

03

## Об инкрементах неустойчивости волн различной симметрии на движущейся относительно материальной среды объемно заряженной струе

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Г.Е. Михеев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 31 мая 2017 г.

В окончательной редакции 18 февраля 2019 г.

Принято к публикации 20 февраля 2019 г.

Исследованы инкременты неустойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами  $m$ ) на поверхности объемно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой материальной диэлектрической среды. Показано, что при не слишком больших скоростях движения струи с увеличением объемной плотности заряда первой становится неустойчивой осесимметричная мода ( $m = 0$ ), затем изгибная ( $m = 1$ ), а затем изгибно-деформационная ( $m = 2$ ). Такая последовательность реализации неустойчивости азимутальных мод и определяет закономерности дробления заряженных струй в экспериментах. При скоростях струи, сравнимых с критической для реализации аэродинамической неустойчивости, первой теряет устойчивость мода с  $m = 1$ . Для всех азимутальных мод определены зависимости величин максимальных инкрементов от волновых чисел.

**Ключевые слова:** объемно заряженная струя, капиллярные волны, инкременты.

DOI: 10.21883/JTF.2019.08.47888.2368

### Введение

В экспериментальных работах [1–4] отмечаются различные виды реализации неустойчивости жидкой струи, движущейся относительно материальной среды. Это, по всей видимости, связано с различными видами симметрии капиллярных волн, бегущих по поверхности струи. Амплитуды волн на струе  $\propto J_m(kR)$ , где  $J_m$  — цилиндрическая функция порядка  $m$ ,  $k$  — волновое число,  $R$  — радиус струи,  $m$  — азимутальный параметр, характеризующий симметрию волн. При  $m = 0$  имеем осесимметричные волны, которым посвящено большинство исследований, поскольку они отвечают за распад струи на капли (см., например, [5–9]), феномен, имеющий основное приложение в практике.

При  $m = 1$  получим неосесимметричные изгибные волны, отвечающие за „хлыстообразное“ движение конца реальной струи [1–4, 10–13].

При  $m = 2$  реализуются неосесимметричные изгибно-деформационные волны. В экспериментальных работах [2–4] обнаружено, что при весьма больших электрических потенциалах, подаваемых на струю, она начинает ветвиться: из исходной (толстой) родительской струи выбрасываются дочерние (примерно на два порядка более тонкие) струйки, при этом все они совершают „хлыстообразные“ движения (и родительская струя, и дочерние) и распадаются на капельки.

Теоретическое истолкование описанный режим дробления струи получил в [14, 15]. При больших напряжениях электрического поля у поверхности жидко-

сти на ней образуются эмиссионные выступы (конусы Тейлора [16–18]) как на плоской [18, 19], так и на сферической [20] границах. Из вершин конусов Тейлора и выбрасываются дочерние струйки.

Неустойчивость неосесимметричных волн на струе исследована лишь поверхностно. Изучение их инкрементов  $\gamma$  и их связи с инкрементами осесимметричной моды представляет очевидный интерес хотя бы потому, что при реализации неустойчивости изгибно-деформационной моды (с  $m = 2$ ) одновременно реализуется неустойчивость и первых двух мод (с  $m = 1$  и  $m = 0$ ).

Инкремент  $\gamma$  — это постоянный положительный коэффициент в экспоненциальном законе возрастания со временем амплитуд неустойчивых волн [21]. В случае жидкой струи экспоненциальное возрастание во времени амплитуды осесимметричной волны приводит к неустойчивости струи и распаду ее на капли. Решающее значение для распада струи имеет рост амплитуды волны, волновое число которой  $k_{\max}$  имеет значение, отвечающее максимуму инкремента.

Еще Рэлей [22] показал, что в случае незаряженной осесимметричной струи

$$k_{\max} \approx \frac{2\pi}{9.02R}.$$

Подставляя значение  $k_{\max}$  в аналитическое выражение для инкремента, несложно найти и максимальное значение для него:

$$\gamma_{\max} \approx 0.12\sqrt{\sigma/\rho R^3}.$$

Здесь  $\sigma$  и  $\rho$  — коэффициент поверхностного натяжения и массовая плотность жидкости. Волны с  $k = k_{\max}$  обладают наибольшей неустойчивостью по сравнению со всеми другими волнами.

