

Петлевые дислокации и дисклинации в методе виртуальных дефектов

© А.Л. Колесникова, А.Е. Романов*

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
199178 Санкт-Петербург, Россия

* Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: aer@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 27 февраля 2003 г.)

Излагается метод виртуальных круговых петель для определения упругих полей дефектов в ограниченных средах при наличии цилиндрической симметрии. В предлагаемом методе непрерывные распределения виртуальных круговых петель дислокаций Вольтерра и Сомилианы обеспечивают выполнение требуемых условий на свободных поверхностях и границах раздела фаз. Приводятся оригинальные расчеты упругих полей необходимого набора круговых петлевых дефектов. Представлены результаты решения задач о нахождении упругих полей дислокаций и дисклинаций, перпендикулярных поверхностям пластины, и круговых дисклинационных петель, параллельных поверхностям пластины и границе раздела фаз.

Работа выполнена в рамках программы „Физика твердотельных наноструктур“ Минпрома России, а также при поддержке Фонда Фольксвагена (проект I/74645).

Упругие поля и связанные с ними характерные энергии являются обычным откликом твердого тела на возникновение в нем различных дефектов, например, дислокаций [1] и дисклинаций [2]. Любые реальные твердые тела ограничены внешними поверхностями и могут иметь границы раздела. Поэтому в реальном кристалле дефекты всегда взаимодействуют с поверхностями раздела за счет изменения в распределении их упругих полей. Для точного учета такого взаимодействия в различных физических моделях, описывающих поведение дислокаций и дисклинаций, необходима разработка эффективных методов решения граничных задач („boundary problems“) теории дефектов.

В настоящее время имеется ряд подробных обзоров, посвященных результатам и методам решения граничных задач теории дислокаций [3–5]. Одновременно публикуются оригинальные работы по расчету полей и энергий дислокаций вблизи границ, имеющие не только фундаментальное значение, но и направленные на решение прикладных (например, при расчете электронно-микроскопического контраста [6]) и модельных (например, при анализе устойчивости дислокаций в нанокристаллах [7]) задач. Для дисклинационных дефектов результаты решения граничных задач изложены в монографии [2], а более поздние результаты рассредоточены в оригинальных статьях [8–10].

Одним из эффективных способов решения граничных задач теории дислокаций и дисклинаций является метод виртуальных дефектов. Пионерским исследованием в разработке данного метода можно считать работу [11]. Позднее этот метод был с успехом применен многими авторами для решения граничных задач теории дефектов различной степени сложности (см., например, [5,8,12–15]). В настоящей статье авторы применили данный подход для решения цилиндрически симметрич-

ных задач теории дислокаций и дисклинаций, выбирая в качестве виртуальных дефектов круговые петли.

Работа состоит из трех частей. В первой кратко излагается идея метода. Вторая часть посвящена определению полей некоторых петлевых дефектов по заданной пластической дисторсии. В третьей продемонстрированы точные аналитические решения задач для дислокаций и дисклинаций, перпендикулярных поверхностям пластины, и круговых дисклинационных петель, параллельных поверхностям пластины и границе раздела фаз.

1. Метод виртуальных дефектов

Основным достоинством метода виртуальных дефектов являются его простота и наглядность, позволяющие единообразно подходить к решению граничных задач для дефектов различных полей (например, упругих и магнитных) и полей бездефектной природы. Первоначально метод оперировал только поверхностными дислокациями [11–13], но затем был обобщен на случай поверхностных дисклинаций [2] и поверхностных распределений флюксоидов (вихревых нитей) в сверхпроводниках II рода [16].

Идея метода заключается в следующем: искомое поле дефекта (или поле бездефектного типа) в среде с внутренними или внешними границами ищется в виде суммы исходного поля дефекта в бесконечной среде и добавочного поля, создаваемого непрерывными распределениями поверхностных дефектов. В качестве поверхностных выбираются дефекты с компонентами полей, входящими в граничные условия. Созданное таким образом добавочное поле автоматически удовлетворяет уравнениям среды (например, в теории упругости — уравнениям равновесия и совместности, в теории сверхпроводников II рода — уравнениям Лондонов),

а граничные условия приобретают вид интегральных уравнений относительно функций распределений виртуальных поверхностных дефектов. Отметим, что линии виртуальных дефектов расположены вне той среды, на которую распространяется их действие, а в случае свободной поверхности могут быть помещены на нее (поэтому непрерывно распределенные виртуальные дефекты называются поверхностными в отличие от дефектов изображения). Виртуальные дефекты, таким образом, не являются реальными дефектами, обладающими ядрами конечного размера в кристаллических твердых телах. Напротив, размер ядра любого виртуального дефекта можно считать бесконечно малым, а сам виртуальный дефект считать сингулярным источником упругого или магнитного поля.

Метод с успехом был применен для тех случаев, когда роль поверхностных выполняли прямолинейные бесконечные дефекты, в задачах о нахождении полей прямолинейных дефектов, линии которых параллельны границам раздела [8,13,16,17], а также в случае некоторых специальных задач для прямолинейных дислокаций, выходящих на поверхность или пересекающих границу раздела фаз [5,14]. В работах [5,14] использованы распределения поверхностных дислокационных отрезков.

В предлагаемом вниманию читателей исследовании поверхностными виртуальными дефектами являются круговые дислокационно-дисклинационные петли, а решаемые предложенным методом задачи обладают цилиндрической симметрией. Например, рассматривается прямолинейный дефект, перпендикулярный плоским свободным поверхностям или границе раздела фаз; или круговая петля, параллельная плоским свободным поверхностям или границе раздела фаз; или круговая петля, соосная круговому цилиндру (с том числе многослойному). Как будет видно из последующего изложения, использование петлевых виртуальных дефектов позволяет обойти (окружить) место выхода реального дефекта на поверхность твердого тела, что во многих случаях упрощает решение задачи.

2. Упругие поля круговых петель

Для решения граничных задач методом виртуальных круговых петель необходимо заранее определить поля полных смещений и упругих напряжений (именно на эти поля накладываются условия непрерывности на поверхности раздела) достаточно широкого набора петлевых дефектов. Далее продемонстрируем общий метод [18] расчета упругих полей круговых петель и приведем поля полных смещений и поля упругих напряжений для дислокационных петель — призматической и скользящей, для дисклинационных петель — клиновой и кручения, и для петель дислокаций Соммианы — радиальной дисклинационной и радиальной дислокационной.

Отправной точкой для нахождения свойств петлевого дислокационно-дисклинационного дефекта (т.е. дислокации Вольтерра) является задание его пластической

дисторсии β_{ij}^* в следующем виде [18]:

$$\beta_{ij}^* = \delta_i(S) [-b_j - e_{j pq} \omega_p (x_q - x_q^0)], \quad (1)$$

где $\delta_i(S) = \int_{S_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS'_i$, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — трехмерная дельта-функция; S_i — поверхность разреза, проходящая по поверхности петли с вектором нормали \mathbf{n} ; b_j — вектор Бюргера дислокации; ω_p — вектор Франка дисклинации; x_q^0 — координата оси ротации; $e_{j pq}$ — тензор Леви-Чивита. Выражение в квадратных скобках является скачком смещений $[u_j]$ на поверхности разреза S_i , обусловленным следующей процедурой: разрез по поверхности S_i , смещение верхнего берега разреза S_i^+ относительно нижнего S_i^- на величину $[u_j]$.¹ Добавление (извлечение) материала для устранения образовавшихся несплошностей (перекрывтий) и последующая склейка берегов разреза приводит к появлению дефекта с дисторсией β_{ij}^* . В обобщенном виде пластическая дисторсия β_{ij}^* представляется через произвольный скачок $[u_j]$ на S .

