rangle_C = \int D\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})U\big[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\big]\exp\big[-\beta N E[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})]\big],$$

где

$$E\big[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\big] = -\frac{pT}{2}\int\prod_{\alpha=1}^{n} d\boldsymbol{\sigma}_\alpha d\boldsymbol{\sigma}'_\alpha\exp(K\boldsymbol{\sigma}_\alpha\boldsymbol{\sigma}'_\alpha)$$

$$\times\,\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\rho(\{\boldsymbol{\sigma}'\}) + \frac{pT}{2},$$

$$U\big[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\big] = \int\prod_\alpha(d\mathbf{S}_\alpha e^{\beta\mathbf{H}\mathbf{S}_\alpha})\delta\big[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - w(\{\boldsymbol{\sigma}\},\{\mathbf{S}\})\big].$$

Представляя в последнем выражении дельта-функцию в виде (континуального) интеграла от экспоненты, получим

$$U\big[\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\big] = \int D\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\})\exp\big[N\Sigma(\rho,\tilde{\rho})\big],$$

где

$$\Sigma(\rho,\tilde{\rho}) = -\int\prod_\alpha d\boldsymbol{\sigma}_\alpha\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\})\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$$

$$+\ln\Big(\int\prod_\alpha d\mathbf{S}_\alpha\exp\Big[\beta\mathbf{H}\sum_\alpha\mathbf{S}_\alpha + \tilde{\rho}(\{\mathbf{S}\})\Big]\Big).$$

В результате $\langle Z^n\rangle_C$ представляется континуальным интегралом по функциям $\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ и $\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\})$:

$$\langle Z^n\rangle_C = \int D\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})D\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\})\exp\big[-N\beta\Phi(\rho,\tilde{\rho})\big],$$

$$\Phi(\rho,\tilde{\rho}) = E(\rho) - T\Sigma(\rho,\tilde{\rho}). \tag{1}$$

При $N\to\infty$ интеграл в (1) определяется значением $\Phi(\rho,\tilde{\rho})$ в стационарной точке. Функциональные уравнения для стационарных функций ρ и $\tilde{\rho}$ имеют вид

$$\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = p\int\prod_\alpha d\boldsymbol{\sigma}'_\alpha\exp(K\boldsymbol{\sigma}_\alpha\boldsymbol{\sigma}'_\alpha)\rho(\{\boldsymbol{\sigma}'\}), \tag{2}$$

$$\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \tilde{Z}^{-1}\exp\Big[\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) + \beta\mathbf{H}\sum_\alpha\boldsymbol{\sigma}_\alpha\Big], \tag{3}$$

где $\tilde{Z}$ — нормировочная константа, определяемая условием

$$\int\prod_\alpha d\boldsymbol{\sigma}_\alpha\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = 1.$$

Решение уравнений (2) и (3) позволяет найти усредненный термодинамический потенциал

$$F = -TN^{-1}\lim_{n\to 0} n^{-1}\ln\langle Z^n\rangle = \lim_{n\to 0} n^{-1}\Phi(\rho,\tilde{\rho}). \tag{4}$$

Как следует из предыдущего рассмотрения, $\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ является функцией распределения для одночастичных параметров, зависящих от $\mathbf{S}_i$ на одном узле (при $n \to 0$). В частности, мы имеем следующие выражения для параметра порядка

$$\mathbf{M} \equiv \left\langle \langle \mathbf{S}_i \rangle_T \right\rangle_C = \lim_{n\to 0} \int \prod_\alpha d\boldsymbol{\sigma}_\alpha \rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\boldsymbol{\sigma}_1 \qquad (5)$$

и параметра Эдвардса–Андерсона

$$\hat{Q} \equiv \left\langle \langle \mathbf{S}_i \rangle_T : \langle \mathbf{S}_i \rangle_T \right\rangle_C = \lim_{n\to 0} \int \prod_\alpha d\boldsymbol{\sigma}_\alpha \rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2. \quad (6)$$

Очевидно, что уравнения (2), (3) при $\mathbf{H} = 0$ всегда имеют тривиальное „парамагнитное“ решение

$$\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = 1,$$

$$\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = pR_m^n(K),$$

где

$$R_m(K) = \int d\mathbf{S} \exp(K\mathbf{S}\mathbf{S}') = \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{2}{K}\right)^{\frac{m-2}{2}} I_{\frac{m-2}{2}}(K). \quad (7)$$

