04

Памяти А.А. Рухадзе и В.П. Силина

Низкочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в электронной плазме

© В.Б. Бобров

Объединенный институт высоких температур РАН,
125412 Москва, Россия
Национальный исследовательский университет „МЭИ“,
111250 Москва, Россия
e-mail: vic5907@mail.ru

Поступило в Редакцию 13 февраля 2019 г.
В окончательной редакции 13 февраля 2019 г.
Принято к публикации 19 февраля 2019 г.

Показано, что логарифмическая особенность в низкочастотной асимптотике спектрального распределения энергии равновесного излучения в электронной плазме имеет место при произвольном вырождении электронов в рамках приближения идеального газа для поперечной диэлектрической проницаемости.

DOI: 10.21883/JTF.2019.07.47792.52-18

Введение

Как известно, формула Планка [1] определяет спектральное распределение энергии равновесного излучения в модели абсолютно черного тела, представляющего собой свободную от вещества полость, заполненную излучением и ограниченную абсолютно поглощающим веществом. При этом не рассматриваются эффекты взаимодействия фотонов с ограничивающим полость веществом, учет которого необходим для установления состояния термодинамического равновесия [2]. Кроме того, необходимость исследования спектрального распределения энергии излучения в веществе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия с излучением, обусловлена и экспериментальными данными (см., например, [3,4]).

Для решения этой задачи в работе [5] было получено точное соотношение для спектрального распределения энергии излучения, которое находится в термодинамическом равновесии с системой заряженных нерелятивистских частиц, взаимодействующих между собой по закону Кулона (кулоновская система — КС). При этом отличие от формулы Планка однозначно определяется поперечной диэлектрической проницаемостью (ДП) среды, учитывающей не только частотную, но и пространственную дисперсию.

На этой основе было установлено, что в области высоких частот отличие спектрального распределения энергии равновесного излучения в веществе от формулы Планка определяется мнимой частью поперечной ДП вещества. При этом было показано, что как в разреженной высокотемпературной полностью ионизованной нерелятивистской плазме [6], так и в вырожденной электронной плазме [7] высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения принципиально отличается от формулы Планка, что обусловлено наличием вещества. Аналогичная ситуация имеет место и при рассмотрении области низких частот в электронной плазме как в квазиклассическом пределе [8], так и в пределе сильного вырождения электронов [9].

В настоящей работе на основе полученных ранее результатов рассмотрена низкочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в электронной плазме при произвольном вырождении электронов.

Низкочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения и магнитная проницаемость материальной среды

Рассматривая материальную среду как совокупность заряженных частиц и фотонов, можно показать [5], что средняя энергия равновесного излучения в веществе имеет вид

$$E_{ph} = V\sum_{\lambda}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k},\lambda) = V\int_0^\infty \varepsilon_\omega(T,\{(\mu_a\})d\omega. \quad (1)$$

Здесь $f(\mathbf{k},\lambda) \equiv \langle \hat{c}^+_{\mathbf{k},\lambda}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ — точная равновесная функция распределения фотонов по импульсам $\hbar\mathbf{k}$ и поляризации λ в материальной среде, где $\hat{c}^+_{\mathbf{k},\lambda}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения для фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией $\lambda = 1, 2$; угловые скобки $\langle \ldots \rangle$ обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса для рассматриваемой системы, находящейся в объеме V при температуре T (в энергетических единицах).

При этом спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T, \{\mu_a\})$ зависит не только от частоты электромагнитного поля ω и температуры среды T, как это имеет место в формуле Планка для идеального газа фотонов, но и от характеристик вещества как КС, а именно набора химических потенциалов заряженных частиц $\{\mu_a\}$:

$$\varepsilon_\omega(T, \{\mu_a\}) = \varepsilon_\omega^{(0)}(T) + \Delta\varepsilon_\omega(T, \{\mu_a\}), \tag{2}$$

где величина $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ определяется формулой Планка

$$\varepsilon_\omega^{(0)}(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}, \tag{3}$$

а функция $\Delta\varepsilon_\omega(T, \{\mu_a\})$ — равенством

$$\Delta\varepsilon_\omega(T, \{\mu_a\}) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\left(F(\omega) - \frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$$F(\omega) = \frac{c^5}{\pi\omega} \int_0^\infty dk k^4 \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)}{|\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)\omega^2 - c^2 k^2|^2}. \tag{5}$$

Здесь и далее c — скорость света.