Пластическая дисторсия β_{ij}^* задает в упругом теле следующее поле полных смещений u_m [18]:

$$u_m(\mathbf{r}') = -i \iiint_{-\infty}^{\infty} \xi_l C_{j i k l} L_{m k} \bar{\beta}_{i j}^* \exp(i \xi \cdot \mathbf{r}) d\xi_x d\xi_y d\xi_z, \quad (2)$$

где $C_{j i k l}$ — упругие константы, $L_{m k}$ и $\bar{\beta}_{i j}^*$ — Фурье-образы функции Грина упругой среды и пластической дисторсии соответственно, $\xi \cdot \mathbf{r} = \xi_x x + \xi_y y + \xi_z z$. Для изотропной среды имеем [18]

$$C_{j i k l} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ji} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$L_{m k} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2(1-\nu)\xi^2 \delta_{mk} - \xi_m \xi_k}{2(1-\nu)G\xi^4}, \quad (3)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, δ_{km} — символ Кронекера, $\xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$. Выражения (2), (3) могут быть использованы для расчетов упругих полей дислокаций Вольтерра и Соммианы произвольной конфигурации, в частности в виде круговых петель.

В качестве основного набора рассмотрим круговые петли, пластические дисторсии которых линейно независимы в декартовой или цилиндрической системах координаты представляют собой первые или нулевые члены ряда Фурье. Для петель, расположенных в координатной плоскости XoY с центром в начале координат, дисторсии тогда есть

$$\beta_{zj}^* = A_0 + A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi,$$

$$A_0 = A_1 = B_1 = (b + \omega r) H\left(1 - \frac{r}{a}\right) \delta(z),$$

$$j = x, y, z \quad \text{или} \quad j = r, \varphi, z. \quad (4)$$

Здесь $H\left(1 - \frac{r}{a}\right)$ — функция Хевисайда, $\delta(z)$ — одномерная дельта-функция, a — радиус петель. Линейность

¹ В нашем рассмотрении [9] выбор берегов разреза и скачка смещений на них противоположен изложенному в [18]. Однако полученные в этом случае дефекты идентичны полученным в [18].

дисторсий по $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и их линейная независимость справедливы только в рамках определенной системы координат: декартовой или цилиндрической. Более подробно набор возможных петлевых дефектов проанализирован в [9].

Далее приведены пластические дисторсии, полные смещения и упругие напряжения петель, расположенных в координатной плоскости XOY с центром в начале координат и линией дефекта, направленной против часовой стрелки.

Призматическая дислокационная петля с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = -b\mathbf{e}_z$ (рис. 1, *a*). Пластическая дисторсия петли: $\beta_{zz}^* = bH\left(1 - \frac{z}{a}\right)\delta(z)$.

Полные смещения

$$u_r = \frac{b}{4(1-\nu)} \left[(2\nu-1)J(1, 1; 0) + \frac{|z|}{a} J(1, 1; 1) \right],$$

$$u_\varphi = 0,$$

$$u_z = \frac{b \operatorname{sgn}(z)}{4(1-\nu)} \left[2(1-\nu)J(1, 0; 0) + \frac{|z|}{a} J(1, 0; 1) \right]. \quad (5)$$

Здесь и далее $\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} -1, & z < 0 \\ +1, & z > 0 \end{cases}$, а $J(m, n; p)$ — интегралы Лифшица–Ханкеля [19], задаваемые соотношением $J(m, n; p) = \int_0^\infty J_m(\kappa) J_n\left(\kappa \frac{z}{a}\right) \exp\left(-\kappa \frac{|z|}{a}\right) \kappa^p d\kappa$, $J_m(\kappa)$ — функция Бесселя.

Упругие напряжения определяем из (5), рассчитывая поле упругих деформаций и используя закон Гука

$$\sigma_{rr} = \frac{Gb}{2(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{r} J(1, 1; 0) + \frac{|z|}{a^2} J(1, 0; 2) - \frac{1}{a} J(1, 0; 1) - \frac{|z|}{ar} J(1, 1; 1) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Gb}{2(1-\nu)} \left[\frac{2\nu-1}{r} J(1, 1; 0) - \frac{2\nu}{a} J(1, 0; 1) + \frac{|z|}{ar} J(1, 1; 1) \right],$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{Gb}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{a} J(1, 0; 1) + \frac{|z|}{a^2} J(1, 0; 2) \right],$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{Gb}{2(1-\nu)} \frac{z}{a^2} J(1, 1; 2),$$

$$\sigma_{z\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (6)$$

Представленные поля совпадают с полями, которые могут быть найдены как частный случай из известного решения для призматической дислокационной петли в двухфазном материале [20].

Дислокационная петля скольжения с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = -b\mathbf{e}_x$ (рис. 1, *b*) и пластической дисторсией $\beta_{zx}^* = bH\left(1 - \frac{z}{a}\right)\delta(z)$.

Полные смещения

$$u_r = \frac{b \operatorname{sgn}(z) \cos \varphi}{4(1-\nu)} \left[2(1-\nu)J(1, 0; 0) - \frac{|z|}{a} J(1, 0; 1) + \frac{|z|}{r} J(1, 1; 0) \right],$$

$$u_\varphi = \frac{b \operatorname{sgn}(z) \sin \varphi}{4(1-\nu)} \left[2(\nu-1)J(1, 0; 0) + \frac{|z|}{r} J(1, 1; 0) \right],$$

$$u_z = \frac{b \cos \varphi}{4(1-\nu)} \left[(1-2\nu)J(1, 1; 0) + \frac{|z|}{a} J(1, 1; 1) \right]. \quad (7)$$

Упругие напряжения

$$\sigma_{rr} = \frac{Gb \operatorname{sgn}(z) \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[-\frac{2}{a} J(1, 1; 1) + \frac{|z|}{a^2} J(1, 1; 2) - \frac{|z|}{ar} J(1, 2; 1) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Gb \operatorname{sgn}(z) \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[\frac{|z|}{ar} J(1, 2; 1) - \frac{2\nu}{a} J(1, 1; 1) \right],$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{Gb \cos \varphi}{2(1-\nu)} \frac{z}{a^2} J(1, 1; 2),$$

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{Gb \sin \varphi}{2(1-\nu)} \left[\frac{1-\nu}{a} J(1, 0; 1) + \frac{\nu}{r} J(1, 1; 0) - \frac{|z|}{ar} J(1, 1; 1) \right],$$

$$\sigma_{rz} = \frac{Gb \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[-\frac{1}{a} J(1, 0; 1) + \frac{|z|}{a^2} J(1, 0; 2) - \frac{|z|}{ar} J(1, 1; 1) + \frac{\nu}{r} J(1, 1; 0) \right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{Gb \operatorname{sgn}(z) \sin \varphi}{2(1-\nu)} \left[-\frac{|z|}{ar} J(1, 2; 1) + \frac{1-\nu}{a} J(1, 1; 1) \right]. \quad (8)$$

Найденные поля совпадают с решениями, приведенными в [21].

Клиновидная дисклинационная петля с вектором Франка $\omega = -\omega\mathbf{e}_y$ (рис. 1, *c*) и пластической дисторсией $\beta_{zz}^* = \omega r \cos \varphi H\left(1 - \frac{z}{a}\right)\delta(z)$.