Здесь $I_{\frac{m-2}{2}}(K)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Функция $R_m(K)$ удовлетворяет уравнению

$$R_m'' + \frac{m-1}{K} R_m' - R_m = 0. \qquad (8)$$

Чтобы описать фазовый переход в фазу с $M \neq 0$, нужно найти другое решение, дающее при $T < T_c$ более низкий термодинамический потенциал, чем „парамагнитное“. К сожалению, в уравнениях (2), (3) не удается непосредственно перейти к пределу $n \to 0$, предполагая наличие репличной симметрии, как это сделано в аналогичных уравнениях для модели Изинга на случайном графе [4,12]. Это существенно затрудняет решение (2), (3). Однако при $T \to T_c$ и $T \to 0$ в рассматриваемой модели все же можно получить явные аналитические результаты.

2. Термодинамика в окрестности перехода

Поскольку предполагаемый переход в фазу с $M \neq 0$ связан с нарушением симметрии, можно ожидать, что он будет переходом второго рода. Тогда в окрестности T_c и при малых H решение уравнений (2), (3) будет мало отличаться от „парамагнитного“. При этом функции $\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ и $\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ должны зависеть от некоторого вектора $\mathbf{f}$, определяющего спонтанное нарушение симметрии. В силу изотропии такая зависимость может реализоваться лишь через скалярные произведения вида

$$f_\alpha = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_\alpha.$$

Полагая f малым, представим $\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ в виде следующего разложения по f_α:

$$\begin{aligned}\rho = a &+ \sum_\alpha f_\alpha + b_1 \sum_\alpha f_\alpha^2 + b_2 \sum_{\alpha\neq\beta} f_\alpha f_\beta \\ &+ c_1 \sum_\alpha f_\alpha^3 + c_2 \sum_{\alpha\neq\beta} f_\alpha^2 f_\beta + c_3 \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma} f_\alpha f_\beta f_\gamma \\ &+ d_1 \sum_\alpha f_\alpha^4 + d_2 \sum_{\alpha\neq\beta} f_\alpha^2 f_\beta^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Здесь использовано предположение о репличной симметрии, в силу которой $\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ (и $\tilde{\rho}(\{\boldsymbol{\sigma}\})$) должны быть симметричными относительно перестановки репличных индексов. Кроме того, в (9) оставлены лишь те члены четвертого порядка по f_α, которые вносят вклад в термодинамический потенциал.

Подстановка (9) в (2), (3) дает следующие уравнения для $\mathbf{f}$:

$$(\tau + uf^2)\mathbf{f} = \beta\mathbf{H}, \qquad (10)$$

где

$$\tau = 1 - p/p_c(K),$$

$$p_c(K) = R_m/R_m' = I_{\frac{m-2}{2}}(K)/I_{\frac{m}{2}}(K),$$

$$u = \frac{1}{m\big(p_c(K) - 1\big)} + \frac{1}{m(m+2)\big(1 - \lambda(K)\big)} + \frac{1}{m+2},$$

$$\lambda(K) \equiv p_c(K) - m/K = I_{\frac{m+2}{2}}(K)/I_{\frac{m}{2}}(K).$$

Из рекуррентных соотношений для $I_m(K)$ [16] следует

$$p_c(K) > 1, \qquad \lambda(K) < 1,$$

так что при $\mathbf{H} = 0$ уравнение (10) имеет ненулевое решение при $\tau < 0$ или $p > p_c(K)$: $f^2 = -\tau/u$.

Равенство $p = p_c(K)$ определяет температуру фазового перехода как функцию среднего координационного числа p. Переход имеет место лишь при $p > 1$; при $p \to 1$ $T_c(p)$ стремится к нулю

$$T_c(p) \approx 2J(p-1)/(m-1).$$

Это обусловлено тем, что только при $p > 1$ граф имеет макроскопический связный кластер [9].

