

# Холодильный коэффициент составной охлаждающей термоэлектрической ветви

© И.А. Драбкин

ООО РМТ,  
115230 Москва, Россия  
E-mail: igordrabk@gmail.com

(Поступила в Редакцию 20 декабря 2018 г.  
В окончательной редакции 24 декабря 2018 г.  
Принята к публикации 28 декабря 2018 г.)

Одной из основных энергетических характеристик холодильной ветви является максимально достижимая разность температур ( $\Delta T_{\max}$ ). Увеличение  $\Delta T_{\max}$  означает рост максимального холодильного коэффициента при всех температурах. Использование составной ветви позволяет увеличить  $\Delta T_{\max}$ , однако максимально достижимый холодильный коэффициент увеличивается только при больших разностях температур, а при малых разностях температур максимально достижимый холодильный коэффициент оказывается даже меньше, чем в простой ветви.

DOI: 10.21883/FTP.2019.05.47563.21

## 1. Введение

Давно известно [1], что если на холодном конце составной ветви, состоящей из отдельных секций, разместить материалы с большей электропроводностью, чем на горячем конце, можно получить выигрыш в максимальной разности температур  $\Delta T_{\max}$  на ветви. Увеличение  $\Delta T_{\max}$  обычно связывается с увеличением эффективности термоэлектрического материала  $Z$ , а это в свою очередь должно приводить к улучшению энергетических характеристик, таких как максимальный холодильный коэффициент  $\epsilon_{\max}$ , во всем интервале рабочих температур. Последнее утверждение применительно к составной ветви представляется совершенно не очевидным, потому что на холодном конце помещен материал с высокой электропроводностью  $\sigma$  и, следовательно, с низкой величиной термоэдс  $\alpha$ , что неизбежно должно приводить к уменьшению теплоты Пельтье, поглощаемой на холодном конце ветви. Данная работа посвящена изучению максимального холодильного коэффициента составной ветви во всем рабочем интервале температур. Для решения задачи используется метод тепловых балансов с эффективными значениями термоэлектрических параметров.

## 2. Энергетические характеристики составной ветви

Рассмотрим холодильную составную ветвь из 2 секций с температурно-независимыми термоэлектрическими параметрами. Термоэлектрические параметры термоэдс  $\alpha$ , электропроводность  $\sigma$ , теплопроводность  $\kappa$ , относящиеся к каждой из секций, будем снабжать нижним индексом 1 или 2. Холодная сторона ветви пусть располагается в точке  $L$ . Для определенности пусть это будет  $p$ -ветвь, тогда ток направлен от холодного конца к горячему, т. е. отрицателен.

Обозначим температуру горячего конца ветви в точке 0 как  $T_h$ , холодного в точке  $L$  как  $T_c$ , на границе между первой и второй секциями в точке  $m_1$  как  $T_{m_1}$ . Ограничение двумя секциями не сказывается на общности задачи, потому что в случае большего количества секций можно описать их двумя секциями, применив для одной из таких секций систему соответствующих эффективных значений термоэлектрических параметров. Уравнения теплового баланса для секционированной ветви имеют вид [2,3]

$$\begin{cases} Q_c = \alpha_{c,\text{eff}} j T_c - \rho_{c,\text{eff}} j^2 L - \frac{\bar{\kappa}(T_h - T_c)}{L}, \\ Q_h = \alpha_{h,\text{eff}} j T_h + \rho_{h,\text{eff}} j^2 L - \frac{\bar{\kappa}(T_h - T_c)}{L}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $Q_c$  — плотность теплового потока, поглощаемого на холодном конце ветви,  $Q_h$  — плотность теплового потока, выделяемого на горячем конце ветви,  $j$  — плотность тока, текущего через ветвь,  $\alpha_{c,\text{eff}}$  — эффективное значение термоэдс на холодном конце ветви,  $\alpha_{h,\text{eff}}$  — эффективное значение термоэдс на горячем конце ветви,  $\rho_{c,\text{eff}}$  — эффективное значение электрического сопротивления для холодного конца ветви,  $\rho_{h,\text{eff}}$  — эффективное значение сопротивления для горячего конца ветви,  $\bar{\kappa}$  — средняя удельная теплопроводность ветви.