Полные смещения

$$u_r = \frac{\omega a \cos \varphi}{8(1-\nu)} \left[(1-2\nu)J(2, 0; 0) + (2\nu-1)J(2, 2; 0) - \frac{|z|}{a} J(2, 0; 1) + \frac{|z|}{a} J(2, 2; 1) \right],$$

$$u_\varphi = \frac{\omega a \sin \varphi}{4(1-\nu)} \left[(2\nu-1) \frac{a}{r} J(2, 1; -1) + \frac{|z|}{r} J(2, 1; 0) \right],$$

$$u_z = \frac{\omega a \operatorname{sgn}(z) \cos \varphi}{4(1-\nu)} \left[2(1-\nu)J(2, 1; 0) + \frac{|z|}{a} J(2, 1; 1) \right]. \quad (9)$$

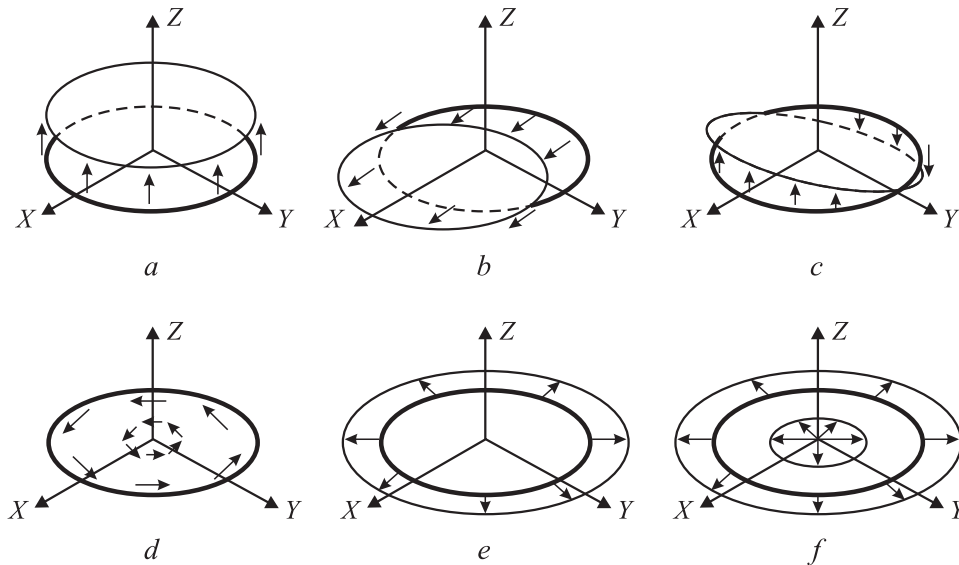


Рис. 1. Набор круговых петлевых дефектов, которые могут быть использованы в качестве виртуальных петель при решении граничных задач: *a* — призматическая дислокационная петля, *b* — дислокационная петля скольжения, *c* — клиновидная дисклинационная петля, *d* — дисклинационная петля кручения, *e* — радиальная дисклинационная петля (дислокация Сомилианы), *f* — радиальная дислокационная петля (дислокация Сомилианы). Стрелками отмечено смещение верхнего берега разреза при образовании петлевого дефекта с заданной пластической дисторсией.

Упругие напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{G\omega \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{a}{r} J(2, 2; 0) - J(2, 1; 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{|z|}{a} J(2, 1; 2) - \frac{|z|}{r} J(2, 2; 1) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{G\omega \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[(2\nu-1) \frac{a}{r} J(2, 2; 0) \right. \\ &\quad \left. - 2\nu J(2, 1; 1) + \frac{|z|}{r} J(2, 2; 1) \right], \\ \sigma_{zz} &= -\frac{G\omega \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[J(2, 1; 1) + \frac{|z|}{a} J(2, 1; 2) \right], \\ \sigma_{z\varphi} &= -\frac{G\omega \sin \varphi}{2(1-\nu)} \frac{z}{r} J(2, 1; 1), \\ \sigma_{rz} &= \frac{G\omega \cos \varphi}{2(1-\nu)} \left[\frac{z}{a} J(2, 0; 2) - \frac{z}{r} J(2, 1; 1) \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{G\omega \sin \varphi}{2(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{a}{r} J(2, 2; 0) - \frac{|z|}{r} J(2, 2; 1) \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Упругие поля, задаваемые соотношениями (9) и (10), устраняют неточности, допущенные в работе [22]. В частности, корректность выражений (10) проверяется на выполнение уравнений равновесия $\sigma_{i,j,j} = 0$.

Дисклинационная петля кручения с вектором Франка $\omega = -\omega e_z$ (рис. 1, *d*) и пластической дисторсией $\beta_{z\varphi}^* = \omega r H(1 - \frac{z}{a}) \delta(z)$.

Полные смещения

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{\omega a}{2} \operatorname{sgn}(z) J(2, 1; 0), \\ u_r &= u_z = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Упругие напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= -\frac{G\omega}{2} \operatorname{sgn}(z) J(2, 2; 1), \\ \sigma_{z\varphi} &= -\frac{G\omega}{2} J(2, 1; 1), \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Решения (11) и (12) дополняют результаты работы [23]. Некоторые несоответствия обнаружены в компоненте напряжений $\sigma_{r\varphi}$ (см. формулу (8) в [23]). Кроме того, в [23] знак пластической дисторсии не соответствует знаку дисклинации. Проверка выполнения уравнений равновесия подтверждает правильность выражений (11) и (12).

Радиальная дисклинационная петля (дислокация Сомилианы) со скачком смещений $[u_r] = \omega r$ (рис. 1, *e*) и пластической дисторсией $\beta_{zr}^* = \omega r H(1 - \frac{z}{a}) \delta(z)$.

Полные смещения

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\omega a \operatorname{sgn}(z)}{4(1-\nu)} \left[2(1-\nu) J(2, 1; 0) - \frac{|z|}{a} J(2, 1; 1) \right], \\ u_\varphi &= 0, \\ u_z &= \frac{\omega a}{4(1-\nu)} \left[(2\nu-1) J(2, 0; 0) - \frac{|z|}{a} J(2, 0; 1) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Упругие напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{G\omega \operatorname{sgn}(z)}{2(1-\nu)} \left[2(\nu-1) \frac{a}{r} J(2, 1; 0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|z|}{a} J(2, 0; 2) + 2J(2, 0; 1) + \frac{|z|}{r} J(2, 1; 1) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{G\omega \operatorname{sgn}(z)}{2(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{a}{r} J(2, 1; 0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|z|}{r} J(2, 1; 1) + 2\nu J(2, 0; 1) \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{G\omega}{2(1-\nu)} \frac{z}{a} J(2, 0; 2), \\ \sigma_{rz} &= \frac{G\omega}{2(1-\nu)} \left[\frac{|z|}{a} J(2, 1; 2) - J(2, 1; 1) \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{z\varphi} = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Радиальная дислокационная петля (дислокация Сомилианы) со скачком смещений $[u_r] = b$ (рис. 1, *f*) и пластической дисторсией $\beta_{zr}^* = bH\left(1 - \frac{z}{a}\right)\delta(z)$.

Упругие поля этой петли получаются из полей радиальной дисклинационной петли (13) и (14) путем замены ω на $\frac{b}{2a}$ и интегралов Лифшица–Ханкеля $J(2, n; p)$ на интегралы вида $\int_0^\infty (J_1(\kappa)\mathbf{H}_0(\kappa) - J_0(\kappa)\mathbf{H}_1(\kappa))J_n(\kappa\frac{z}{a}) \times \exp(-\kappa\frac{|z|}{a})\kappa^p d\kappa$, где $\mathbf{H}_i(\kappa)$ — функция Струве [24].

Отметим, что детали расчетов, а также соотношения для полей упругих деформаций и энергий петлевых дефектов могут быть найдены в [9].

3. Примеры решения граничных задач теории дефектов с помощью непрерывных распределений виртуальных круговых петель

При решении граничных проблем в теории дефектов для задач, обладающих цилиндрической симметрией, будем использовать некоторые петли из рассмотренного выше набора, а именно призматические дислокационные петли (рис. 1, *a*), дисклинационные петли кручения (рис. 1, *c*) и радиальные дисклинационные петли (дислокации Сомилианы) (рис. 1, *e*). Введение семейств виртуальных круговых петель преобразует заданные граничные условия, а именно непрерывность нормальных к поверхности раздела компонент упругих напряжений и непрерывность всех компонент поля полных смещений (в случае свободной поверхности это требование опускается), в интегральные уравнения относительно неизвестных функций распределения петель. Необходимо, чтобы угловая зависимость компонент полей виртуальных петель соответствовала угловой зависимости компонент полей реального дефекта, для которого решается граничная задача. Существует ряд специальных замечаний, касающихся выбора петель по индексам интегралов Лифшица–Ханкеля и текущей координате r . Однако они не имеют принципиального характера, так как связаны

с упрощением решения интегральных уравнений, а не с самой возможностью решения. Для задач с плоскими поверхностями разделов (часть из них представлена в настоящей работе) функции распределения петель зависят от радиуса петель. Поскольку интегральные уравнения имеют ядра в виде функций Бесселя, к ним можно применить пару преобразований Ханкеля–Бесселя [25]

$$H_\nu(\lambda) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(\lambda r) r dr, \quad (15)$$

$$f(r) = \int_0^\infty H_\nu(\lambda) J_\nu(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (16)$$

где $H_\nu(\lambda)$ — Хенкель-образ функции $f(r)$, индекс ν указывает на порядок используемой в ядре преобразования функции Бесселя. Эффективность использования пары интегральных преобразований (15), (16) в решении граничных задач с помощью круговых петель обусловлена представлением полей петель в форме интегралов Лифшица–Ханкеля и совокупностью математических приемов, таких как замена переменных и изменение порядка интегрирования в двойных интегралах.