Вклад $\Delta\varepsilon_\omega(T, \{\mu_a\})$ (4) в спектральное распределение энергии равновесного излучения обусловлен наличием вещества (заряженных частиц) и полностью определяется поперечной ДП $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)$ рассматриваемой системы. Отметим, что соотношение (4) справедливо только для однородной и изотропной среды, линейные электромагнитные свойства которой однозначно определяются продольной $\varepsilon^l(k, \omega)$ и поперечной $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)$ ДП [10].

Нас будет интересовать низкочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в материальной среде. Для этого, как следует из (3), (4), достаточно установить асимптотическое поведение функции $F(\omega)$ в пределе низких частот $\omega \to 0$.

С этой целью обратим внимание, что в линейном приближении по внешнему электромагнитному полю величина магнитной проницаемости материальной среды $\bar{\mu}(k, \omega)$, определяющая связь между Фурье-компонентой напряженности магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$ в веществе и Фурье-компонентой напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{H}^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{k}, \omega)$, равна [11,12]

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \bar{\mu}(k, \omega)\mathbf{H}^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\bar{\mu}(k, \omega) = \frac{c^2 k^2 - \omega^2}{c^2 k^2 - \omega^2 \varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)}. \tag{6}$$

В статическом пределе $\omega \to 0$ магнитная проницаемость $\bar{\mu}(k, 0) = \lim_{\omega\to 0} \bar{\mu}(k, \omega)$ определяет равновесное состояние материальной среды в слабом статическом внешнем поле $\mathbf{H}^{(\mathrm{ext})}(\mathbf{k}, 0)$. При этом, согласно (6):

$$\lim_{\omega\to 0} \omega^2 \operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) = 0. \tag{7}$$

В результате, учитывая (5)–(7), находим

$$F(\omega)|_{\omega\to 0} \to \left(\frac{c}{\pi\omega} \int_0^\infty dk\, \bar{\mu}^2(k, 0) \operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)\right)_{\omega\to 0}. \tag{8}$$

Таким образом, для вычисления низкочастотной асимптотики функции $F(\omega)$ необходимо определить статическую магнитную проницаемость и мнимую часть поперечной ДП материальной среды.

Статическая магнитная проницаемость и поперечная диэлектрическая проницаемость электронной плазмы в пределе низких частот

Далее мы ограничимся рассмотрением поперечной ДП электронной плазмы в приближении идеального газа (об условиях применимости такого приближения см. подробнее [13]). В этом случае имеем [12,14]

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{4\pi}{\omega^2}\{\Phi_d(k, \omega) + \Phi_p(k, \omega)\}, \tag{9}$$

$$\Phi_d(k, \omega) = \frac{\hbar^2 e^2}{m_e^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(p^2 - \frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right) \times \frac{\Delta f(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\hbar(\omega + i0) + \Delta\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{k})}, \tag{10}$$

$$\Phi_p(k, \omega) = \frac{\hbar^2 e^2 k^2}{2 m_e^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\Delta f(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\hbar(\omega + i0) + \Delta\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{k})}, \tag{11}$$

$$\Delta f(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \equiv f_{\mathbf{p}-\mathbf{k}/2} - f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}/2}, \quad \Delta\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \equiv \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}/2} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}/2}. \tag{12}$$

