

01 Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора

© Р.И. Паровик

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Паратунка, Россия
E-mail: romanparovik@gmail.com

Поступило в Редакцию 29 марта 2019 г.
В окончательной редакции 11 апреля 2019 г.
Принято к публикации 11 апреля 2019 г.

Обосновывается связь амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора с порядками дробных производных, которые входят в его модельное уравнение. С помощью компьютерного моделирования показано, что порядки дробных производных связаны с добротностью колебательной системы. Уменьшение старшего порядка („дробная“ инерция) приводит к уменьшению добротности, а уменьшение младшего порядка („дробное“ трение) — к увеличению добротности. Проведено сопоставление численных расчетов амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик для линейного дробного осциллятора с расчетами по аналитическим формулам, полученным другими авторами. Анализ показал хорошее согласие, что подтверждает корректность представленных численных расчетов.

Ключевые слова: дробный осциллятор, добротность, амплитудно-частотная характеристика, фазово-частотная характеристика.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811

В рамках дробной динамики исследуются дробные или эрдитарные осцилляторы — колебательные системы, обладающие эффектами степенной памяти [1–9]. Эти эффекты проявляются в том, что текущее состояние колебательной системы зависит от конечного числа предыдущих состояний. Такую нелокальность можно математически описать с помощью интегродифференциальных уравнений с разностными степенными ядрами — функциями памяти [10]. Однако более удобно, на наш взгляд, для дальнейшего исследования перейти от интегродифференциальных уравнений к уравнениям с производными дробных порядков, аппарат которых достаточно хорошо развит [11]. Здесь естественным образом может возникнуть вопрос о связи порядков дробных производных с характеристиками колебательного процесса, например с добротностью или декрементом затухания.

На этот вопрос был дан ответ в работе [9], где с помощью дробного исчисления и специальных функций Райта был проведен анализ вынужденных колебаний линейного дробного осциллятора без трения с внешним воздействием — аналога гармонического осциллятора. Этот анализ показал, что такая модель дробного осциллятора эквивалентна классической модели гармонического осциллятора с трением и внешним гармоническим воздействием, а порядок дробной старшей производной β , характеризующей „дробную“ инерцию, связан с добротностью колебательной системы Q

$$\beta \approx 2 \left(1 - \frac{1}{\pi Q} \right).$$

В настоящей работе мы исследуем более общий нелинейный дробный осциллятор, описывающий вынужденные колебания, построим амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ), установим связь между порядком старшей („дробная“ инерция) и младшей („дробное“ трение) дробных производных и добротностью системы Q . Для этого рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\partial_{0r}^{\beta} x(\eta) + \lambda \partial_{0r}^{\gamma} x(\eta) + \omega^{\beta} \sin(x(t)) = \delta \cos(\varphi t),$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где $x(t)$ — функция смещения, $t \in [0, T]$, $T > 0$ — время моделирования, λ — коэффициент трения, ω — частота собственных колебаний, δ и φ — амплитуда и частота внешнего периодического воздействия, x_0 и y_0 — константы, задающие начальные условия, а дифференциальные операторы

$$\partial_{0r}^{\beta} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^{\eta} \frac{\dot{x}(\eta) d\eta}{(\eta-t)^{\beta-1}},$$

$$\partial_{0r}^{\gamma} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^{\eta} \frac{\dot{x}(\eta) d\eta}{(\eta-t)^{\gamma}}, \quad (2)$$

где

$$1 < \beta < 2, \quad 0 < \gamma < 1,$$

имеют смысл производных дробных порядков в смысле Герасимова–Капуто [12,13].