Продемонстрируем эти приемы сначала при решении простой задачи о винтовой дислокации, перпендикулярной свободным поверхностям пластины и полупространства (рис. 2). Для других задач — дисклинационный диполь и краевая дислокация в пластине (рис. 3), дисклинационная петля кручения в пластине, полупространстве и двухфазном материале (рис. 4) — приведем только окончательные соотношения для полных смещений и упругих напряжений.

Отметим, что для задач с цилиндром (например, круговая петля, соосная цилиндру) функции распределений виртуальных петель зависят от координаты вдоль

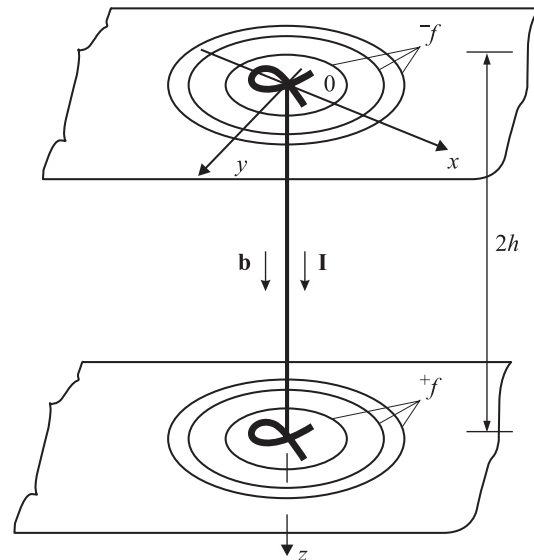


Рис. 2. Винтовая дислокация в пластине конечной толщины. На поверхностях пластины показаны скопления виртуальных дисклинационных петель кручения, обеспечивающих выполнение граничных условий.

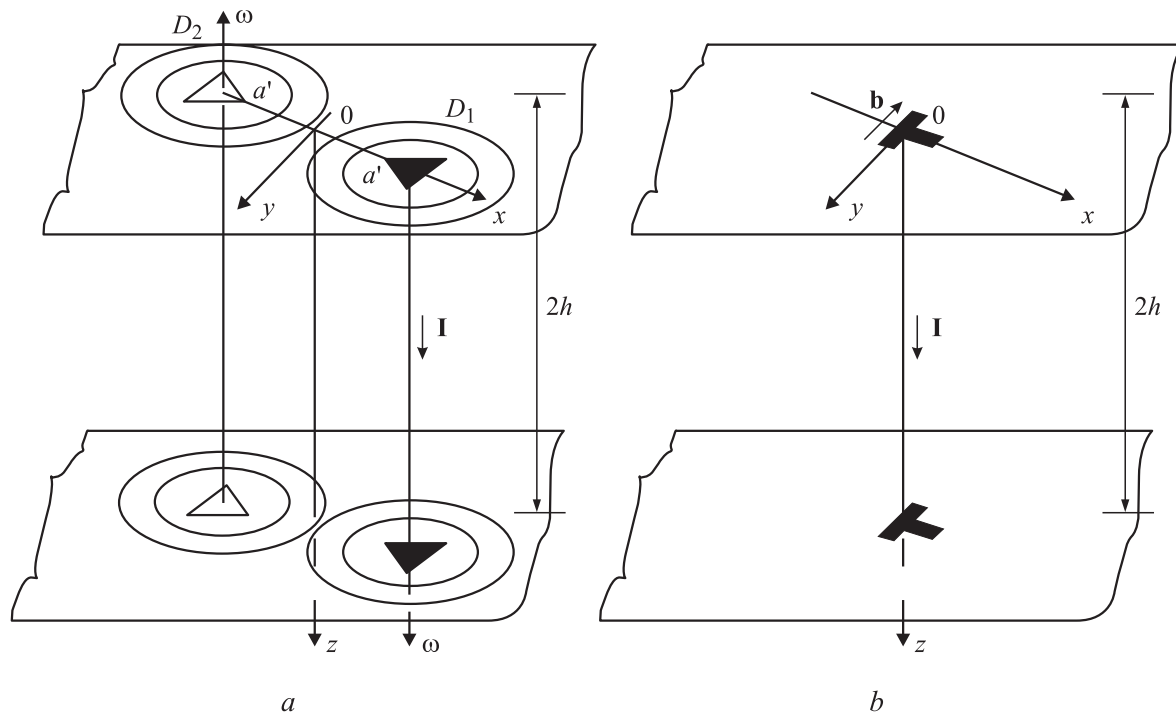


Рис. 3. Диполь клиновых дисклинаций и краевая дислокация в пластине конечной толщины: *a* — для дисклинационного диполя показаны распределения виртуальных призматических дислокационных петель и радиальных дисклинационных петель, опоясывающих места выхода линий дисклинаций на поверхности и обеспечивающих выполнение граничных условий; *b* — краевая дислокация, перпендикулярная поверхностям пластины, получаемая из дисклинационного диполя с помощью предельного перехода (пояснения в тексте).

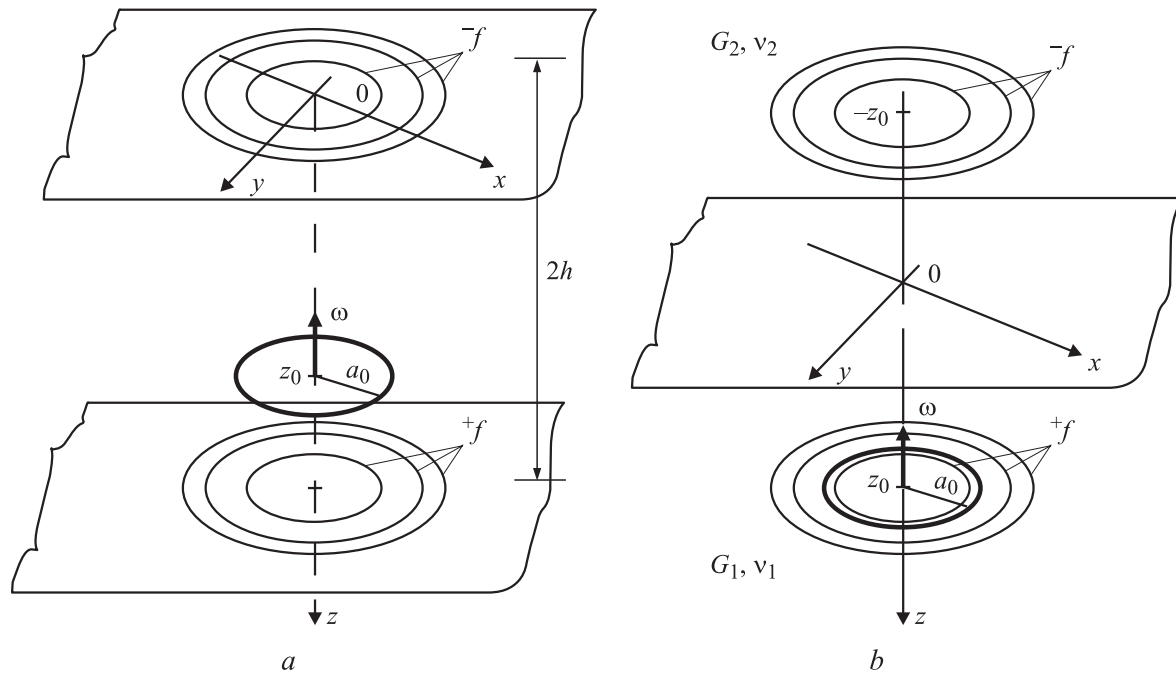


Рис. 4. Граничные задачи для дисклинационной петли кручения: *a* — петля в пластине; *b* — петля вблизи плоской границы раздела фаз. Тонкими линиями показаны скопления виртуальных дисклинационных петель кручения, обеспечивающих выполнение граничных условий.