Здесь и далее $\omega_e = (4\pi e^2 \bar{n}_e/m_e)^{1/2}$ — плазменная частота рассматриваемой системы электронов, которые характеризуются энергией $\epsilon_p = \hbar^2 p^2/2m_e$ в состоянии с импульсом $\hbar\mathbf{p}$; f_p — функция распределения Ферми–Дирака

$$f_p = \{\exp[(\epsilon_p - \mu_e)/T] + 1\}^{-1} \tag{13}$$

с условием нормировки, устанавливающим связь между средней плотностью числа электронов $\bar{n}_e$, их химическим потенциалом μ_e и температурой T в электронной плазме:

$$\bar{n}_e(\mu_e, T) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_p, \tag{14}$$

где множитель 2 связан с вырождением энергии электрона ϵ_p по спиновому квантовому числу [15].

Переходя в тройных интегралах (10)–(12) к сферическим координатам, находим [16]

$$\operatorname{Re}\Phi_d(k,\omega)=\frac{e^2}{4\pi^2 m_e k}\int\limits_0^\infty dp\,p f_p$$

$$\times\left\{\left[p^2-k^2\left(\Delta^{(-)}(k,\omega)\right)^2\right]\ln\left|\frac{p+k\Delta^{(-)}(k,\omega)}{p-k\Delta^{(-)}(k,\omega)}\right|\right.$$

$$\left.-\left[p^2-k^2\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2\right]\ln\left|\frac{p+k\Delta^{(+)}(k,\omega)}{p-k\Delta^{(+)}(k,\omega)}\right|\right\}-\frac{\omega_e^2}{8\pi},\tag{15}$$

$$\operatorname{Im}\Phi_d(k,\omega)=$$

$$\frac{e^2}{4\pi m_e k}\left\{\int\limits_{k\Delta^{(+)}(k,\omega)}^\infty dp p f_p\left[p^2-k^2\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2\right]\right.$$

$$\left.-\int\limits_{k|\Delta^{(-)}(k,\omega)|}^\infty dp p f_p\left[p^2-k^2\left(\Delta^{(-)}(k,\omega)\right)^2\right]\right\},\tag{16}$$

$$\operatorname{Re}\Phi_p(k,\omega)=\frac{e^2 k}{8\pi^2 m_e}\int\limits_0^\infty dp p f_p\left\{\ln\left|\frac{p+k\Delta^{(-)}(k,\omega)}{p-k\Delta^{(-)}(k,\omega)}\right|\right.$$

$$\left.-\ln\left|\frac{p+k\Delta^{(+)}(k,\omega)}{p-k\Delta^{(+)}(k,\omega)}\right|\right\},\tag{17}$$

$$\operatorname{Im}\Phi_p(k,\omega)=-\frac{e^2 k}{8\pi m_e}\int\limits_{k|\Delta^{(-)}(k,\omega)|}^{k\Delta^{(+)}(k,\omega)} dp p f_p,$$

$$\Delta^{(\mp)}(k,\omega)=\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\mp\frac{1}{2}.\tag{18}$$

Подставляя (15)–(18) в (6), (9), получаем следующее выражение для статической магнитной проницаемости электронной плазмы:

$$\bar{\mu}(k,0)=\lim_{\omega\to 0}\bar{\mu}(k,\omega)=$$

$$\frac{c^2k^2}{c^2k^2+\omega_e^2+4\pi\Phi_d(k,0)+4\pi\Phi_p(k,0)},\tag{19}$$

$$\Phi_d(k,0)=\frac{e^2}{2\pi^2 m_e k}$$

$$\times\int\limits_0^\infty dp p f_p\left(p^2-\frac{k^2}{4}\right)\ln\left|\frac{2p-k}{2p+k}\right|-\frac{\omega_e^2}{8\pi},\tag{20}$$

$$\Phi_p(k,0)=\frac{e^2 k}{4\pi^2 m_e}\int\limits_0^\infty dp p f_p\ln\left|\frac{2p-k}{2p+k}\right|<0.\tag{21}$$