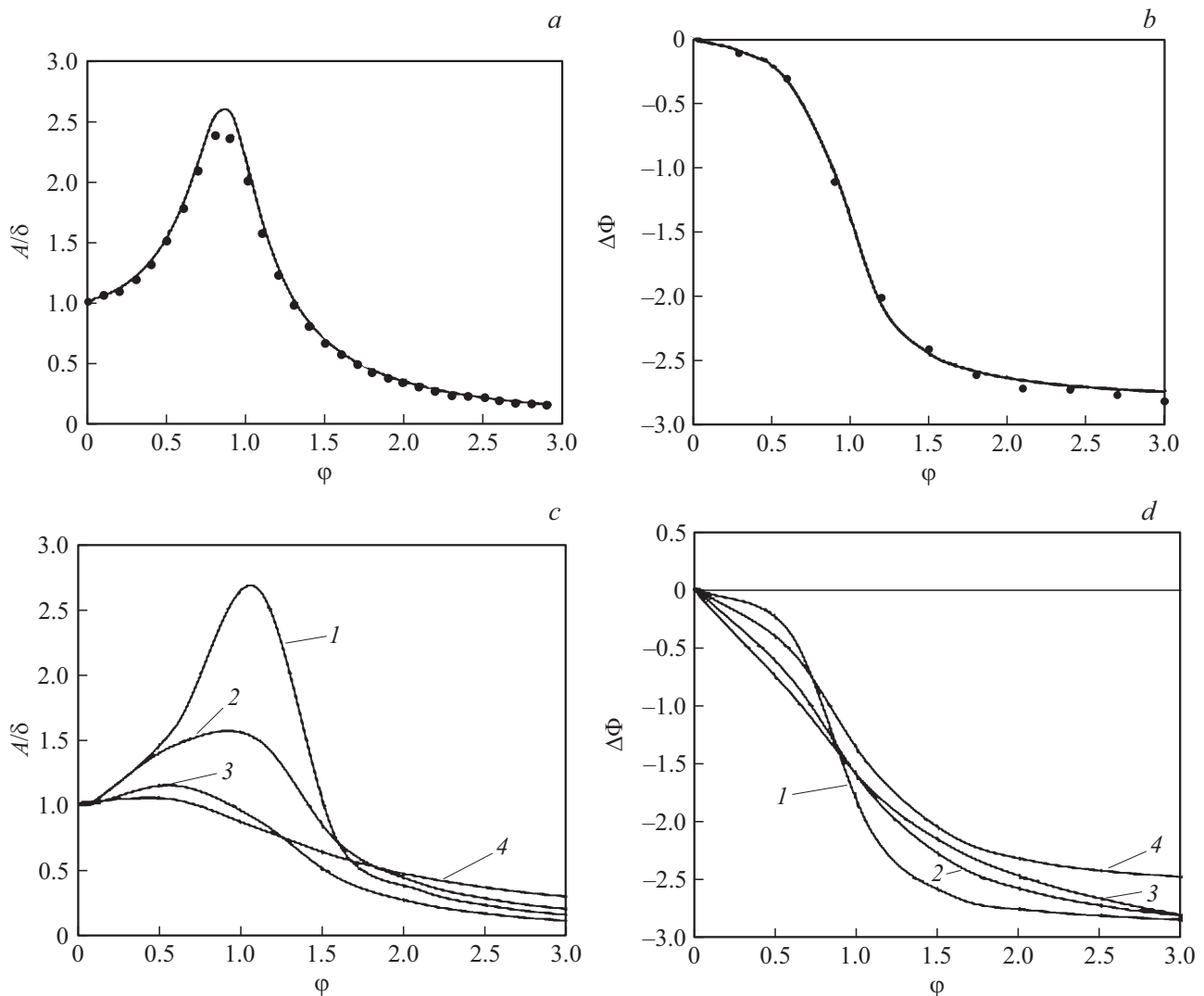


Рис. 1. *a* — АЧХ, построенная по формуле (14) работы [8] (сплошная линия), точками отмечена АЧХ, полученная по численной схеме; *b* — ФЧХ, построенная по формуле (15) работы [8] (сплошная линия), точками отмечена ФЧХ, полученная по численной схеме; *c* — АЧХ для примера 1: кривая 1 — $\beta = 1.8$, $\lambda = 0$, кривая 2 — $\beta = 1.6$, $\lambda = 0$, кривая 3 — $\beta = 2$, $\lambda = 1$, кривая 4 — $\beta = 1.2$, $\lambda = 0$; *d* — ФЧХ для примера 1: кривая 1 — $\beta = 2$, $\lambda = 0.5$, кривая 2 — $\beta = 2$, $\lambda = 1$, кривая 3 — $\beta = 1.6$, $\lambda = 0$, кривая 4 — $\beta = 1.8$, $\lambda = 0$.

Задача Коши (1) описывает дробный нелинейный осциллятор с „дробной“ инерцией и „дробным“ трением, а также внешним воздействием (вынужденные колебания). В случае малого угла смещения $\sin(x(t)) \approx x(t)$ получим дробный линейный осциллятор с внешним воздействием [9]. Необходимо отметить, что, как показано в работе [14], дробный нелинейный осциллятор (1) допускает хаотическую динамику, а в работе [15] были исследованы на устойчивость точки покоя.

Отметим, что, так как нелинейный дробный осциллятор (1) допускает хаотическую динамику, а нам необходимо исследовать регулярный установившийся режим, нужно выбирать соответствующим образом значения управляющих параметров согласно спектрам максимальных показателей Ляпунова [15]. АЧХ и ФЧХ вычисля-

лись с помощью численного решения задачи Коши (1). Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1: линейный дробный осциллятор [8,9]. Значения управляющих параметров возьмем следующими: $T = 100$, $\omega = \gamma = 1$, $\delta = 10$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0.3$.