За время

$$\tau = \frac{1}{\gamma_{\max}} \approx 8.46 \sqrt{\rho R^3 / \sigma}$$

амплитуда волны возрастает в  $e$  раз. При этом распад струи происходит на капли  $r \approx 3R \sqrt[3]{4}$ , размер которых связан с длиной волны, обладающей максимальным инкрементом  $\lambda_{\max} \equiv 2\pi/k_{\max}$ , т.е. примерно в два раза превышает радиус струи.

Представляет интерес и длина нераспавшейся части струи  $L$ :

$$L \approx 8.46 \cdot U \sqrt{\rho R^3 / \sigma},$$

где  $U$  — скорость струи. Оценки, например, для струи воды дают  $L \approx 10$  nm при  $R = 1$  cm и  $U = 100$  cm/s [21].

Таким образом, знание инкремента осесимметричных волн позволяет получить важные для исследования диспергирования струи на капли характеристики. Но что нам даст знание инкрементов неосесимметричных волн?

Инкремент волн с  $m = 1$  дает скорость нарастания изгиба первоначально прямолинейной струи, а инкремент волн с  $m = 2$  характеризует количество дочерних струек, на которые распадается первоначальная струя, или расстояние между „конусами Тейлора“, вырастающими на родительской струе при реализации неустойчивости волн с  $m = 2$ , из вершин которых и выбрасываются дочерние струйки. Но чтобы эти рассуждения были не голословными, нужно найти соотношения между величинами инкрементов волн с различными азимутальными числами  $m$ .

## Формулировка задачи

Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости радиуса  $R$ , движущаяся вдоль своей оси симметрии с постоянной скоростью  $\mathbf{U}$ . Пусть массовая плотность жидкости есть  $\rho_1$ , диэлектрическая проницаемость —  $\epsilon_1$ , коэффициент межфазного натяжения —  $\sigma$ . Окружающая струю среда моделируется идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  и массовой плотностью  $\rho_2$ . В нижеследующем изложении нижним индексом 1 будем отмечать физические величины, относящиеся к струе, а индексом 2 — относящиеся к среде. Примем, что струя объемно заряжена, и что в рамках модели „вмороженного“ заряда он распределен равномерно по объему с постоянной объемной плотностью  $\mu$ , при этом на единицу длины струи приходится заряд  $\eta \equiv \pi R^2 \mu$ . Напряженность электрического поля в струе будет  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ , в среде —  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ .

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью  $\mathbf{U}$ . В такой системе отсчета поле

скоростей течения жидкости в струе  $\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t)$  полностью определится возможными капиллярными волнами на ее поверхности, и будет величиной такого же порядка малости, что и амплитуда капиллярных волн.

Предполагаем, что в жидкости существует волновое движение во всем спектре длин капиллярных волн, что приводит к искажению равновесной поверхности раздела сред. Это искажение имеет весьма малую (тепловую) амплитуду  $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa$  — постоянная Больцмана;  $T$  — абсолютная температура. Такие волны порождают уже тепловым движением молекул жидкости [19].

Будем искать критические условия реализации неустойчивости капиллярных волн на границе раздела сред. Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат с осью  $OZ$ , совпадающей с осью симметрии невозмущенной струи, орг  $\mathbf{e}_z$  которой направлен вдоль вектора скорости  $\mathbf{U}$ .

В безразмерных переменных, в которых радиус струи  $R$ , плотность жидкости  $\rho_1$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  выбраны в качестве основных масштабов ( $R = \rho_1 = \sigma = 1$ ), уравнение границы раздела сред, искаженной капиллярным волновым движением малой амплитуды, может быть записано в виде

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \xi(\varphi, z, t),$$

где  $\xi(\varphi, z, t)$  — функция возмущения равновесной поверхности струи, вызванного капиллярными волнами на границе раздела сред. Для всех жидкостей (включая жидкие металлы) амплитуда тепловых волн не превышает ангстрема, так что  $|\xi| \ll 1$ . Величину  $|\xi|$  примем в качестве малого параметра задачи.