При $p \to \infty$ $T_c(p)$ растет пропорционально p

$$T_c(p) \approx Jp/m.$$

Коэффициенты в $\rho(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ (9) при $p \to p_c$, $n \to 0$ имеют следующий вид:

$$2b_1 = (1-\lambda)^{-1}, \quad b_2 = p_c/2(p_c-1),$$

$$c_1 = \frac{K(1+2\lambda)}{6(m+2)\lambda(1-\lambda)}, \quad c_2 = \frac{p_c K(1+p_c-2\lambda)}{2m(p_c-1)(1-\lambda)},$$

$$c_3 = \frac{p_c(1+2\lambda)}{6(p_c-1)(1-\lambda)},$$

$$d_1 = \frac{K^2}{4}\,\frac{4c_1+2(b_1-1)^2-1}{K^2(1-p_c)+(m+2)[2K-(m+4)\lambda]},$$

$$d_2 = \frac{p_c}{4(p_c-\lambda^2)}\left[4c_2+2(b_1-1)^2+4(b_2-1)^2-3\right].$$

Из (5), (6) и (9) следует

$$\mathbf{M} = \mathbf{f}/m,$$

$$\hat{Q} = 2b_2\mathbf{f}:\mathbf{f}/m^2,$$

а также

$$\big\langle \langle \mathbf{S}_i : \mathbf{S}_i \rangle_T \big\rangle_C = \frac{\hat{I}}{m} + \frac{2b_1}{m^2(m+2)}\,(m\mathbf{f}:\mathbf{f} - f^2\hat{I}\,),$$

$$\big\langle \langle \mathbf{S}_i \rangle_T : \langle \mathbf{S}_j \rangle_T \big\rangle_C = \big\langle \langle \mathbf{S}_i : \mathbf{S}_j \rangle_T \big\rangle_C = \mathbf{f}:\mathbf{f}/m^2, \quad i \neq j.$$

Отметим, что равенство двух корреляторов в последнем выражении справедливо лишь с точностью до членов порядка N^{-1}, которые мы здесь не учитываем.

Дифференцируя (10) по $\mathbf{H}$, получим выражение для восприимчивости

$$\hat{\chi} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} = \chi_\perp\left(\hat{I} - \frac{\mathbf{H}:\mathbf{H}}{H^2}\right) + \chi_\parallel\,\frac{\mathbf{H}:\mathbf{H}}{H^2},$$

$$\chi_\perp = M/H, \quad \chi_\parallel = (\tau + 3uf^2)^{-1}.$$

При $T > T_c(p)$ и $H = 0$

$$\chi_\perp = \chi_\parallel = \tau^{-1} \approx \frac{\vartheta(p)}{T - T_c(p)},$$

где константа Кюри

$$\vartheta(p) = (\partial\tau/\partial T)^{-1}$$

$$= pT_c(p)\left[K_c(p)(p^2-1)-(m-1)p\right]^{-1}.$$

При $T < T_c(p)$ и $H = 0$ $\chi_\parallel$ также следует закону Кюри–Вейса с вдвое меньшей константой Кюри.

При $p \to 1$ $\vartheta(p)$ стремится к константе

$$\vartheta(p) \approx 2J/(m-1),$$

а при $p \to \infty$

$$\vartheta(p) \approx T_c(p) = pJ/m.$$

Из (4) получим равновесное значение термодинамического потенциала в окрестности перехода

$$F = -\frac{pT}{2}\ln R_m(K) - \frac{\mathbf{Hf}}{2m} - \frac{Tvf^4}{2m^2(m+2)}.$$

Здесь

$$v = b_1(b_1-1) + m\Big\{d_1\left[1-p_c+3m(m+2)\lambda/K^2\right]$$
$$- c_1 - 1/12\Big\} + (m+2)\Big[d_2(2\lambda-\lambda^2/p_c-1)$$
$$+ c_2 + (b_2-1)^2\Big].$$

Для энтропии получаем следующее выражение:

$$S = \frac{p}{2}\ln R_m(K) + \frac{pK}{2p_c(K)} + \frac{Tvf^2}{m^2(m+2)\vartheta u},$$

так что энтропия непрерывна в точке перехода, а теплоемкость испытывает скачок

$$\Delta C = \frac{T_c^2(p)v}{m^2(m+2)\vartheta^2u^2}.$$

При $p \to 1$

$$u \approx \frac{m^2+4m+1}{m(m+1)(m+2)(p-1)},$$

$$v \approx \frac{1}{(p-1)^2}\left[(m+2)\left(1+\frac{1}{4m}\right) + \frac{(m-1)^2(5m^2+10m+4)}{4m(m+1)^2(m+2)}\right.$$
$$\left. + \frac{72m^4+188m^3+245m^2+212m+108}{24(m+1)^2(m+2)(m+3)(3m+1)}\right],$$

так что в этом случае $\Delta C \propto T_c(p)^2 \propto (p-1)^2$.