Расчет соответствующих эффективных величин [2] для рассматриваемого случая дает

$$\bar{\kappa} = L \left( \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)} \right), \quad (2)$$

$$\alpha_{c,\text{eff}} = \alpha_2 - \frac{T_{m_1}}{T_c} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \kappa_2 m_1}{\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)}, \quad (3)$$

$$\alpha_{h,\text{eff}} = \alpha_1 + \frac{T_{m_1}}{T_h} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \kappa_1 (L - m_1)}{\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)}, \quad (4)$$

$$\rho_{c,\text{eff}} = \frac{\rho_1 \kappa_2 m_1^2 / 2 + \rho_2 \kappa_2 m_1 (L - m_1) + \rho_2 \kappa_1 (L - m_1)^2 / 2}{L [\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)]}, \quad (5)$$

$$\rho_{h,\text{eff}} = \frac{\rho_1 \kappa_2 m_1^2 / 2 + \rho_1 \kappa_1 m_1 (L - m_1) + \rho_2 \kappa_1 (L - m_1)^2 / 2}{L[\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)]}. \quad (6)$$

Среднее удельное тепловое сопротивление ветви определим как  $\bar{\rho}_{\text{th}} = 1/\bar{\kappa}$ ,

$$\bar{\rho}_{\text{th}} = \left[ \frac{\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)}{L \kappa_1 \kappa_2} \right]. \quad (7)$$

Если

$$\alpha_2 < \alpha_1, \quad (8)$$

что соответствует поглощению тепла на границе секций, очевидно,

$$\alpha_2 - \alpha_1 < 0.$$

С учетом (6) видно, что  $\alpha_{h,\text{eff}} < \alpha_1$  и  $\alpha_{c,\text{eff}} > \alpha_2$ .

Максимальная разность температур равна

$$\Delta T_{\text{max}} = \frac{1}{2} Z_{c,\text{eff}} T_{c,\text{min}}. \quad (9)$$

где

$$Z_{c,\text{eff}} = \frac{\{\alpha_2 [\kappa_2 m_1 + \kappa_1 (L - m_1)] - (T_{m_1} / T_{c,\text{min}}) (\alpha_2 - \alpha_1) \kappa_2 m_1\}^2}{\kappa_1 \kappa_2 [\rho_1 \kappa_2 m_1^2 / 2 + \rho_2 \kappa_2 m_1 (L - m_1) + \rho_2 \kappa_1 (L - m_1)^2 / 2]}. \quad (10)$$

Плотность тока, при котором достигается  $\Delta T_{\text{max}}$ , составляет

$$j_{\text{max}} = \frac{\alpha_{c,\text{eff}} T_{c,\text{min}}}{\rho_{c,\text{eff}} L}. \quad (11)$$

Максимальное значение  $Z_{c,\text{eff}}$  достигается, когда граница секций расположена при  $m_{1\text{extr}}$ ,

$$m_{1\text{extr}} = L \frac{-(T_{m_1} / T_c) (1 - \alpha_1 / \alpha_2)}{(\rho_1 / \rho_2 - 1) - (1 - \kappa_1 / \kappa_2)}. \quad (12)$$

С учетом (8) величина  $(1 - \alpha_1 / \alpha_2) < 0$ , поэтому числитель (12) положителен. Для того чтобы положителен был и знаменатель (12), необходимо

$$\left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) - \left( 1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) > 0. \quad (13)$$

Из (13) следует

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} > \frac{\rho_{1\text{th}} - \rho_{2\text{th}}}{\rho_{1\text{th}}}, \quad (14)$$

где  $\rho_{1\text{th}} = 1/\kappa_1$  и  $\rho_{2\text{th}} = 1/\kappa_2$  — тепловые сопротивления соответственно секций 1 и 2 ветви, т.е. соотношение (14) означает, что для увеличения  $\Delta T_{\text{max}}$  составной ветви относительное уменьшение сопротивления при переходе от первой секции ко второй должно быть больше относительного уменьшения теплового сопротивления.