оси цилиндра, В таких задачах удобно использовать преобразование Фурье.

Винтовая дислокация в пластине и полупространстве. Дислокация с вектором Бюргера $\mathbf{b} = b\mathbf{e}_z$ и вектором линии $\mathbf{l} = \mathbf{e}_z$ расположена перпендикулярно поверхностям пластины толщиной $2h$ и упругими модулями G и ν (рис. 2). В выбранной геометрии поле напряжений винтовой дислокации в бесконечной среде ${}^\infty\sigma_{ij}$ имеет одну ненулевую компоненту [25]

$${}^\infty\sigma_{z\varphi} = \frac{Gb}{2\pi r}. \quad (17)$$

На свободных поверхностях пластины должны быть реализованы следующие граничные условия:

$$\sigma_{z\varphi} \Big|_{\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ z=2h \end{array} \right\}} = 0. \quad (18)$$

В рамках метода виртуальных петель для удовлетворения граничных условий (18) представим искомое поле дислокации в пластине σ_{ij} как сумму поля в бесконечной среде ${}^\infty\sigma_{ij}$ и добавочного поля ${}^i\sigma_{ij}$, создаваемого семейством круговых дисклинационных петель кручения, расположенных на верхней и нижней поверхностях пластины (рис. 2). Поле напряжений петли кручения (12) так же, как и поле дислокации (17), имеет единственную компоненту $\sigma_{z\varphi}$, входящую в граничные условия непрерывности нормальных к свободной поверхности компонент напряжений. Переписав (18) с помощью полей поверхностных распределений петель кручения, находим интегральные уравнения относительно неизвестных функций распределения петель по радиусу $-f(a)$ и $+f(a)$ (соответственно на верхней и нижней поверхностях пластины)

$$\begin{aligned} \frac{Gb}{2\pi r} + \int_0^\infty -f(a) {}^\infty\sigma_{z\varphi}(r, z, a) \Big|_{\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ z=2h \end{array} \right\}} da \\ + \int_0^\infty +f(a) {}^\infty\sigma_{z\varphi}(r, z, a) \Big|_{\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ z=2h \end{array} \right\}} da = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где ${}^{+,-}\sigma_{z\varphi}|_{z=0}$ и ${}^{+,-}\sigma_{z\varphi}|_{z=2h}$ — упругие напряжения виртуальных петель из семейств „+“ и „-“ на поверхностях $z=0$ и $2h$ соответственно.

Учет (12) позволяет привести систему (19) к виду

$$\begin{aligned} \frac{G\omega}{2} \int_0^\infty -f(a) da \int_0^\infty J_2(\kappa) J_1\left(\kappa \frac{r}{a}\right) \kappa d\kappa + \frac{G\omega}{2} \int_0^\infty +f(a) da \\ \times \int_0^\infty J_2(\kappa) J_1\left(\kappa \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\kappa \frac{2h}{a}\right) \kappa d\kappa = \frac{Gb}{2\pi r}, \\ \frac{G\omega}{2} \int_0^\infty -f(a) da \int_0^\infty J_2(\kappa) J_1\left(\kappa \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\kappa \frac{2h}{a}\right) \kappa d\kappa \\ + \frac{G\omega}{2} \int_0^\infty +f(a) da \int_0^\infty J_2(\kappa) J_1\left(\kappa \frac{r}{a}\right) \kappa d\kappa = \frac{Gb}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (20)$$

Введение переменной $\beta = \frac{\kappa}{a}$, изменение порядка интегрирования в двойных интегралах, использование преобразования Ханкеля–Бесселя с ядром $J_1(\beta r)$ (15) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно Ханкель-образов ${}^{+,-}H_2(\beta) = \int_0^\infty [{}^{+,-}f(a)a] J_2(a\beta) a da$ функций $[{}^{+,-}f(a)a]$, откуда находим

$$-H_2 = +H_2 = \frac{b}{2\pi\omega} \frac{\exp(h\beta)}{\beta \operatorname{ch}(h\beta)}. \quad (21)$$

Обращение Ханкеля–Бесселя (16) позволяет определить функции распределения виртуальных петель кручения по их радиусу ${}^{+,-}f(a)$

$${}^{+}f = {}^{-}f = \frac{b}{2\pi\omega a} \int_0^\infty J_2(a\beta) \frac{\exp(h\beta)}{\operatorname{ch}(h\beta)} d\beta. \quad (22)$$

Заметим, что равенство функций распределений ${}^{+}f = {}^{-}f$ на двух сторонах пластины следует уже из постановки задачи. Оно могло бы быть использовано на начальном этапе решения. Однако мы не сделали этого с целью показать последовательность всех этапов решения.

Зная функции распределений петель по радиусу (22) и упругие поля одиночной виртуальной петли кручения (11) и (12), легко найти добавочные поля смещений ${}^i u_j$ и упругих напряжений ${}^i\sigma_{jk}$ (упругих деформаций ${}^i\varepsilon_{jk}$), возникающие для винтовой дислокации в пластине. Более того, для расчета этих полей достаточно знать Ханкель-образы ${}^{+,-}H_2$ (21). С помощью соотношений (11), (12) и, зная смещения дислокации в бесконечной среде ${}^\infty u_z$ [1,26], находим поле полных смещений винтовой дислокации в пластине

$$u_r = {}^\infty u_r = 0,$$

$$u_\varphi = {}^i u_\varphi = \frac{b}{2\pi} \int_0^\infty J_1(r\beta) \frac{\operatorname{sh}[(h-z)\beta]}{\beta \operatorname{ch}(h\beta)} d\beta,$$

$$u_z = {}^\infty u_z = \frac{b\varphi}{2\pi}, \quad 0 \leq z \leq 2h. \quad (23)$$

Поле напряжений вычисляется с применением (12), (17) и (21)

$$\sigma_{z\varphi} = \frac{Gb}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \int_0^\infty J_1(r\beta) \frac{\operatorname{ch}[(z-h)\beta]}{\operatorname{ch}(h\beta)} d\beta \right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{Gb}{2\pi} \int_0^\infty J_2(r\beta) \frac{\operatorname{sh}[(z-h)\beta]}{\operatorname{ch}(h\beta)} d\beta,$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad 0 \leq z \leq 2h. \quad (24)$$

Найденные напряжения в отличие от результатов Эшелби и Стро [27] записаны не в виде рядов от цилиндриче-

ских функций, а с помощью интегралов. Этот результат совпадает с решением, полученным для винтовой дислокации в пластине другим способом [28]. Можно убедиться также, что напряжения (24) удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям.

При устремлении толщины пластины к бесконечности ($2h \rightarrow \infty$) из (23), (24) получаем поля винтовой дислокации в полупространстве

$$\begin{aligned} u_r &= 0, \\ u_\varphi &= \frac{b}{2\pi} \frac{r}{R+z}, \\ u_z &= {}^\infty u_z = \frac{b\varphi}{2\pi}, \quad 0 \leq z, \\ \sigma_{z\varphi} &= \frac{Gb}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{R(R+z)} \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= -\frac{Gb}{2\pi} \frac{r^2}{R(R+z)^2}, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad 0 \leq z, \end{aligned} \quad (25)$$

где $R^2 = r^2 + z^2$.

Сравнение напряжений (26) с данными [3,29] показывает корректность формул, полученных методом виртуальных круговых петель.