Из (13), (20), (21) следует, что функции $\Phi_d(k,0)$ и $\Phi_p(k,0)$ не имеют особенностей при любых значениях волновых векторов k. В области малых волновых векторов k эти функции можно представить как

$$\Phi_d(k,0)|_{k\to 0}\to-\frac{\omega_e^2}{4\pi}+\frac{e^2k^2}{12\pi^2 m_e}\int\limits_0^\infty dp f_p,$$

$$\Phi_p(k,0)|_{k\to 0}\to-\frac{e^2k^2}{4\pi^2 m_e}\int\limits_0^\infty dp\, f_p.\tag{22}$$

При этом с учетом (13), (14) интегрированием по частям нетрудно убедиться, что

$$\int\limits_0^\infty dp f_p=\frac{\hbar^2}{m_e T}\int\limits_0^\infty dp p^2 f_p(1-f_p)$$

$$=\frac{\pi^2\hbar^2}{m_e}\left(\frac{\partial\bar{n}_e(\mu_e,T)}{\partial\mu_e}\right)_T.\tag{23}$$

В свою очередь, в области больших значений волновых векторов k для этих функций справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_d(k,0)=0,\quad \lim_{k\to\infty}\Phi_p(k,0)=-\omega_e^2/8\pi.\tag{24}$$

Подставляя (22), (23) в (19), находим

$$\lim_{k\to 0}\bar{\mu}(k,0)=\{1-\alpha(\mu_e,T)\}^{-1},\quad \lim_{k\to\infty}\bar{\mu}(k,0)=1,$$

$$\alpha(\mu_e,T)=\frac{\hbar^2\omega_e^2}{6m_e c^2}\cdot\frac{1}{\bar{n}_e}\left(\frac{\partial\bar{n}_e}{\partial\mu_e}\right)_T.\tag{25}$$

Рассматриваемая нерелятивистская электронная плазма характеризуется термодинамическими параметрами, для которых справедливо условие

$$\max\{\hbar\omega_e,\epsilon_F,T\}\ll m_e c^2,\tag{26}$$

где $\epsilon_F=\hbar^2k_F^2/2m_e$ — энергия Ферми, $k_F=(3\pi^2\bar{n}_e)^{1/3}$ — волновой вектор Ферми для электронов. В этом случае $\alpha(\mu_e,T)\ll 1$, поэтому, согласно проведенному рассмотрению, с учетом (25), (26) мы можем считать, что при вычислении низкочастотной асимптотики функции $F(\omega)$ в (8) $\bar{\mu}(k,0)\cong 1$.

Таким образом, для нерелятивистской электронной плазмы имеем

$$F(\omega)|_{\omega\to 0}\to\left(\frac{c}{\pi\omega}\int\limits_0^\infty dk\operatorname{Im}\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)\right)_{\omega\to 0}.\tag{27}$$

Перейдем к рассмотрению мнимой части поперечной ДП электронной плазмы. Подставляя (13) в (16), (18), находим [17]

$$\operatorname{Im}\Phi_d(k,\omega)=\frac{e^2Tk}{4\pi\hbar^2}$$
$$\times\left[\left(\Delta^{(-)}\right)^2\ln\left\{1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}-\gamma_k\left(\Delta^{(-)}\right)^2\right)\right\}-\left(\Delta^{(+)}\right)^2\right.$$
$$\left.\times\ln\left\{1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}-\gamma_k\left(\Delta^{(+)}\right)^2\right)\right\}\right]$$
$$+\frac{m_e e^2T^2}{2\pi\hbar^4k}\Psi\left(\gamma_k\left(\Delta^{(+)}\right)^2,\gamma_k\left(\Delta^{(-)}\right)^2;\frac{\mu_e}{T}\right),\qquad(28)$$

$$\Psi(x,y;z)\equiv\int_x^y d\tau\,\frac{\tau}{\exp(\tau-z)+1},\quad \gamma_k=\frac{\epsilon_k}{T}=\frac{(k\Lambda)^2}{4\pi},\qquad(29)$$

$$\operatorname{Im}\Phi_p(k,\omega)=-\frac{e^2Tk}{8\pi\hbar^2}\ln\left|\frac{1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}-\gamma_k\left(\Delta^{(-)}\right)^2\right)}{1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}-\gamma_k\left(\Delta^{(+)}\right)^2\right)}\right|,\qquad(30)$$

где $\Lambda=(2\pi\hbar^2/(m_eT))^{1/2}$ — тепловая длина волны де Бройля для электронов.