При $p \to \infty$

$$u \approx \frac{m+1}{m(m+2)}, \quad v \approx mp/12,$$

$$\Delta C \approx \frac{p}{12}\left[1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right].$$

Таким образом, рассматриваемая модель имеет в окрестности перехода классическую эффективно-полевую термодинамику, свойственную моделям с бесконечным радиусом взаимодействия. Полученные выше результаты справедливы при $f \ll 1$.

3. Термодинамика при низких температурах

Аналитическое описание термодинамики рассматриваемой модели удается получить также при $T \to 0$ и $H \neq 0$ или $M \neq 0$. В этом случае функцию $\rho(\{\mathbf{S}\})$, дающую приближенное решение уравнений (2), (3), можно представить в виде суммы константы $(1-Q)$ и функции $\rho'(\{\mathbf{S}\})$, имеющей острый пик при $\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{M} \equiv \langle \mathbf{S}_i \rangle$:

$$\rho(\{\mathbf{S}\}) = 1 - Q + \rho'(\{\mathbf{S}\}).$$

Подставив это выражение в (2) и используя указанное свойство $\rho'(\{\mathbf{S}\})$, получим

$$\tilde{\rho}(\{\mathbf{S}\}) \approx p(1-Q)R_m^n(K) + pQ\exp\left(K\mathbf{M}\sum_\alpha \mathbf{S}_\alpha\right).$$

В свою очередь подстановка этого выражения в (3) и выделение константы из $\rho(\{\mathbf{S}\})$ приводят к следующему выражению для $\rho'(\{\mathbf{S}\})$:

$$\rho'(\{\mathbf{S}\}) = \tilde{Z}^{-1}\exp\left[p(1-Q)R_m^n(K)\right]$$
$$\times\left\{\exp\left[pQ\exp\left(K\mathbf{M}\sum_\alpha \mathbf{S}_\alpha\right) + \beta\mathbf{H}\sum_\alpha \mathbf{S}_\alpha\right] - 1\right\}, \quad (11)$$

а также к уравнению для константы Q

$$1 - Q = \tilde{Z}^{-1}\exp\left[p(1-Q)R_m^n(K)\right].$$

Интегрируя (11) по $\mathbf{S}_\alpha$, находим значение нормировочной константы при $n \to 0$

$$\tilde{Z} = e^p$$

и уравнение для Q (также при $n \to 0$)

$$1 - Q = e^{-pQ}.$$

Из (12) следует, что Q имеет смысл доли узлов, принадлежащих макроскопическому связному кластеру, так как (12) совпадает с соответствующим уравнением теории перколяции на рассматриваемом графе [9]. Оно имеет нетривиальное положительное решение при $p > 1$.

Функция $\rho'(\{\mathbf{S}\})$ (11) действительно имеет резкий максимум при $\mathbf{S}_\alpha + \mathbf{M}$, если выполняется условие

$$\max(JM, H) \gg T,$$

так что область применимости приведенных далее результатов ограничена этим условием. Из (11) следует, что параметр порядка $\mathbf{M}$ параллелен $\mathbf{H}$ и его модуль равен

$$M = Q + (1-Q)\,\frac{R'_m(H/T)}{R_m(H/T)}. \quad (14)$$

Первое слагаемое в (14) соответствует спонтанному параметру порядка, оно отлично от нуля при $p > 1$, Второе слагаемое описывает вклад от изолированных узлов.

Восприимчивости имеют вид

$$\chi_\perp = M/H,$$

$$\chi_\parallel = (1-Q)\left[\frac{1}{T}\left(1 - \frac{R'^2_m(H/T)}{R^2_m(H/T)}\right) - \frac{(m-1)R'_m(H/T)}{HR_m(H/T)}\right].$$

Отметим, что $\chi_\parallel$ отличается от обычной парамагнитной восприимчивости лишь множителем $(1-Q)$.