Диполь клиновых дислокаций в пластине и полупространстве. Диполь D_1D_2 состоит из клиновых дисклинаций, перпендикулярных поверхностям пластины (рис. 3,а). Вектора Франка дисклинаций D_1 и D_2 $\omega_1 = \omega e_z$ и $\omega_2 = -\omega e_z$ соответственно. Плечо диполя $2a'$. Применение метода виртуальных круговых петель для отыскания упругих полей дисклинационного диполя и использование в качестве виртуальных распределения призматических петель и радиальных дисклинационных петель позволяют найти поле полных смещений и поле упругих напряжений (деформаций) для дисклинаций, перпендикулярных свободным поверхностям пластины. Опуская промежуточные выкладки, запишем искомое поле полных смещений диполя

$$\begin{aligned} u \begin{Bmatrix} r \\ \varphi \end{Bmatrix} &= {}^\infty u \begin{Bmatrix} r \\ \varphi \end{Bmatrix} - \frac{\omega v}{4\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi - \varphi_i) \\ -\sin(\varphi - \varphi_i) \end{Bmatrix} \\ &\quad \times \int_0^\infty J_1(r_i\beta) (S_2H_1 + S_4H_2) d\beta, \\ u_z &= \frac{\omega v}{4\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \int_0^\infty J_0(r_i\beta) (W_1H_1 + W_2H_2) d\beta, \\ &0 \leq z \leq 2h. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь ${}^\infty u_i$ — поле смещений диполя D_1D_2 в бесконечной среде [26]

$$\begin{aligned} {}^\infty u \begin{Bmatrix} r \\ \varphi \end{Bmatrix} &= \frac{\omega}{4\pi(1-\nu)} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left[(1-2\nu)r_i(\ln r_i - 1) \begin{Bmatrix} \cos(\varphi - \varphi_i) \\ -\sin(\varphi - \varphi_i) \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu)r_i\varphi_i \begin{Bmatrix} \sin(\varphi - \varphi_i) \\ \cos(\varphi - \varphi_i) \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Для поля напряжений диполя дисклинаций, перпендикулярных свободным поверхностям пластины, справедливы формулы

$$\begin{aligned} \sigma \begin{Bmatrix} rr \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} &= {}^\infty \sigma \begin{Bmatrix} rr \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} + \frac{G\omega v}{4\pi(1-\nu)} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left[\{\pm\} \cos(2(\varphi - \varphi_i)) \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty J_2(r_i\beta) (S_2H_1 + S_4H_2) \beta d\beta \\ &\quad \left. + \int_0^\infty J_0(r_i\beta) ((2S_1 + S_2)H_1 + (2S_3 + S_4)H_2) \beta d\beta \right], \\ \sigma_{zz} &= {}^\infty \sigma_{zz} + \frac{G\omega v}{2\pi(1-\nu)} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \int_0^\infty J_0(r_i\beta) (T_1H_1 + T_2H_2) \beta d\beta, \\ \sigma_{r\varphi} &= {}^\infty \sigma_{r\varphi} - \frac{G\omega v}{4\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \sin(2(\varphi - \varphi_i)) \\ &\quad \times \int_0^\infty J_2(r_i\beta) (S_2H_1 + S_4H_2) \beta d\beta, \\ \sigma \begin{Bmatrix} z\varphi \\ zr \end{Bmatrix} &= \frac{G\omega v}{2\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi - \varphi_i) \\ \cos(\varphi - \varphi_i) \end{Bmatrix} \\ &\quad \times \int_0^\infty J_1(r_i\beta) (Q_1H_1 + Q_2H_2) \beta d\beta, \\ &0 \leq z \leq 2h. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\infty\sigma_{ji}$ — поле напряжений диполя D_1D_2 в бесконечной среде [26]

$$\begin{aligned} \infty\sigma_{\left\{\begin{smallmatrix} rr \\ \varphi\varphi \end{smallmatrix}\right\}} &= \frac{G\omega}{2\pi(1-\nu)} \\ &\times \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left[\ln r_i + \left\{ \begin{smallmatrix} \sin^2(\varphi - \varphi_i) \\ \cos^2(\varphi - \varphi_i) \end{smallmatrix} \right\} \right], \\ \infty\sigma_{zz} &= \frac{G\omega\nu}{\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{r_2}, \\ \infty\sigma_{r\varphi} &= \frac{G\omega}{4\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \sin(2(\varphi - \varphi_i)), \\ \infty\sigma_{z\varphi} &= \infty\sigma_{z\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

В формулах (27)–(30) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 - 2ra' \cos \varphi + a'^2, \quad r_2^2 = r^2 + 2ra' \cos \varphi + a'^2, \\ \cos(\varphi - \varphi_1) &= \frac{(r - a' \cos \varphi)}{r_1}, \\ \cos(\varphi - \varphi_2) &= \frac{(r + a' \cos \varphi)}{r_2}, \quad \sin(\varphi - \varphi_1) = \frac{-a' \sin \varphi}{r_1}, \\ \sin(\varphi - \varphi_2) &= \frac{a' \sin \varphi}{r_2}, \end{aligned}$$

$$H_1 = \frac{2}{\beta^2} \frac{(1 - 2h\beta) \exp(-2h\beta) - 1}{1 + (4h\beta - \exp(-2h\beta)) \exp(-2h\beta)},$$

$$H_2 = -\frac{4}{\beta} \frac{h \exp(-2h\beta)}{1 + (4h\beta - \exp(-2h\beta)) \exp(-2h\beta)},$$

$$S_1 = z\beta E_1 - E_1 - E_2 - (z - 2h)\beta E_2,$$

$$S_2 = (1 - 2\nu)(E_1 + E_2) - z\beta E_1 + (z - 2h)\beta E_2,$$

$$S_3 = 2(E_1 + E_2) - z\beta E_1 + (z - 2h)\beta E_2,$$

$$S_4 = z\beta E_1 - 2(1 - \nu)(E_1 + E_2) - (z - 2h)\beta E_2,$$

$$T_1 = -E_1 - E_2 - z\beta E_1 + (z - 2h)\beta E_2,$$

$$T_2 = z\beta E_1 - (z - 2h)\beta E_2,$$

$$Q_1 = -z\beta E_1 - (z - 2h)\beta E_2,$$

$$Q_2 = E_2 - E_1 + z\beta E_1 + (z - 2h)\beta E_2,$$

$$W_1 = 2(1 - \nu)(E_1 - E_2) + z\beta E_1 + (z - 2h)\beta E_2,$$

$$W_2 = (1 - 2\nu)(E_2 - E_1) - z\beta E_1 - (z - 2h)\beta E_2,$$

$$E_1 = \exp(-z\beta), \quad E_2 = \exp((z - 2h)\beta).$$

При устремлении толщины пластины к бесконечности ($2h \rightarrow \infty$) формулы (27)–(30) задают распределение

полей диполя клиновых дисклинаций, перпендикулярных свободной поверхности упругого полупространства. В частности для напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\left\{\begin{smallmatrix} rr \\ \varphi\varphi \end{smallmatrix}\right\}} &= \infty\sigma_{\left\{\begin{smallmatrix} rr \\ \varphi\varphi \end{smallmatrix}\right\}} - \frac{G\omega\nu}{2\pi(1-\nu)} \\ &\times \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left\{ (1 + 2\nu) \ln(R_i + z) + \frac{z}{R_i} + \{\pm\} \left[(1 - 2\nu) \right. \right. \\ &\times \left. \left. \frac{r_i^2 \cos(2(\varphi - \varphi_i))}{2(R_i + z)^2} - \frac{z r_i^2 \cos(2(\varphi - \varphi_i))}{R_i(R_i + z)^2} \right] \right\}, \\ \sigma_{zz} &= \infty\sigma_{zz} + \frac{G\omega\nu}{\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left[\frac{z}{R_i} - \ln(R_i + z) \right], \\ \sigma_{r\varphi} &= \infty\sigma_{r\varphi} + \frac{G\omega\nu}{4\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left[(1 - 2\nu) - \frac{2z}{R_i} \right] \\ &\times \frac{r_i^2 \sin(2(\varphi - \varphi_i))}{(R_i + z)^2}, \\ \sigma_{\left\{\begin{smallmatrix} z\varphi \\ zr \end{smallmatrix}\right\}} &= \frac{G\omega\nu}{\pi(1-\nu)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left\{ \begin{smallmatrix} -\sin(\varphi - \varphi_i) \\ \cos(\varphi - \varphi_i) \end{smallmatrix} \right\} \\ &\times \frac{z r_i}{R_i(R_i + z)}, \quad z \geq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $R_i^2 = r_i^2 + z^2$, $i = 1, 2$.