На рис. 1, *a* и *b* приведены результаты расчета АЧХ и ФЧХ, полученные по формулам (14) и (15) из работы [8] (сплошные линии) и по численной схеме (точки), использованной нами. Видно, что численные расчеты хорошо аппроксимируют расчеты, полученные по аналитическим формулам из работы [8], что подтверждает корректность расчетов АЧХ и ФЧХ для примера 1.

Из рис. 1, *c* видно, что при изменении значений дробного параметра $\beta \rightarrow 1$ резонансные кривые АЧХ становятся более пологими, а резонансная частота сме-

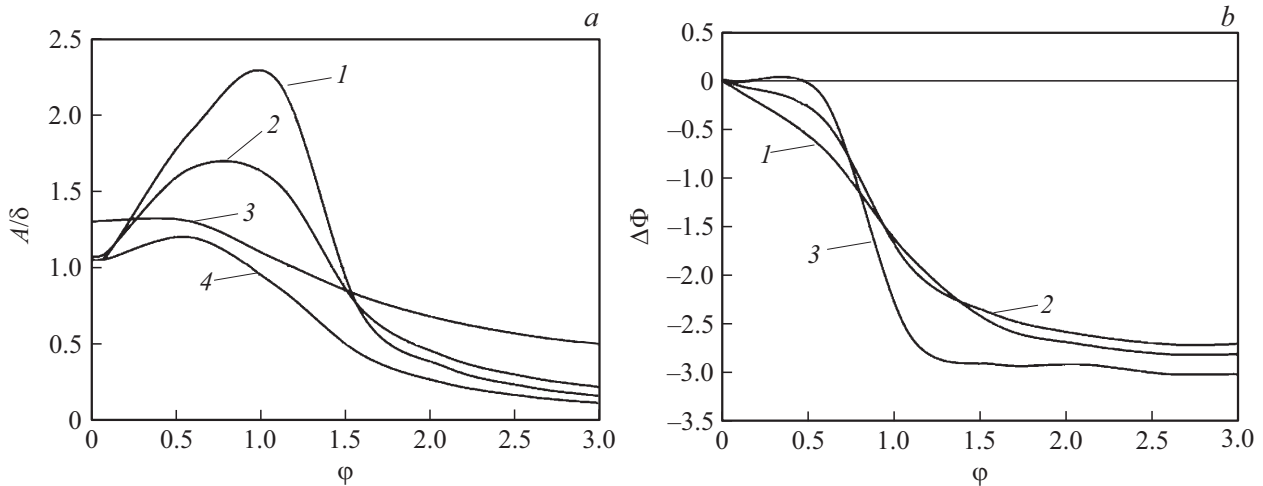


Рис. 2. *a* — АЧХ для примера 2: кривая 1 — $\beta = 1.8, \lambda = 0$, кривая 2 — $\beta = 1.6, \lambda = 0$, кривая 3 — $\beta = 1.2, \lambda = 0$, кривая 4 — $\beta = 2, \lambda = 1$; *b* — ФЧХ для примера 2: кривая 1 — $\beta = 2, \lambda = 1$, кривая 2 — $\beta = 1.6, \lambda = 0$, кривая 3 — $\beta = 1.8, \lambda = 0$. Частота $\varphi \in [0, 3]$.