Далее учтем, что переход к пределу $\omega\to 0$ в формуле Планка (3)

$$\varepsilon_\omega^{(0)}(T)\big|_{\omega\to0}\to T\omega^2/\pi^2c^3\qquad(31)$$

соответствует условию $\gamma_\omega=\hbar\omega/T\ll 1$. В этом случае из (28)–(30) получаем

$$\operatorname{Im}\Phi_d(k,\omega)\big|_{\gamma_\omega\ll1}\to-\frac{e^2Tm_e\omega}{2\pi\hbar^3k}$$
$$\times\ln\left|1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}-\gamma_k\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]\right)\right|$$
$$-\frac{e^2k\omega}{2\pi\hbar}\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]$$
$$\times\left\{1+\exp\left(-\frac{\mu_e}{T}+\gamma_k\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]\right)\right\}^{-1},\qquad(32)$$

$$\operatorname{Im}\Phi_p(k,\omega)\big|_{\gamma_\omega\ll1}\to-\frac{e^2k\omega}{8\pi\hbar}$$
$$\times\left\{1+\exp\left(-\frac{\mu_e}{T}+\gamma_k\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]\right)\right\}^{-1}.\qquad(33)$$

Здесь учтено, что

$$\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2-\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2=2m_e\omega/\hbar k^2,$$
$$\Psi(x+\Delta x,x-\Delta x;z)\big|_{\Delta x\to0}\to-\frac{2x\Delta x}{\exp(x-z)+1}.\qquad(34)$$

Подставляя (32)–(34) в (9), мы можем представить мнимую часть поперечной ДП электронной плазмы при условии $\gamma_\omega\ll1$ в виде трех слагаемых, различающихся по зависимости от волнового вектора k и частоты ω:

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\big|_{\gamma_\omega\ll1}\cong\sum_{i=1}^3\operatorname{Im}\varepsilon_i^{\rm tr}(k,\omega),\qquad(35)$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon_1^{\rm tr}(k,\omega)=\frac{e^2k}{\hbar\omega}$$
$$\times\left\{1+\exp\left(-\frac{\mu_e}{T}+\gamma_k\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]\right)\right\}^{-1},\qquad(36)$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon_2^{\rm tr}(k,\omega)=\frac{2e^2Tm_e}{\hbar^3k\omega}$$
$$\times\ln\left|1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}-\gamma_k\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]\right)\right|,\qquad(37)$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon_3^{\rm tr}(k,\omega)=\frac{2e^2m_e^2\omega}{\hbar^3k^3}$$
$$\times\left\{1+\exp\left(-\frac{\mu_e}{T}+\gamma_k\left[\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)^2+\frac14\right]\right)\right\}^{-1}.\qquad(38)$$

Низкочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в электронной плазме

Учитывая (4), (5), (27), (35)–(38), получаем следующее выражение для вклада $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ (4) в спектральное распределение энергии равновесного излучения, обусловленного наличием электронной плазмы, в пределе низких частот $\omega\to0$:

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\mu_e)|_{\omega\to0}\to\sum_{i=1}^3\Delta\varepsilon_\omega^{(i)}(T,\mu_e)|_{\omega\to0},\qquad(39)$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(1)}(T,\mu_e)|_{\omega\to0}=\frac{2T\omega^2}{\pi^2c^3}\left(F^{(1)}(\omega)|_{\omega\to0}-\frac12\right),\qquad(40)$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(j)}(T,\mu_e)|_{\omega\to0}=\frac{2T\omega^2}{\pi^2c^3}F^{(j)}(\omega)|_{\omega\to0};\quad j=2,3,\qquad(41)$$