Поле, полученное с помощью предельного перехода, полностью совпадает с полем, вычисленным другим способом и представленным в [30].

От дисклинационного диполя легко перейти к краевой дислокации с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = -b\mathbf{e}_y$, предельным переходом $2a' \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \frac{b}{2a'}$ ($2a'$ — плечо диполя, ω — мощность дисклинаций в диполе) (рис. 3, б). Полные смещения и упругие напряжения краевой дислокации, перпендикулярной поверхностям пластины, опубликованы авторами в [9,31]. Отметим, что при устремлении толщины пластины к нулю получается решение задачи теории упругости для краевой дислокации в бесконечно тонком диске. При устремлении толщины пластины к бесконечности получим решение для краевой дислокации, перпендикулярной свободной поверхности. Все эти предельные переходы можно найти в [9].

Дисклинационная петля кручения в пластине и полупространстве. Дисклинационная петля кручения с вектором Франка $\omega = -\omega\mathbf{e}_z$ и радиусом a_0 параллельна поверхностям изотропной плиты толщиной $2h$ (рис. 4, а). Координата плоскости залегания петли z_0 . Поле напряжений $\infty\sigma_{ij}$ петли возьмем в форме (12). Добавочное поле создадим с помощью семейства виртуальных дисклинационных петель кручения. Используя приемы,

изложенные выше, найдем поля дисклинационной петли кручения в пластине

$$u_\varphi = {}^\infty u_\varphi - \frac{\omega a_0}{2} \int_0^\infty J_2(\kappa) J_1(\bar{r}\kappa) \frac{1}{\text{sh}(2\bar{h}\kappa)} [\text{sh}((2\bar{h} - \bar{z}_0)\kappa) \times \exp(-\bar{z}\kappa) - \text{sh}(\bar{z}_0\kappa) \exp(-(2\bar{h} - \bar{z})\kappa)] d\kappa,$$

$$u_r = u_z = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 2\bar{h}, \quad 0 \leq \bar{z}_0 \leq 2\bar{h}, \quad (32)$$

где $\bar{r} = \frac{r}{a_0}$, $\bar{z} = \frac{z}{a_0}$, а смещения ${}^\infty u_i$ в бесконечной среде представлены формулами (11) при условии замены z на $z - z_0$

$$\sigma_{r\varphi} = {}^\infty \sigma_{r\varphi} + \frac{G\omega}{2} \int_0^\infty J_2(\kappa) J_2(\bar{r}\kappa) \frac{1}{\text{sh}(2\bar{h}\kappa)} [\text{sh}((2\bar{h} - \bar{z}_0)\kappa) \times \exp(-\bar{z}\kappa) - \text{sh}(\bar{z}_0\kappa) \exp(-(2\bar{h} - \bar{z})\kappa)] \kappa d\kappa,$$

$$\sigma_{z\varphi} = {}^\infty \sigma_{z\varphi} + \frac{G\omega}{2} \int_0^\infty J_2(\kappa) J_1(\bar{r}\kappa) \frac{1}{\text{sh}(2\bar{h}\kappa)} [\text{sh}((2\bar{h} - \bar{z}_0)\kappa) \times \exp(-\bar{z}\kappa) + \text{sh}(\bar{z}_0\kappa) \exp(-(2\bar{h} - \bar{z})\kappa)] \kappa d\kappa,$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0,$$

$$0 \leq \bar{z} \leq 2\bar{h}, \quad 0 \leq \bar{z}_0 \leq 2\bar{h}, \quad (33)$$

где поле ${}^\infty \sigma_{ij}$ задается формулами (12) при условии замены z на $z - z_0$.

В работах [32,33] задача об упругих полях дисклинационной петли кручения в пластине решалась с помощью петель изображения. В итоге упругие поля записывались в виде бесконечного ряда. Можно убедиться, что полученное нами решение (32) и (33) может быть преобразовано к соотношениям, представленным в [32,33].

Переход к случаю петли кручения в полупространстве осуществляется при условии $2h \rightarrow \infty$ в формулах (32) и (33). Так вычисляются поле смещений

$$u_\varphi = {}^\infty u_\varphi - \frac{\omega a_0}{2} J^\bullet(2, 1; 0),$$

$$u_r = u_z = 0, \quad (34)$$

и поле упругих напряжений

$$\sigma_{r\varphi} = {}^\infty \sigma_{r\varphi} + \frac{G\omega}{2} J^\bullet(2, 2; 1),$$

$$\sigma_{z\varphi} = {}^\infty \sigma_{z\varphi} + \frac{G\omega}{2} J^\bullet(2, 1; 1),$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad 0 \leq \bar{z}, \quad 0 \leq \bar{z}_0, \quad (35)$$

где поля ${}^\infty u_i$ и ${}^\infty \sigma_{ij}$ задаются формулами (11) и (12) при условии замены z на $z - z_0$, а $J^\bullet(m, n; p) = J(m, n; p)$ с заменой z на $z + z_0$.

Из (34) и (35) следует, что упругие поля дисклинационной петли кручения в полупространстве есть сумма поля исходной петли и поля зеркальной петли. Этот

факт был впервые замечен в работе [34]. Энергия петли в пластине и полупространстве можно найти в [9].

Дисклинационная петля кручения в двухфазном материале. Дисклинационная петля кручения с вектором Франка $\omega = -\omega e_z$ и радиусом a_0 находится в материале с упругими модулями G_1, ν_1 (рис. 4, b), а граница раздела фаз совпадает с плоскостью XoY . На данной границе должны выполняться следующие условия непрерывности для поля полных смещений ${}^\alpha u_j$ и нормальных к границе компонент упругих напряжений ${}^\alpha \sigma_{zj}$ ($\alpha = 1, 2$ — номер среды)

$${}^1 u_j|_{z=0} = {}^2 u_j|_{z=0}.$$

$${}^1 \sigma_{zj}|_{z=0} = {}^2 \sigma_{zj}|_{z=0}, \quad j = x, y, z. \quad (36)$$

Представим с целью удовлетворения условий (36) поля петли: в среде 1 — в виде поля реальной петли и добавочного поля непрерывного распределения виртуальных петель кручения, расположенных в среде 2; в среде 2 — в виде добавочного поля непрерывного распределения виртуальных петель кручения, расположенных в среде 1.

В итоге решения интегральных уравнений получаем поле смещений и поле напряжений

$${}^1 u_\varphi = \frac{\omega a_0}{2} \text{sgn}(z - z_0) {}^1 J(2, 1; 0) + \frac{\omega a_0}{2} \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} {}^2 J(2, 1; 0),$$

$${}^1 u_r = {}^1 u_z = 0, \quad z \geq 0, \quad z_0 > 0,$$

$${}^2 u_\varphi = -\omega a_0 \frac{G_1}{G_2 + G_1} {}^1 J(2, 1; 0),$$

$${}^2 u_r = {}^2 u_z = 0, \quad z \leq 0, \quad z_0 > 0, \quad (37)$$

$${}^1 \sigma_{r\varphi} = -\frac{G_1 \omega}{2} \text{sgn}(z - z_0) {}^1 J(2, 2; 1)$$

$$- \frac{G_1 \omega}{2} \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} {}^2 J(2, 2; 1),$$

$${}^1 \sigma_{z\varphi} = -\frac{G_1 \omega}{2} {}^1 J(2, 1; 1) - \frac{G_1 \omega}{2} \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} {}^2 J(2, 1; 1),$$

$${}^1 \sigma_{rr} = {}^1 \sigma_{\varphi\varphi} = {}^1 \sigma_{zz} = {}^1 \sigma_{rz} = 0, \quad z \geq 0, \quad z_0 > 0,$$

$${}^2 \sigma_{r\varphi} = G_2 \omega \frac{G_1}{G_2 + G_1} {}^1 J(2, 2; 1),$$

$${}^2 \sigma_{z\varphi} = -G_2 \omega \frac{G_1}{G_2 + G_1} {}^1 J(2, 1; 1),$$

$${}^2 \sigma_{rr} = {}^2 \sigma_{\varphi\varphi} = {}^2 \sigma_{zz} = {}^2 \sigma_{rz} = 0, \quad z \leq 0, \quad z_0 > 0, \quad (38)$$

где ${}^1 J(m, n; p) = J(m, n; p)$ с заменой z на $z - z_0$ и ${}^2 J(m, n; p) = J(m, n; p)$ с заменой z на $z + z_0$. Энергия петли в двухфазном материале представлена в [9].