Математическая формулировка задачи о расчете устойчивости капиллярных волн на поверхности струи имеет вид (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\text{div } \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\partial_t \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla P_1(\mathbf{r}, t);$$

$$\text{div } \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\partial_t \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho_2} \nabla P_2(\mathbf{r}, t);$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi\mu}{\epsilon_1}; \text{rot } \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0; \text{div } \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Дополним систему уравнений естественными граничными условиями:

$$r \rightarrow \infty : \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{U} = -U \mathbf{e}_z; \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 0 : \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)| < \infty.$$

На поверхности струи, заданной уравнением:

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0;$$

должны выполняться следующие граничные условия: кинематическое

$$-\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{U}_j, \nabla F) = 0; (j = 1, 2);$$

динамические

$$P_1(\mathbf{r}, t) - P_2(\mathbf{r}, t) + P_E(\mathbf{r}, t) = P_\sigma(\mathbf{r}, t);$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t))(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_2)$$

$$= \varepsilon_1(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t))(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t));$$

и условия на компоненты вектора напряженности электрического поля на границе раздела двух диэлектриков

$$(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)) = (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t));$$

$$\varepsilon_2(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)) = \varepsilon_1(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)).$$

В выписанных соотношениях  $\mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$  и  $P_j(\mathbf{r}, t)$  — поля скоростей и поля давлений внутри и вне струи.

$$P_E(\mathbf{r}, t) = -\mu\Phi_1 + \frac{\varepsilon_1}{8\pi} \left( E_1^2 - 2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1)^2 \right) - \frac{\varepsilon_2}{8\pi} \left( E_2^2 - 2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_2)^2 \right)$$

— давление электрического поля на поверхность струи;

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t); \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla F(\mathbf{r}, t)}{|\nabla F(\mathbf{r}, t)|} \Big|_{F(\mathbf{r}, t)=0}$$

— давление капиллярных сил (лапласовское);  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  и  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)$  — единичные вектора нормали и касательной к возмущенной поверхности струи.

Кроме приведенных условий, должно выполняться дополнительное требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны  $\lambda$ :

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\xi} r dr d\varphi dz = \pi\lambda.$$

Сформулированная задача решается стандартными методами (см., например, [23]), поэтому сразу выпишем, согласно [23], ее дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + 2\omega \cdot k \cdot U \cdot \eta(m, k) - \omega_0^2 = 0; \quad (1)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g(m, k)}{\left(1 - \rho \frac{g(m, k)}{h(m, k)}\right)} \left( k^2 + m^2 - 1 + \frac{\pi\mu^2}{(\varepsilon_1 g(m, k) - \varepsilon_2 h(m, k))} \right) \times \left( 4 - g(m, k) \left( 3 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) + h(m, k) \left( 3 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} g(m, k) h(m, k) \right) + \frac{k^2 \rho U^2}{h(m, k)};$$

$$\rho \equiv \rho_2 / \rho_1; g(m, k) \equiv m + k \frac{I_{m+1}(k)}{I_m(k)};$$

$$h(m, k) \equiv m - k \frac{K_{m+1}(k)}{K_m(k)};$$

$$\eta(m, k) \equiv \frac{\rho g(m, k)}{h(m, k) - \rho \cdot g(m, k)}.$$

Здесь  $I_m(k)$  и  $K_m(k)$  — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода порядка  $m$  соответственно.

Корни уравнения (1) легко получаются в виде

$$\omega(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U) = \omega_1 \equiv -kU\eta(m, k) - \sqrt{k^2 U^2 \eta(m, k)^2 + \omega_0^2};$$

$$\omega(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U) = \omega_2 \equiv -kU\eta(m, k) + \sqrt{k^2 U^2 \eta(m, k)^2 + \omega_0^2}. \quad (2)$$

В этих выражениях  $g(m, k)$ ,  $h(m, k)$ ,  $\eta(m, k)$ ,  $\omega_0^2 = \omega_0^2(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U)$  — вещественные функции.