где функции $F^{(i)}(\omega)|_{\omega\to0}$ определяются соотношением

$$F^{(i)}(\omega)|_{\omega\to0}\to\left(\frac{c}{\pi\omega}\int_0^\infty dk\operatorname{Im}\varepsilon_i^{\rm tr}(k,\omega)\right)\bigg|_{\omega\to0}.\qquad(42)$$

Обратим внимание, что, согласно (36), при вычислении функции $F^{(1)}(\omega)|_{\omega\to0}$ мы можем осуществить переход к пределу $\omega\to0$ под знаком интеграла по волновым векторам в (42). В результате получаем

$$F^{(1)}(\omega)|_{\omega\to0}\to\frac{4e^2cTm_e}{\pi\hbar^3\omega^2}\int_0^\infty dx\{\exp(x-\mu_e/T)+1\}^{-1}$$
$$=\frac{4e^2cTm_e}{\pi\hbar^3\omega^2}\ln\left|1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}\right)\right|.\qquad(43)$$

Следовательно,

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(1)}(T,\mu_e|_{\omega\to0}=\frac{8e^2T^2m_e}{\pi^3\hbar^3c^2}\ln\left|1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}\right)\right|.\qquad(44)$$

В свою очередь, согласно (37), (38), (42), функции $F^{(2)}(\omega)|_{\omega\to 0}$ и $F^{(3)}(\omega)|_{\omega\to 0}$ имеют вид

$$F^{(2)}(\omega)|_{\omega\to 0} \to \frac{e^2 T m_e c}{\pi\hbar^3\omega^2}\, G^{(2)}\left(\frac{\mu_e}{T}, \gamma_\omega\right)\bigg|_{\omega\to 0},$$

$$G^{(2)}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}\ln\left|1+\exp\left(\alpha - \frac{\beta^2}{16x} - x\right)\right|, \quad (45)$$

$$F^{(3)}(\omega)|_{\omega\to 0} \to \frac{e^2 m_e c}{8\pi\hbar T}\, G^{(3)}\left(\frac{\mu_e}{T}, \gamma_\omega\right)\bigg|_{\omega\to 0},$$

$$G^{(3)}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left\{1+\exp\left(-\alpha + \frac{\beta^2}{16x} + x\right)\right\}^{-1}. \quad (46)$$

Прежде всего, отметим, что при вычислении асимптотик функций $G^{(2)}(\alpha,\beta)$ и $G^{(3)}(\alpha,\beta)$ при $\beta\to 0$ нельзя использовать переход к пределу $\beta\to 0$ под знаками интегралов в определениях (45), (46) для этих функций в силу расходимости на нижнем пределе возникающих интегралов.

Кроме того, с учетом определений (45), (46) имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial G^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right)_\alpha = -\frac{\beta}{8}\, G^{(3)}(\alpha,\beta). \quad (47)$$

С другой стороны, используя в интеграле (45) замену переменной $y = 16x/\beta^2$, функцию $G^{(2)}(\alpha,\beta)$ можно записать как

$$G^{(2)}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y}\ln\left|1+\exp\left(\alpha - \frac{1}{y} - \frac{\beta^2 y}{16}\right)\right|. \quad (48)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial G^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right)_\alpha = -\frac{\beta}{8}\, L(\alpha,\beta),$$

$$L(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty dy\left\{1+\exp\left(-\alpha + \frac{1}{y} + \frac{\beta^2 y}{16}\right)\right\}^{-1}. \quad (49)$$