В заключение отметим, что разработанный общий метод поверхностных виртуальных круговых петель может быть с успехом использован для решения широкого класса граничных задач с цилиндрической симметрией в теории дефектов. Метод основан на введении плоских скоплений круговых петель с целью удовлетворения заданных граничных условий на поверхностях раздела. Дальнейшая процедура связана с составлением и

решением интегральных уравнений относительно неизвестных функций распределения круговых петель по их радиусу (для задач с плоскими границами раздела) или по координате вдоль оси цилиндра (например, для задачи о петле, соосно расположенной в цилиндре).

В представленной работе проведена классификация петлевых дефектов и рассчитаны поля смещений и упругих напряжений для набора из шести петель. Полученные результаты для призматической петли, петли скольжения, клиновой дисклинационной петли и дисклинационной петли кручения сверены с данными литературы. Радиальная дисклинационная и радиальная дислокационная петли (дислокации Соммианы) рассмотрены впервые. Упругие поля и энергии дислокационных круговых петель могут быть эффективно применены, например, при анализе релаксационных процессов вблизи наноразмерных кластеров в полупроводниковых материалах [35,36].

В рамках общего метода построены решения для упругих полей дефектов, линии которых перпендикулярны поверхностям изотропной пластины. Для винтовой дислокации упругие поля записаны в новой интегральной форме. Для диполя клиновых дисклинаций, перпендикулярных поверхностям пластины, найденное решение публикуется в широкой печати впервые, ранее оно было доступно только в виде препринта ФТИ [9]. Из дисклинационного решения путем предельного перехода могут быть выведены упругие поля краевой дислокации в пластине [31], знание которых необходимо, например, для точного анализа электронно-микроскопического контраста от дислокации в тонких пленках. Дисклинационное решение также может быть использовано при анализе электронно-микроскопических изображений частичных дисклинаций, возникающих в структурах сильно деформированных металлов [10,37].

Разработанный новый способ расчета упругих полей дисклинационной петли кручения, залегающей параллельно границам раздела, позволил найти новые компактные решения для петли в пластине и петли вблизи межфазной границы. Использование метода виртуальных круговых петель подтвердило и позволило исправить полученные ранее формулы для упругих полей дисклинационных петель кручения в указанной выше геометрии.

Таким образом, показано, что метод поверхностных круговых петель дислокаций и дисклинаций эффективен для решения граничных задач с цилиндрической симметрией, поскольку позволяет наглядно и с единых позиций определять упругие поля разнообразных дефектов при наличии граничных условий.

Список литературы

- [1] Дж. Хирт, И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат. М. (1972). 600 с.
- [2] В.И. Владимиров, А.Е. Романов. Дисклинации в кристаллах. Наука, Л. (1986). 221 с.
- [3] J.D. Eshelby. In: Dislocations in Solids / Ed. by F.R.N. Nabarro. North-Holland, Amsterdam (1979). Vol. 1. P. 167.
- [4] J. Lothe. In: Elastic Strain Fields and Dislocation Mobility / Ed. by V.L. Indenbom, J. Lothe. Elsevier (1992). P. 329.
- [5] A.Yu. Belov. In: Elastic Strain Fields and Dislocation Mobility / Ed. by V.L. Indenbom, J. Lothe. Elsevier (1992). P. 391.
- [6] С.К. Максимов, Г.Н. Гайдуков, А.П. Филиппов. Поверхность. Физика, химия, механика **10**, 95 (1984).
- [7] V.G. Gryaznov, I.A. Polonsky, A.E. Romanov, L.I. Trusov. Phys. Rev. B **44**, 1, 42 (1991).
- [8] В.И. Владимиров, А.Л. Колесникова, А.Е. Романов. ФММ **60**, 6, 1106 (1985).
- [9] А.Л. Колесникова, А.Е. Романов. Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР № 1019. Л. (1986). 62 с.
- [10] A.L. Kolesnikova, V. Klemm, P. Klimanek, A.E. Romanov. Phys. Stat. Sol. (a) **191**, 2, 467 (2002).
- [11] N. Louat. Nature **196**, 4859, 1081 (1962).
- [12] M.J. Marcinkowski. Phys. Stat. Sol. (a) **63**, 1, 401 (1983).
- [13] K. Jagannadham, M.J. Marcinkowski. J. Mater. Sci. **15**, 2, 709 (1980).
- [14] A.J. Belov, V.A. Chamrov, V.L. Indenbom, J. Lothe. Phys. Stat. Sol. (b) **119**, 2, 565 (1983).
- [15] N. Louat, K. Sadananda. Phil. Mag. **A64**, 31, 213 (1991).
- [16] В.И. Владимиров, А.Е. Романов, А.Л. Колесникова. В кн.: Физика и технология обработки поверхности металлов. ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР, Л. (1984). С. 33.
- [17] M.Yu. Gutkin, A.E. Romanov. Phys. Stat. Sol. (a) **125**, 1, 107 (1991).
- [18] T. Mura. Micromechanics of defects in solids. Martinus Nijhoff, Boston (1987). 587 p.
- [19] G. Eason, B. Noble, I.N. Sneddon. Phil. Trans. R. Soc. **247**, 935, 529 (1955).
- [20] J. Dundurs, N.J. Salamon. Phys. Stat. Sol. (b) **50**, 1, 125 (1972).
- [21] N.J. Salamon, J. Dundurs. J. Phys. C **10**, 4, 497 (1977).
- [22] H.H. Kuo, T. Mura. J. Appl. Phys. **43**, 4, 1454 (1972).
- [23] H.H. Kuo, T. Mura, J. Dundurs. Int. Eng. Sci. **11**, 1, 193 (1973).
- [24] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Специальные функции. Наука, М. (1983). 752 с.
- [25] Я.С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Наука, Л. (1967), 403 с.
- [26] Р. де Вит. Континуальная теория дисклинаций. Мир, М. (1977). 208 с.
- [27] J.D. Eshelby, A.N. Stroh. Phil. Mag. **42**, 335, 1401 (1951).
- [28] K. Saito, R.O. Bozkurt, T. Mura. J. Appl. Phys. **43**, 1, 182 (1972).
- [29] S.J. Shaibani, P.M. Hazzledine. Phil. Mag. **A44**, 3, 657 (1981).
- [30] А.Е. Романов. Поверхность. Физика, химия, механика **12**, 121 (1982).
- [31] А.Л. Колесникова, А.Е. Романов. Письма ЖТФ **13**, 6, 272 (1987).
- [32] T.-W. Chou. J. Appl. Phys. **42**, 10, 4092 (1972).
- [33] H.H. Kuo, T. Mura. J. Appl. Phys. **43**, 10, 3926 (1972).
- [34] T.-W. Chou. J. Appl. Phys. **42**, 12, 4931 (1971).
- [35] V.V. Chaldyshev, N.A. Bert, A.E. Romanov, A.A. Suvorova, A.L. Kolesnikova, V.V. Preobrazhenskii, M.A. Putyato, B.R. Semyagin, P. Werner, N.D. Zakharov, A. Claverie. **80**, 3, 377 (2002).
- [36] Н.А. Берт, А.Л. Колесникова, А.Е. Романов, В.В. Чалдышев. ФТТ **44**, 12, 2139 (2002).
- [37] V. Klemm, P. Klimanek, A.L. Kolesnikova, M. Motylenko, A.E. Romanov. Annales de Chimie Science des Matériaux **27**, 3, 25 (2002).