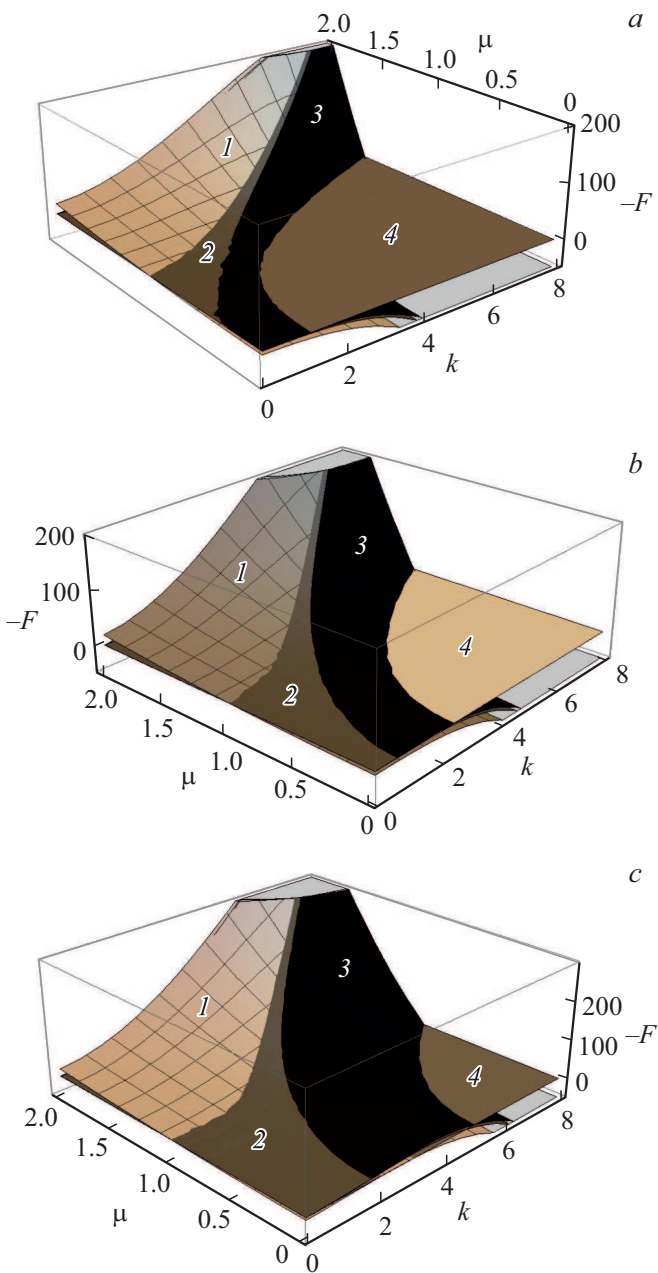
При изменении физических параметров системы частоты волн изменяются. Пока частоты  $\omega$  вещественны, волновое движение на поверхности струи устойчиво. Неустойчивость проявляется, когда частоты становятся комплексными. При этом, согласно (2), у одной из частот мнимая часть будет отрицательной (амплитуда соответствующей волны будет экспоненциально затухать с декрементом  $\chi \equiv -\text{Im } \omega$ ), а у другой — положительной (амплитуда соответствующей волны будет экспоненциально расти с инкрементом  $\gamma \equiv \text{Im } \omega$ ). Легко видеть, что условием появления положительной мнимой части у частоты является отрицательность подкоренного выражения в радикалах (2):

$$F(m, k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho, \mu, U) \equiv k^2 U^2 \eta(m, k)^2 + \omega_0^2 \leq 0. \quad (3)$$

Выписанное выражение для функции  $F$  в области  $F \leq 0$  определит величину квадрата инкремента  $F \equiv -\gamma^2$ . В нижеследующих рассуждениях нас будет интересовать функция  $F$  именно в этой области, и все сказанное ниже относится к отрицательным значениям  $F$ .

На рис. 1 приведены зависимости функции  $-F$  (т.е. квадрата инкремента) для нулевой, первой и второй азимутальных мод ( $m = 0; 1; 2$ ) в зависимости от волнового числа и объемной плотности заряда при фиксированных значениях прочих физических параметров. Несложно видеть, что по мере роста объемной плотности заряда при малых  $\mu$  сначала возбуждается осесимметричная нулевая мода, затем — неосесимметричная, изгибная первая, а затем — неосесимметричная, изгибно-деформационная вторая.

Видно, что при определенных значениях физических параметров поверхность  $F(k, \mu)$  для  $m = 0$  становится отрицательной, т.е. струя становится неустойчивой. Затем по мере роста объемной плотности заряда ее судьбу повторяет мода (с  $m = 1$ ), инкремент неустойчивости изгибной моды превышает таковой для осесимметричной моды, и поверхность  $F(k, \mu)$  для  $m = 1$ , превышает таковую для осесимметричной моды. Далее с дальнейшим



**Рис. 1.** Зависимости величины  $-F$  (квадрата безразмерного инкремента  $\gamma^2$ ) нулевой (поверхность 3), первой (поверхность 2) и второй (поверхность 1) азимутальных мод волн ( $m = 0; 1; 2$ ) от безразмерных волнового числа  $k$  и объемной плотности заряда  $\mu$ . Поверхность 4 соответствует равенству нулю поверхности  $F(k, \mu)$  при  $\varepsilon_1 = 80$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $\rho_2 = 0.001$ . *a* —  $U = 25$ ; *b* —  $U = 50$ ; *c* —  $U = 73$ .

ростом объемной плотности заряда самым большим становится инкремент изгибно-деформационной моды (с  $m = 2$ ).