В методе эффективных значений термоэлектрических параметров для режима максимального холодильного коэффициента  $\varepsilon_{\text{max}}$  имеют место следующие соотношения:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{M_{\text{eff}} T_c (\alpha_{c,\text{eff}} / \bar{\alpha}) - T_h (\alpha_{h,\text{eff}} / \bar{\alpha}) + \delta}{\Delta T (M_{\text{eff}} + 1)}, \quad (15)$$

где использованы обозначения  $\Delta T = T_h - T_c$  и

$$M_{\text{eff}} = \sqrt{1 + \bar{Z} T_{\text{eff}}}, \quad (16)$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\alpha}^2}{\bar{\rho} \rho_{\text{th}}}, \quad (17)$$

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \frac{T_h - T_{m_1}}{\Delta T} + \alpha_2 \frac{T_{m_1} - T_c}{\Delta T}. \quad (18)$$

Величина  $T_{\text{eff}}$  равна

$$T_{\text{eff}} = T_c \frac{\alpha_{c,\text{eff}}}{\bar{\alpha}} + \Delta T \frac{\rho_{c,\text{eff}}}{\bar{\rho}} = T_h \frac{\alpha_{h,\text{eff}}}{\bar{\alpha}} - \Delta T \frac{\rho_{h,\text{eff}}}{\bar{\rho}}, \quad (19)$$

$$\delta = \frac{2\Delta T}{\bar{\rho}} (\rho_{h,\text{eff}} - \rho_{c,\text{eff}}). \quad (20)$$

Значение  $\varepsilon_{\text{max}}$  достигается при оптимальном токе

$$j = \frac{\bar{\alpha} \Delta T}{\bar{\rho} L (M_{\text{eff}} - 1)}. \quad (21)$$

Для определения  $\Delta T_{\text{max}}$  можно было бы воспользоваться формулами (9) и (10), однако в них входит температура  $T_{m_1}$ , которую надо еще определить. Распределение температур вдоль образца находится из решения уравнения теплопроводности

$$\kappa_i \frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \rho_i j^2 = 0, \quad (22)$$

где для  $x \leq m_1$   $i = 1$ , а для  $x > m_1$   $i = 2$ . Эти решения имеют вид

$$T(x) = \frac{j^2 \rho_1}{2\kappa_1} x(m_1 - x) - \frac{T_h - T_{m_1}}{m_1} x + T_h, \quad x \leq m_1, \quad (23)$$

$$T(x) = \frac{j^2 \rho_2}{2\kappa_2} (x - m_1)(L - x) - \frac{T_{m_1} - T_c}{L - m_1} (x - m_1) + T_{m_1}, \quad x > m_1. \quad (24)$$

Для определения  $T_c = T_{c,\text{min}}$  воспользуемся уравнением равенства нулю обобщенного теплового потока (тепловой поток за счет теплопроводности плюс тепловой поток Пельтье) на холодной стороне ветви:

$$\left( -\kappa_2 \frac{dT(x)}{dx} - \alpha_2 j T_c \right) \Big|_{x=L} = 0. \quad (25)$$

Для определения  $T_{m_1}$  воспользуемся непрерывностью обобщенного теплового потока на границе секций:

$$\begin{aligned} & \left( -\kappa_1 \frac{dT(x)}{dx} - \alpha_1 j T_{m_1} \right) \Big|_{x=m_1^-} \\ & = \left( -\kappa_2 \frac{dT(x)}{dx} - \alpha_1 j T_{m_1} \right) \Big|_{x=m_1^+}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (24) и (25) получаем

$$T_{c,\text{min}} = \frac{(j^2 \rho_2 / 2)(L - m_1)^2 + \kappa_2 T_{m_1}}{\alpha_2 j (L - m_1) + \kappa_2}, \quad (27)$$