Далее в интегральном представлении (49) для функции $L(\alpha,\beta)$ мы снова делаем замену переменной $z = \beta^2 y/16$ и получаем

$$L(\alpha,\beta) = \frac{16}{\beta^2}\, M(\alpha,\beta),$$

$$M(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty dz\left\{1+\exp\left(-\alpha + \frac{\beta^2}{16z} + z\right)\right\}^{-1}. \quad (50)$$

При этом для вычисления функции $M(\alpha,\beta)$ в пределе $\beta\to 0$ можно использовать переход к этому пределу под знаком интеграла в (50), так что

$$\lim_{\beta\to 0} M(\alpha,\beta) = \ln|1+\exp(\alpha)|. \quad (51)$$

Таким образом, сравнивая (45)–(51), находим

$$G^{(2)}(\alpha,\beta)|_{\beta\to 0} \to \ln|1+\exp(\alpha)|\cdot\ln|C(\alpha)/\beta^2|,$$

$$G^{(3)}(\alpha,\beta)|_{\beta\to 0} \to 16\ln|1+\exp(\alpha)|/\beta^2, \quad (52)$$

где $C(\alpha)$ — некоторая функция, явное вычисление которой во всей области изменения переменной $\alpha\in(-\infty,\infty)$ в настоящее время не представляется возможным. Однако мы можем определить значения этой функции в двух предельных случаях: $\alpha\to-\infty$ и $\alpha\to\infty$.

Действительно, в пределе $\alpha\to-\infty$ функцию $G^{(2)}(\alpha,\beta)$ (45) можно представить как

$$G^{(2)}(\alpha,\beta)|_{\alpha\to-\infty} \to \exp(\alpha)$$
$$\times\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}\exp\left(-\frac{\beta^2}{16x} - x\right) = 2\exp(\alpha)K_0(\beta/2), \quad (53)$$

где $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода (или функция Макдональда), причем [18]

$$K_0(x)|_{x\to 0} \to \ln|2/x| - C_E, \quad (54)$$

где $C_E = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Сравнивая (52)–(54), находим

$$C(\alpha)|_{\alpha\to-\infty} \to 16\exp(-2C_E). \quad (55)$$

В свою очередь, в пределе $\alpha\to\infty$ функция $G^{(2)}(\alpha,\beta)$ (45) имеет вид

$$G^{(2)}(\alpha,\beta)|_{\alpha\to\infty} \to \left\{\int\limits_{x_1(\alpha,\beta)}^{x_2(\alpha,\beta)} \frac{dx}{x}\left(\alpha - \frac{\beta^2}{16x} - x\right)\right\}\bigg|_{\alpha\to\infty}, \quad (56)$$

$$x_1(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha - \sqrt{4\alpha^2-\beta^2}}{4},$$

$$x_2(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha + \sqrt{4\alpha^2-\beta^2}}{4}. \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56) и учитывая (52), находим

$$C(\alpha)|_{\alpha\to\infty} \to 16\alpha^2/\mathrm{e}^2, \quad (58)$$

где e — основание натурального логарифма.

В результате, учитывая (41), (45), (46), (52), получаем следующие предельные соотношения:

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(2)}(T,\mu_e)|_{\omega\to 0} \to \frac{2e^2T^2m_e}{\pi^3\hbar^3c^2}$$
$$\times\ln\left|1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}\right)\right|\cdot\ln\left|\frac{C(\mu_e/T}{\gamma_\omega^2}\right|, \quad (59)$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(3)}(T,\mu_e)|_{\omega\to 0} = \frac{4e^2T^2m_e}{\pi^3\hbar^3c^2}\ln\left|1+\exp\left(\frac{\mu_e}{T}\right)\right|. \quad (60)$$

Таким образом, согласно (39), (44), (59), (60), вклад $\Delta\varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\})$ (4) в спектральное распределение энергии равновесного излучения, обусловленный наличием электронной плазмы, в пределе низких частот $\omega \to 0$ имеет вид

$$\Delta\varepsilon_\omega(T, \mu_e)|_{\omega\to 0} \to \frac{2e^2T^2m_e}{\pi^3\hbar^3c^2} \times \ln\left|1 + \exp\left(\frac{\mu_e}{T}\right)\right| \left(\ln\left|\frac{C(\mu_e/T)T^2}{\hbar^2\omega^2}\right| + 6\right). \qquad (61)$$

