

01

## Особенности обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием

© А.Д. Плотникова, О.И. Москаленко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
E-mail: adkoloskova@gmail.com

Поступило в Редакцию 7 марта 2019 г.

В окончательной редакции 7 марта 2019 г.

Принято к публикации 15 марта 2019 г.

Исследованы особенности режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием. Рассмотрены четыре разных случая взаимодействия систем, характеризующихся различным числом положительных показателей Ляпунова. Установлено, что порог возникновения синхронного режима сильно зависит от степени хаотичности взаимодействующих систем, а связь систем, характеризующихся различным числом положительных показателей Ляпунова, приводит к появлению дополнительных областей синхронизации.

**Ключевые слова:** системы с запаздыванием, обобщенная синхронизация, спектр показателей Ляпунова, метод вспомогательной системы.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.11.47821.17779

Одним из наиболее интересных типов хаотической синхронизации является обобщенная синхронизация, так как этот режим может наблюдаться в двух связанных совершенно разных динамических системах, в том числе и с различной размерностью фазового пространства [1,2]. Данный тип синхронизации нашел применение в сфере СВЧ-электроники и радиофизики [3,4], а также в информационно-телекоммуникационных системах для передачи и обработки информации [5–7].

Для исследования синхронных режимов в радиофизических системах одними из самых универсальных и эффективных являются резонансные автогенераторы СВЧ-диапазона с запаздывающей обратной связью на основе многорезонаторных клистронов. Данные приборы отличаются высоким уровнем мощности и КПД, что делает их наиболее перспективными для практического применения. Изучению сложной динамики таких приборов посвящен ряд работ (см., например, [8–10]).

Таким образом, существует необходимость изучения обобщенной хаотической синхронизации в радиофизических системах с запаздыванием. Задачей настоящей работы является исследование особенностей этого режима на примере простой модели двух однонаправленно связанных радиотехнических генераторов с запаздыванием, предложенных в работе [11].

Исследуемая система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + k_1 f(x_1(t - \tau)), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + k_2 f(x_2(t - \tau)) \\ &+ k_3 [f(x_1(t - \tau)) - f(x_2(t - \tau))], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — переменные, характеризующие поведение ведущей и ведомой систем соответственно,  $k_1$

и  $k_2$  — параметры этих систем,  $k_3$  — параметр связи,  $f(x) = a - x^2$  — нелинейная функция,  $a = 1.5$  — управляющий параметр, время запаздывания  $\tau = 10$  выбрано одинаковым для обеих систем.

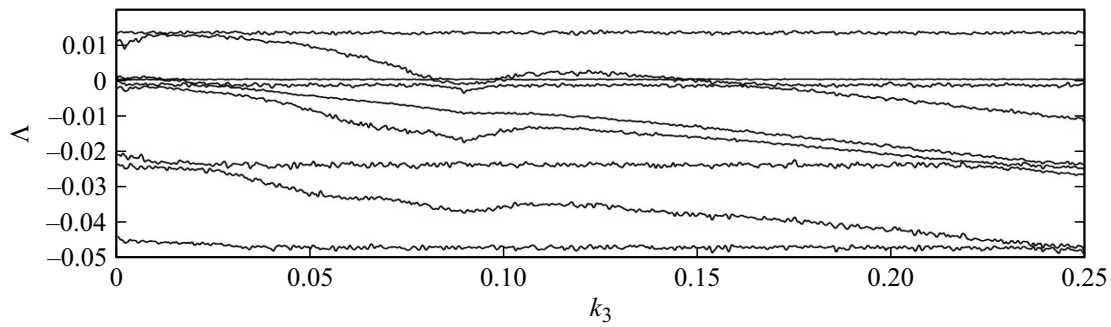
Одним из наиболее распространенных методов детектирования режима обобщенной синхронизации является метод вспомогательной системы [12]. Идея заключается в том, что в бассейне притяжения того же аттрактора, что и у ведомой системы  $x_2(t)$ , вводится идентичная ей вспомогательная система  $x_3(t)$ , но с другими начальными условиями. В случае наступления обобщенной синхронизации после завершения переходного процесса установятся одинаковые функциональные соотношения:  $x_2(t) = F[x_1(t)]$  и  $x_3(t) = F[x_1(t)]$ . Таким образом, эквивалентность ведомой и вспомогательной систем  $x_2(t) \equiv x_3(t)$  является критерием наличия в системе обобщенной синхронизации.