Из (4), (11) получаем следующее выражение для термодинамического потенциала в области (13):

$$F \approx -J\left[p(1-Q) + \frac{pQ}{2}\,(1 + pQ - p^2Q^2)M\right] - QH$$
$$- T\ln R_m(H/T) + \frac{m-1}{2}\left[Q + \frac{p}{2}\,(1-Q)(2-Q)\right]T\ln\frac{J}{T}.$$

Для энтропии имеем

$$S \approx -\frac{m-1}{2}\left[Q + \frac{p}{2}\,(1-Q)(2-Q)\right]\ln\frac{J}{T}.$$

Как это свойственно моделям с непрерывными спинами, $S \to \infty$ при $T \to 0$, что связано со стремлением к нулю области фазового пространства, в котором находится ансамбль спинов.

Между тем теплоемкость положительна при $T \to 0$ и стремится к константе

$$C \approx \frac{m-1}{2}\left[Q + \frac{p}{2}\,(1-Q)(2-Q)\right].$$

Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными может в принципе помочь установить, в какой мере модель графа с редкими случайными связями адекватно описывает макроскопический беспорядок в тех или иных пористых средах или композитах. Следует, однако, иметь в виду, что приведенные здесь решения отнюдь не единственно возможные. И дело не только в том, что здесь мы ограничились рассмотрением только реплично-симметричных решений. Анализ бифуркаций „парамагнитных“ решений для $\rho(\{\mathbf{S}\})$ и $\tilde{\rho}(\{\mathbf{S}\})$ показывает, что близкие к ним решения появляются при $T < T_c$, в частности при температурах, определяемых условием $p = p_c^l(K)$, $l = 2, 3, \ldots$. Такая же ситуация имеет место и в модели Изинга на рассматриваемом графе [11]. К сожалению, не удается выяснить область устойчивости всех решений уравнений (2), (3); это требует детального исследования метода перевала для континуальных интегралов, обоснование которого в настоящее время отсутствует. Можно лишь предположить, что среди множества решений (2), (3) существуют устойчивые в некоторых областях изменения T и H, описывающие возможные метастабильные состояния данной модели. Выяснение свойств таких состояний позволило бы дать адекватное описание кинетики данной модели при $T < T_c$ [17].

Отметим также очевидную возможность обобщения этой модели путем введения случайного обмена или случайных внешних полей, введения анизотропии, а также задания функции распределения координационных чисел узлов графа [3,4]. Такие модификации приведут к появлению новых фазовых состояний и в ряде случаев к изменению критического поведения модели. Это открывает большие возможности для описания всего многообразия критических явлений в макроскопически неупорядоченных средах, описываемых многокомпонентными параметрами порядка.

Список литературы

[1] R.B. Stinchcomb. In: Phase Transitions and Critical Phenomena. V. 7 / Ed. C. Domb, J.L. Lebowitz. Academic Press; London (1983).
[2] Д.Е. Хмельницкий. ЖЭТФ **68**, 1960 (1975).
[3] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes. Preprint cond-mat/0203227.
[4] M. Leone, A. Vazquez, A. Vespignani, R. Zecchina. Preprint cond-mat/0203416.
[5] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes. Preprint cond-mat/0204596.
[6] F. Igloi, L. Turban. Phys. Rev. E **66**, 036 140 (2002).
[7] J. Machta. Phys. Rev. Lett. **66**. 169 (1991).
[8] H. Rieger, T.R. Kirkpatrick. Phys. Rev. B **45**, 9772 (1992).
[9] M.E.J. Newman. Preprint cond-mat/0202208.
[10] D. Stauffer, A. Aharony. Introduction to Percolation Theory. Taylor & Francis, London (1992).
[11] L. Viana, A.J. Bray. J. Phys. C **18**, 3037 (1985).
[12] I. Kanter, H. Sompolinsky. Phys. Rev. Lett. **58**, 164 (1987).
[13] I.V. Golosovsky, I. Mirebeau, G. Andre, D.A. Kurdyukov, Yu.A. Kumzerov, S.B. Vakhruchev. Phys. Rev. Lett. **86**, 5783 (2001).
[14] E.V. Charnaya, C. Tien, K.J. Lin, C.S. Wur, Yu.A. Kumzerov. Phys. Rev. B **58**, 467 (1998).
[15] A.V. Fokin, Yu.A. Kumzerov, N.M. Okuneva, A.A. Naberezhnov, S.B. Vakhrushev, I.V. Golosovsky, A.I. Kurbakov. Preprint cond-mat/0205303.
[16] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, М. (1963). Гл. 8. С. 981.
[17] П.Н. Тимонин. ЖЭТФ **119**, 1198 (2001).