Соотношение (61) с учетом предельных выражений (55), (58) для функции $C(\mu_e/T)$ соответствует результатам работы [8] для квазиклассической электронной плазмы, химический потенциал которой равен $\mu_e \cong T\ln(\bar{n}_e\Lambda^3/2)$ при условии $\bar{n}_e\Lambda^3 \ll 1$, и работы [9] для вырожденной электронной плазмы, химический потенциал которой равен $\mu_e \cong \epsilon_F$ при условии $\bar{n}_e\Lambda^3 \gg 1$.

Заключение

В соответствии с проведенным рассмотрением мы можем утверждать, что распределение энергии равновесного излучения, обусловленного наличием электронной плазмы, в пределе низких частот $\omega \to 0$ характеризуется логарифмической особенностью при произвольном вырождении электронов в рамках приближения идеального газа для вычисления поперечной ДП.

Это означает, что в области низких частот распределение энергии равновесного излучения полностью определяется наличием вещества (электронов), так что вкладом „свободного“ излучения, определяемого формулой Планка, можно пренебречь (см. (31)).

При этом в силу интегрируемости логарифмической особенности полная энергия равновесного излучения, приходящаяся на единицу объема, занимаемого рассматриваемой системой, остается конечной величиной (см. (1)).

Отметим также, что полученные выше результаты имеют место только в отношении так называемых „коллективизированных“ электронов в КС. Для описания электронных состояний, локализованных около ядер, требуется учет эффектов сильного взаимодействия, что выходит за рамки настоящей работы.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-02-00573).

Список литературы

[1] *Planck M.* // Ann. der Phys. 1901. Vol. 309. N 3. P. 553–563.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
[3] *Pierrehumbert R.T.* // Physics Today. 2011. Vol. 64. N 1. P. 33–38.
[4] *Агранат М.Б., Ашитков С.И., Овчинников А.В., Ситников Д.С., Юркевич А.А., Чефонов О.В., Перельман Л.Т., Анисимов С.И., Фортов В.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. Вып. 9. С. 671–676.
[5] *Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. Вып. 5. С. 326–329.
[6] *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТМФ. 2016. Т. 187. № 1. С. 104–113.
[7] *Бобров В.Б.* // ЖТФ. 2018. Т. 88. Вып. 2. С. 168–173.
[8] *Маслов С.А., Тригер С.А., Гусейн-заде Н.Г.* // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2018. № 8. С. 14–19.
[9] *Маслов С.А., Тригер С.А., Гусейн-заде Н.Г.* // Краткие сообщения по физике ФИАН. 2018. № 12. С. 15–20.
[10] *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Либроком, 2013. 248 с.
[11] *Киржниц Д.А.* // УФН. 1987. Т. 152. № 7. С. 399–422.
[12] *Bobrov V.B.* // Physica A. 1992. Vol. 187. N 3–4. P. 603–624.
[13] *Коваленко Н.П., Красный Ю.П., Тригер С.А.* Статистическая теория жидких металлов. М.: Наука, 1990. 204 с.
[14] *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТМФ. 2017. Т. 192. № 3. С. 523–535.
[15] *Пайнс Д., Нозьер Ф.* Теория квантовых жидкостей. Нормальные ферми-жидкости. М.: Мир, 1967. 382 с. [*Pines D., Nozieres Ph.* The Theory of Quantum Liquids. Vol. 1. Normal Fermi Liquids. NY.: W.A. Benjamin, 1966. 374 p.]
[16] *Бобров В.Б.* // ТВТ. 2017. Т. 55. № 4. С. 489–492.
[17] *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 180–184.
[18] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.