На рис. 1 поверхность 3 соответствует осесимметричной моде в области ее неустойчивости (там, где  $F(k, \mu < 0)$ ). Плоскость 4 соответствует значениям  $F(k, \mu) = 0$ . По мере роста объемной плотности заря-

да  $\mu$  поверхность 3 уходит под поверхность 2, соответствующую изгибной моде, которая с ростом  $\mu$ , в свою очередь, уходит под поверхность 1, соответствующую изгибно-деформационной моде.

Численные расчеты, проиллюстрированные на рис. 1, *a*, проводились при  $\rho = 0.001$ ,  $\varepsilon_1 = 80$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $U = 25$ .

Если расчеты провести при  $U = 50$  (рис. 1, *b*), картина соотношений между величинами инкрементов мод изменится качественно. В области длинных волн (при  $k < 0.6$ ) по мере роста параметра  $\mu$  инкременты волн с различными  $m$  при фиксированном  $k < 0.6$  будут монотонно увеличиваться, начиная с осесимметричных волн с  $m = 1$ . В итоге первыми будут возбуждаться изгибные волны (с  $m = 1$ ), за ними — изгибно-деформационные (с  $m = 2$ ). Осесимметричные волны (с  $m = 0$ ) по сравнению с ними будут иметь меньшие инкременты. А именно струя сначала будет изгибаться и только потом дробиться на капли. Но сказанное имеет отношение только к длинным волнам на струе. Для более коротких волн все останется по-прежнему.

Необходимо отметить, что неустойчивость различных азимутальных мод происходит независимо друг от друга. Реализация на струе неустойчивости одной из азимутальных мод не препятствует наступлению неустойчивости другой. Так, при реализации электродиспергирования в режиме „ветвящихся струй“ (ramified jet), имеет место неустойчивость всех трех азимутальных мод [2].

Значение скорости  $U = 73$  является критическим для реализации аэродинамической неустойчивости: струя разбивается на мелкие капли независимо от наличия на ней заряда. Картина реализации неустойчивости мод с различными азимутальными числами качественно будет такой же, как описано выше для  $U = 50$ . Изменяется в сторону увеличения только численные значения инкрементов и области реализации неустойчивости несимметричных волн сместятся по сравнению с предыдущим рисунком к более коротким волнам.

Отметим, что неустойчивость осесимметричной ( $m = 0$ ) моды не имеет порога ни по величине объемного заряда, ни по скорости: струя распадается на капли даже будучи незаряженной и неподвижной. Поверхность струи всегда неустойчива по отношению к осесимметричным волнам с волновыми числами  $k < 1$ , т.е. с длинами, превышающими длину окружности недеформированного сечения струи ( $\lambda > 2\pi$ ), поскольку потенциальная энергия сил поверхностного натяжения цилиндрической струи превышает потенциальную энергию совокупности сферических капель, на которые разобьется струя. В то же время капиллярные волны на поверхности струи с безразмерными волновыми числами, большими единицы ( $k > 1$ ), устойчивы. Наличие у струи объемного заряда и тангенциального скачка поля скоростей на границе раздела с окружающей материальной средой являются дестабилизирующими факторами, приводящими к расширению диапазона неустойчивых волн и к увеличению инкрементов нарастания амплитуд

волн в зонах их неустойчивости. С появлением заряда на струе область неустойчивости расширяется и отодвигается от оси ординат, смещаясь в область больших значений волновых чисел. При увеличении скорости просто увеличивается размер области неустойчивости [23].

Что касается изгибных волн ( $m = 1$ ), то при нулевом объемном заряде они устойчивы, но при сколь угодно малом заряде теряют свою устойчивость [13,23]. То есть неосесимметричные изгибные волны в зависимости от величины волнового числа имеют нулевой порог по объемной плотности заряда. Если струя не заряжена, но движется, то изгибные волны теряют устойчивость при увеличении скорости до  $U \approx 2$ .

Изгибно-деформационные волны ( $m = 2$ ) в зависимости от физических характеристик системы имеют пороги как по скорости движения струи, так и по величине объемного заряда, и возбуждаются при  $\mu \approx 3$  и  $U \approx 0$ , либо при  $\mu = 0$  и  $U \approx 73$  [14,23].

В итоге следует сказать, что рис. 1 рассчитывался при закритических значениях комбинации параметров  $U$ ,  $\mu$  для  $m = 0$  и  $m = 1$  и околокритических значениях параметров для  $m = 2$ :  $U = 50$  и  $0 \leq \mu \leq 2$ .