Для использования описанного метода в дополнение к системе (1) было введено уравнение

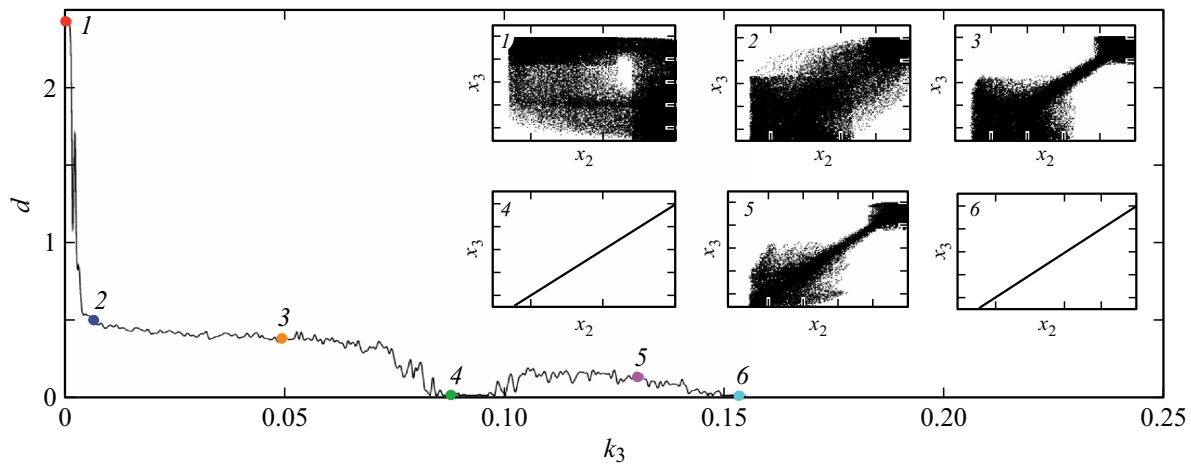
$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= -x_3(t) + k_2^* f(x_3(t - \tau)) \\ &+ k_3 [f(x_1(t - \tau)) - f(x_3(t - \tau))], \end{aligned} \quad (2)$$

где множитель  $k_2^* = k_2 - 10^{-14}$  отвечает за расстройку ведомой и вспомогательной систем, которая вводится для того, чтобы избежать ловушки численного счета.

Системы с запаздыванием характеризуются бесконечным фазовым пространством, и соответственно спектр показателей Ляпунова содержит бесконечное число показателей. Следовательно, варьируя параметры (в данном случае  $k_1$  и  $k_2$ ), можно наблюдать различные режимы в автономных ведущей и ведомой системах, в частности хаотическую и гиперхаотическую динамику. Таким образом, комбинируя данные величины, можно



**Рис. 1.** Зависимости девяти старших показателей Ляпунова от параметра связи  $k_3$  при  $k_1 = 1.005$ ,  $k_2 = 1.013$  для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием.



**Рис. 2.** Зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $d$  от параметра связи  $k_3$ .

исследовать разнообразные варианты влияния ведущей системы на ведомую.

Для расчета спектра показателей Ляпунова однонаправленно связанных генераторов (1) использовался метод, предложенный в работе [13]. Он основан на рассмотрении эволюции во времени пространственного состояния изучаемой системы и (с периодическими ортогонализациями и перенормировками) его возмущений.

Наиболее нетипичная ситуация наблюдается в случае выбора параметров таким образом, что ведущая система в автономном случае характеризуется одним положительным показателем Ляпунова, а ведомая — двумя. На рис. 1 представлен спектр показателей Ляпунова системы (1) для комбинаций параметров  $k_1 = 1.005$  и  $k_2 = 1.013$ .

Из рис. 1 видно, что при увеличении параметра связи  $k_3$  в системе происходит поочередный переход двух условных положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений, в то время как показатель, отвечающий за ведущую систему, остается неизменным. Следует отметить любопытную закономерность: старший условный показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений дважды, причем первый переход сопровождается последующим

выходом этого показателя в положительную область. Когда указанный показатель Ляпунова становится снова отрицательным, в системе окончательно устанавливается режим обобщенной синхронизации.

На рис. 2 представлена зависимость среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $d$  от параметра связи  $k_3$

$$d = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T |x_2(t) - x_3(t)| dt, \quad (3)$$

где  $T$  — время расчета,  $T_0$  — время переходного процесса. На том же рисунке на вставках приведены плоскости состояний  $(x_2, x_3)$  в характерных точках по параметру  $k_3$ . Очевидно, что в момент, когда системы становятся эквивалентными друг другу, а величина  $d$  обращается в нуль, наступает режим обобщенной синхронизации (плоскости состояний при  $k_3 = 0.086$  и  $0.156$  на рис. 2).