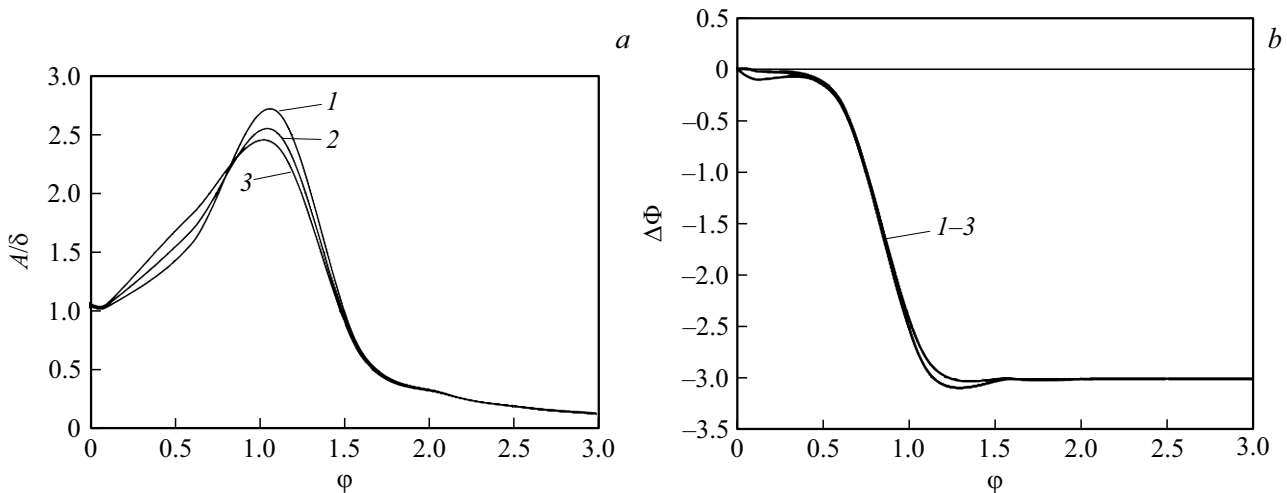


Рис. 3. АЧХ (*a*) и ФЧХ (*b*) при $\beta = 2$ и $\lambda = 0.15$. $\gamma = 0.6$ (1), 0.8 (2) и 1 (3). Частота $\varphi \in [0, 3]$.

щается в область более низких частот. Такое поведение характерно для уменьшения добротности колебательной системы Q , так как отвечает за ширину резонансной кривой. Можно также обратить внимание на перегруппировку резонансных кривых, что характерно для эрдитарных систем (или систем с памятью).

На рис. 1, *d* приведены расчетные кривые ФЧХ. Отметим, что в работе [8] было указано на то, что при $\varphi \rightarrow \infty$ фазовый сдвиг $\Delta\Phi \rightarrow -\beta\pi/2$. Как видно из рис. 1, *d*, кривые ФЧХ не противоречат этой оценке.

Пример 2: нелинейный дробный осциллятор. Значения управляющих параметров возьмем следующими: $T = 200, \omega = \gamma = 1, \delta = 0.5, x_0 = 0.2, y_0 = 0.3$. Результаты моделирования приведены на рис. 2.

Из рис. 2, *a* также видно, что при изменении значения $\beta \rightarrow 1$ резонансные кривые АЧХ становятся более пологими и резонансная частота смещается в область

более низких частот, чему соответствует уменьшение добротности Q . Теперь рассмотрим, как влияет другой дробный параметр (γ) при младшей производной, отвечающей за „дробное“ трение в уравнении (1). Построим АЧХ и ФЧХ при различных значениях γ (рис. 3).

Видно (рис. 3, *a*), что при уменьшении значений $\gamma \rightarrow 0$ резонансные кривые приобретают более пикообразную форму, о чем свидетельствует увеличение добротности Q системы. Кривые ФЧХ на рис. 3, *b* почти совпадают; следовательно, параметр γ практически не влияет на фазовый сдвиг $\Delta\Phi$.

Таким образом, можно сделать вывод, что изменение параметра $\beta \rightarrow 1$ приводит к уменьшению добротности Q , а изменение параметра $\gamma \rightarrow 0$ — к увеличению добротности Q . Поэтому дробные порядки производных, входящих в уравнение (1), не просто определяют свойства среды (эффекты памяти или эрдитарности), а свя-

заны с характеристикой самой колебательной системы, с ее добротностью. Из результатов исследования следует, что дробные параметры β и γ являются дополнительными степенями свободы, с помощью которых можно управлять добротностью колебательной системы (1).

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-1152.2018.1.

Список литературы

- [1] Мейланов Р.П., Янполов М.С. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 1. С. 67–73.
- [2] Паровик Р.И. // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 5. С. 1001–1021.
- [3] Niu J., Shen Y., Yang S., Li S. // Int. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 92. P. 66–75. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.03.014
- [4] Li M. // Symmetry. 2018. V. 10. N 2. P. 40. DOI: 10.3390/sym10020040
- [5] Li S., Niu J., Li X. // Chin. Phys. B. 2018. V. 27. N 12. P. 120502. DOI: 10.1088/1674-1056/27/12/120502
- [6] Parovik R.I. // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2018. Т. 11. В. 2. С. 108–122. DOI: 10.14529/mmp180209
- [7] Wang Y., An J.Y. // J. Low Freq. Noise Vibr. Active Control. First Published: August 28, 2018. DOI: 10.1177/1461348418795813
- [8] Olivar-Romero F., Rosas-Ortiz O. // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 839. N 1. P. 12010. DOI: 10.1088/1742-6596/839/1/012010
- [9] Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш. // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. В. 1. С. 34–37. DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540
- [10] Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Courier Corp., 2005. 288 p.
- [11] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
- [12] Герасимов А.Н. // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. С. 529–539.
- [13] Caputo M. Elasticità e dissipazione. Bologna: Zanichelli, 1969. 150 p.
- [14] Паровик Р.И. Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 364–379. DOI: 10.14498/vsgtu1611
- [15] Parovik R.I. // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1141. P. 012079. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012079