Из сказанного выше следует, что неустойчивость изгибно-деформационных волн ( $m = 2$ ) реализуется при высоких значениях параметров  $\mu$  и  $U$ , когда волны с  $m = 0$  и  $m = 1$  заведомо неустойчивы. Но тем не менее, согласно рис. 1, у волны с  $m = 2$  самый большой инкремент при заданных значениях параметров  $\mu > 1$ ,  $U = 50$  и широком диапазоне значений волнового числа  $k$ .

Из рис. 1 следует, что в экспериментах неустойчивость реальной струи конечной длины при фиксированной длине волны по мере роста объемной плотности заряда вначале определяется нулевой модой, и струя дробится на капли. Функция распределения образующихся капель по размерам будет узкой. Затем возбуждается изгибная мода, и свободный конец струи, не прекращая деления на капли, начинает совершать „хлыстообразные“ движения. Отрыву капель от конца струи при этом способствует сила инерции, причем в различных фазах „хлыстообразного“ движения конца струи сила инерции, действующая на отрывающуюся каплю, различна. Это приведет к тому, что отрывающиеся в различных фазах капли будут различаться по размерам. В итоге функция распределения отрывающихся капель по размерам будет расширяться по сравнению со случаем нулевой (осесимметричной) моды. При дальнейшем росте  $\mu$  реализуется электростатическая неустойчивость и на поверхности струи образуются „конусы Тейлора“, из вершин которых выбрасываются дочерние струйки, в свою очередь изгибающиеся и распадающиеся на мелкие капельки. Функция распределения отрывающихся капель по размерам будет еще более расширяться.

Распад струи на капли определяется неустойчивостью осесимметричных капиллярных волн с максимальным значением инкремента, который можно получить, найдя первую производную от  $\gamma$  (или от  $F$ ) по  $k$ , приравняв ее нулю, и разрешая получившееся уравнение относительно  $k$  [21]. В итоге мы должны получить значение

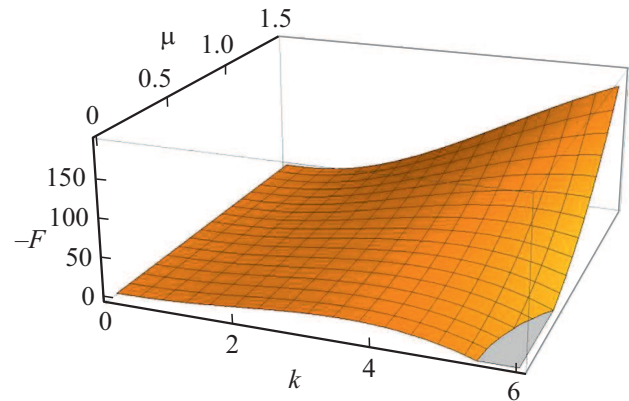


Рис. 2. Поверхность  $-F(k, \mu)$ , рассчитанная при  $m = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 80$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $\rho = 0.001$ ,  $U = 73$ .

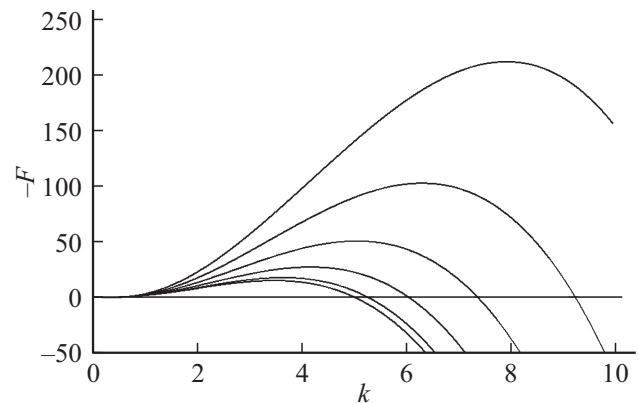


Рис. 3. Сечения поверхности  $-F(k, \mu)$  плоскостями  $\mu = 0; 0.3; 0.6; 0.9; 1.2; 1.5$ . Здесь кривые расположены сверху вниз по мере убывания объемной плотности заряда.

волнового числа  $k_{\max}$ , соответствующее максимальному инкременту, подставляя которое в аналитическое выражение для инкремента, найдем его максимальную величину. Проблема в том, что уравнение  $\frac{\partial F}{\partial k} = 0$  для нахождения  $k_{\max}$  весьма громоздко и трансцендентно (искомая переменная  $k_{\max}$  входит в аргумент нескольких цилиндрических функций) и аналитически не может быть разрешено. В нижеследующих рассуждениях мы попытаемся обойти это затруднение.