Так же как и на спектре показателей Ляпунова, на зависимости среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем от управляющего параметра  $k_3$  (рис. 2) наблюдаются уже две области, где характеристика  $d$  обращается в нуль. Несмотря на наличие „нетипичной“ области для режима обобщенной

Значения порога режима обобщенной синхронизации для различных значений управляющих параметров  $k_1$  и  $k_2$

$k_1$	Режим	$k_2$	Режим	$k_3$
0.996	Хаос	0.988	Хаос	0.026
1.013	Гиперхаос	1.005	Хаос	0.07
				0.12
1.013	Гиперхаос	1.018	Гиперхаос	0.142
1.005	Хаос	1.013	Гиперхаос	0.082
				0.151

синхронизации, на плоскостях состояний наблюдается классический переход к режиму обобщенной синхронизации через перемежаемость (см. вставки на рис. 2). Отчетливо видно, как при увеличении параметра связи  $k_3$  точки постепенно выстраиваются на главную диагональ, а на границе наступления режима обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение ( $k_3 = 0.05$  и  $0.13$ ).

В целом, установление режима обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием происходит по классическому сценарию. В таблице приведены результаты исследования обобщенной синхронизации при нескольких характерных значениях управляющих параметров в порядке увеличения порога установления синхронного режима. Явно видно, что критическое значение параметра  $k_3$  увеличивается при „усложнении“ динамики системы. Самое малое значение параметра связи  $k_3$ , отвечающего за установление обобщенной синхронизации, имеет место в системе связанных генераторов при таких  $k_1$  и  $k_2$ , что у ведущей и ведомой систем реализуется хаотический режим в автономном случае. По мере изменения соотношения между значениями управляющих параметров смещается и значение порога обобщенной синхронизации. Отметим, что, когда у обоих генераторов по два положительных показателя Ляпунова, критическое значение параметра  $k_3$  не является самым большим, как может показаться на первый взгляд. Поскольку в системах присутствует одинаковое количество положительных показателей Ляпунова, на качественном уровне данный процесс будет таким же, как и для первого, самого простого случая. Разница лишь в затрачиваемом „времени“ на установление синхронного режима, откуда и следует больший по величине порог режима обобщенной синхронизации. Наконец, ведущему генератору с одним положительным показателем Ляпунова становится сложнее всего подавить собственную динамику ведомого генератора с двумя положительными показателями Ляпунова, что приводит к наибольшему критическому значению параметра связи.

Таким образом, в работе проведено исследование обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием. Для детектирования режима обобщенной синхронизации были использованы

метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод вспомогательной системы. Показано, что оба метода дают хорошо согласующиеся между собой результаты. В качестве изучаемой модели были выбраны два связанных радиотехнических генератора с запаздыванием с различными управляющими параметрами, отвечающими за разное количество положительных показателей Ляпунова в автономном случае. Показано, что режим обобщенной синхронизации наступает раньше в более простых системах. Наибольшее значение силы связи требуется в случае связанных генераторов, когда ведущая система с хаотическим режимом воздействует на ведомую систему, находящуюся в режиме гиперхаоса.

### Финансирование работы

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект № МК-531.2018.2).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980
- [2] *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. N 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216
- [3] *Стародубов А.В., Короновский А.А., Храмов А.Е., Жарков Ю.Д., Дмитриев Б.С.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 14. С. 58–65.
- [4] *Kittel A., Parisi J., Pyragas K.* // Physica D. 1998. V. 112. N 3-4. P. 459–471. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00186-3
- [5] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // УФН. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281–1310. DOI: 10.3367/UFN.0179.200912c.1281
- [6] *Terry J.R., VanWiggeren G.D.* // Chaos Solitons Fractals. 2001. V. 12. N 1. P. 145–152. DOI: 10.1016/S0960-0779(00)00038-2
- [7] *Пономаренко В.И., Караваев А.С., Глуховская Е.Е., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. В. 1. С. 103–110.
- [8] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 5. С. 604–610.
- [9] *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 7. С. 105–110.
- [10] *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Yu.D., Ryskin N.M.* // IEEE Trans. Electron Dev. 2005. V. 52. N 5. P. 790–797.
- [11] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–44.
- [12] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. N 5. P. 4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528
- [13] *Колоскова А.Д., Москаленко О.И., Короновский А.А.* // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. В. 9. С. 19–25.