### Отыскание зависимости величины максимального инкремента от волнового числа. Численные расчеты

В выражении (3) зафиксируем диэлектрические проницаемости, параметр  $m$ , безразмерную плотность и скорость:  $\varepsilon_1 = 80$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $m = 0$ ,  $\rho = 0.001$ ,  $U = 73$ , и построим поверхность  $-F(k, \mu)$  (рис. 2), величина которой в каждой точке фактически определяет квадрат инкремента в данной точке.

Далее возьмем сечения этой поверхности плоскостями, соответствующими значениям объемной плотности заряда  $\mu = 0; 0.3; 0.6; 0.9; 1.2; 1.5$  (рис. 3). На этом рисунке кривые расположены сверху вниз по мере убывания объемной плотности заряда. Видно, что по мере увеличения объемной плотности заряда, положения максимумов кривых смещаются вверх и вправо (в сторону увеличения инкремента и соответствующего волнового числа).

Затем определим положения максимумов кривых на рис. 3 и, извлекая корни квадратные из значений ординат (напомним, что  $-F$  представляет собой квадрат инкремента в той области, где  $F < 0$ ), построим по полученным таким образом шести точкам, аппроксимируя сплайнами третьего порядка, кривую с помощью пакета аналитических вычислений типа Maple. Найденная таким образом кривая определит зависимость максимального инкремента от волнового числа.

Аналогичные манипуляции проведем для скоростей  $U = 0; 25; 50$ . Все полученные зависимости отобразим на рис. 4, *a*, где номера у кривых соответствуют скоростям: 1 —  $U = 0$ , 2 —  $U = 25$ , 3 —  $U = 50$ , 4 —  $U = 73$ . Видно, что с увеличением скорости струи величина инкремента неустойчивости осесимметричной моды слабо увеличивается.

Все это относится к осесимметричной моде ( $m = 0$ ), отвечающей за разбиение струи на капли.

Теперь повторим все действия при тех же значениях физических величин для изгибной моды  $m = 1$ , и получим зависимости безразмерного инкремента ее неустойчивости от безразмерного же волнового числа, приведенные на рис. 4, *b*. Видно, что кривые почти сливаются. Кривая 4 проходит ниже остальных.

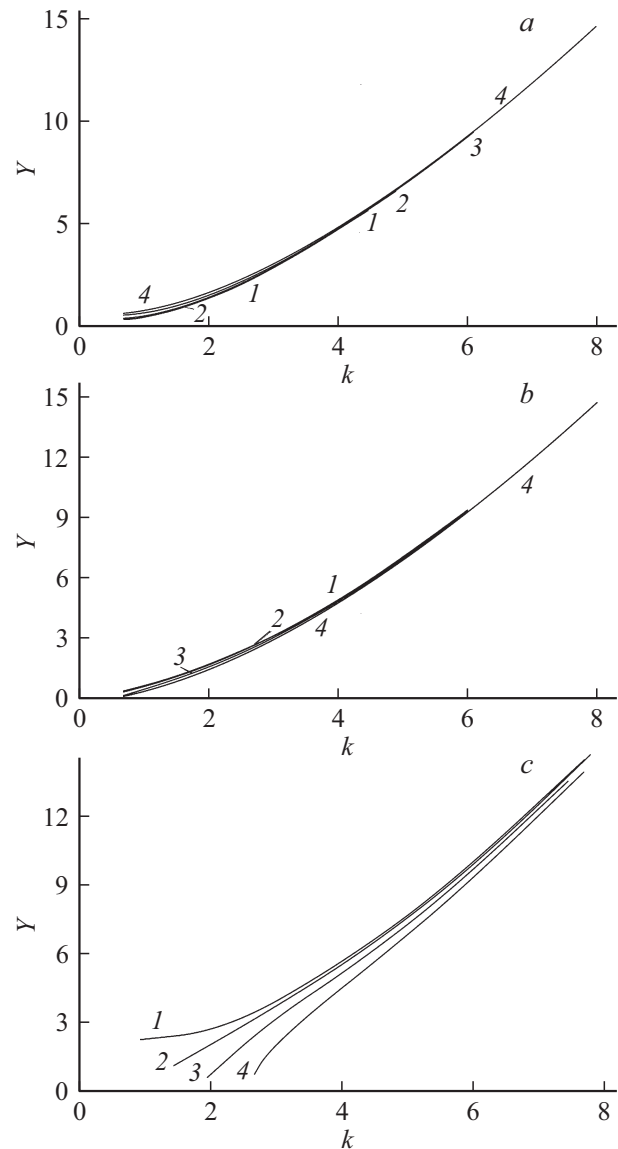
Следует отметить, что кривые 1–4 строились для диапазона объемных плотностей заряда от 0 до 1.5. Поэтому отдельные кривые кончаются при малых волновых числах. Чтобы они шли до  $k = 8$ , следовало увеличить диапазон изменения объемной плотности заряда. Но было выбрано единообразие.

На рис. 4, *c* приведены графики зависимости безразмерного инкремента  $\gamma(k)$  изгибно-деформационной моды  $m = 2$  от безразмерного волнового числа, построенные по той же методике. Из рис. 4, *b*, *c* видно, что с увеличением скорости струи величины инкрементов осесимметричных волн уменьшаются.

Комбинация инкрементов типа, приведенных на рис. 4, *b*, *c* с учетом вязкости жидкости (не рассматривавшейся в настоящей работе), обуславливает многообразие режимов электродиспергирования наблюдающихся в экспериментах [1–5].

Рассмотрение, проведенное в данном разделе, осуществлено при равных физических условиях (чтобы можно было сравнивать значения инкрементов) и критических значениях комбинации параметров  $\mu$  и  $U$ .

Из рис. 4 видно, что с увеличением скорости для осесимметричной моды инкременты увеличиваются, а для



**Рис. 4.** Зависимость максимального инкремента от волнового числа. Номера у кривых соответствуют скоростям,  $U$ : 1 — 0, 2 — 25, 3 — 50, 4 — 73. *a* — осесимметричные волны ( $m = 0$ ); *b* — изгибные волны ( $m = 1$ ); *c* — изгибно-деформационные волны ( $m = 2$ ).

осесимметричных мод с  $m = 1$  и  $m = 2$  — снижаются. Особенно наглядно это выглядит для  $m = 2$ .

В конце настоящей работы отметим, что азимутальный параметр  $m$  может принимать любые целочисленные положительные значения, и каждому  $m$  соответствует волна с некой симметрией. В настоящее время детально исследованы волны на цилиндрической струе с круговым поперечным сечением с  $m = 0$ . Значительно хуже исследованы волны с  $m = 1$ . Что касается волн с  $m = 2$ , то их только начали изучать (см. экспериментальные работы [2–4] и теоретические [14,15]). Волны с  $m \geq 3$  пока не изучены совсем. Во всяком случае авторы настоящей работы не в курсе подобных исследований.

## Заключение

В расчетах первого порядка малости по отношению амплитуды капиллярных волн к радиусу струи найдены соотношения величин инкрементов неустойчивости волн с различной симметрией. Найдено, что по мере увеличения объемного заряда сначала становятся неустойчивыми осесимметричные волны, а следом за ними претерпевают неустойчивость изгибные и изгибно-деформационные волны. Для волн с различной симметрией определены зависимости величины максимальных инкрементов от волновых чисел.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Macky W.A. // Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [2] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Aerosol. Sci. 1994. Vol. 25. N 6. P. 1021–1035.
- [3] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol. Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [4] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15807–15813.
- [5] Енто́в В.М., Яри́н А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [6] Eggers J., Willermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036601. P. 1–79.
- [7] Жакин А.И. // УФН. 2013. Т. 183. № 2. С. 153–177.
- [8] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // Surf. Eng. Appl. Electrochem. 2014. Vol. 50. N 5. P. 395–404.
- [9] Fenn J.B., Mann M. et al. // Science. 1989. Vol. 246. N 4926. P. 64–71.
- [10] Huebner A., Chu H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49. N 2. P. 361–372.
- [11] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. London. 1969. Vol. A313. P. 453–470.
- [12] Saville D. // Phys. Fluid. 1971. Vol. 14. N 6. P. 1095–1099.
- [13] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 24–32.
- [14] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 36–45.
- [15] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 6. С. 36–41.
- [16] Tonks L. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [17] Wilson C.T., Taylor G.I. // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1925. Vol. 22. N 5. P. 728–730.
- [18] Зубарев Н.М. // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. № 10. С. 613–617.
- [19] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [20] Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [21] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [22] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) // Proc. Roy. Soc. Lond. 1879. Vol. 290. P. 71–97.
- [23] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Михеев Г.Е. // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 8. С. 1151–1158.