а из (23), (24), (26), (27) получается значение  $T_{m_1}$  для  $\Delta T_{\max}$ :

$$T_{m_1} = - \left\{ \left[ \frac{j^2}{2} (\rho_1 m_1 - \rho_2 m_1 + \rho_2 L) + \frac{\kappa_1 T_h}{m_1} \right] \times \left[ \alpha_2 j + \frac{\kappa_2}{(L - m_1)} \right] + \frac{\kappa_2 j^2 \rho_2}{2} \right\} / \left\{ \left[ j(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{\kappa_1}{m_1} - \frac{\kappa_2}{(L - m_1)} \right] \left[ \alpha_2 j + \frac{\kappa_2}{(L - m_1)} \right] - \frac{\kappa_2^2}{(L - m_1)^2} \right\}. \quad (28)$$

Если  $T_c$  задано, то из (26) можно получить

$$T_{m_1} = \left\{ \frac{j^2}{2} [\rho_2(m_1 - L) - \rho_1 m_1] - \frac{\kappa_1 T_h}{m_1} + \frac{\kappa_2 T_c}{L - m_1} \right\} / \left\{ \frac{\kappa_1}{m_1} - \frac{\kappa_2}{L - m_1} - (\alpha_1 - \alpha_2) j \right\}. \quad (29)$$

Для составной ветви из (15) для малых разностей температур можно получить

$$\varepsilon_{\max} = \frac{T_h^2 \left( \frac{\alpha_{h,\text{eff}}}{\bar{\alpha}} \right)^2 \bar{Z}}{\Delta T \left( 1 + \sqrt{1 + T_h \frac{\alpha_{h,\text{eff}}}{\bar{\alpha}}} \right)^2} - F(\bar{Z}, M_{\text{eff}}, \rho_{h,\text{eff}}, \bar{\rho}), \quad (30)$$

где первый член имеет сингулярность при  $\Delta T = 0$ , а второй член  $F(\bar{Z}, M_{\text{eff}}, \rho_{h,\text{eff}}, \bar{\rho})$  — регулярная функция при  $\Delta T = 0$ . Сингулярная часть (30) получается из сингулярной части обычного выражения для максимального холодильного коэффициента первой секции заменой

$$Z_1 \rightarrow \left( \frac{\alpha_{h,\text{eff}}}{\bar{\alpha}} \right)^2 \bar{Z}. \quad (31)$$

Так как обычно для эффективности секций имеет место неравенство  $Z_2 < Z_1$ , для того чтобы выяснить, какая ветвь имеет больший холодильный коэффициент при малых  $\Delta T$ , надо сравнить величину  $Z_1$ , определяющую эффективность первой секции ветви, и величину  $(\alpha_{h,\text{eff}}/\bar{\alpha})^2 \bar{Z}$ , определяющую  $\varepsilon_{\max}$ .

Из (18) можно получить

$$\bar{\alpha} - \alpha_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{T_{m_1} - T_c}{\Delta T}. \quad (32)$$

Из (3), (4), (18) следует

$$\alpha_{h,\text{eff}} - \alpha_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{T_{m_1}}{T_h} \frac{\kappa_1(L - m_1)}{\kappa_2 m_1 + \kappa_1(L - m_1)}, \quad (33)$$

$$\frac{\bar{\alpha} - \alpha_1}{\alpha_{h,\text{eff}} - \alpha_1} = \frac{(T_{m_1} - T_c) T_h}{\Delta T T_{m_1}} \frac{\kappa_2 m_1 + \kappa_1(L - m_1)}{\kappa_1(L - m_1)}. \quad (34)$$

Можно показать, что последняя величина  $> 1$ , т.е.

$$\bar{\alpha} > \alpha_{h,\text{eff}}. \quad (35)$$

Так как  $\bar{Z} < Z_1$ , и вследствие (35)

$$Z_1 > \left( \frac{\alpha_{h,\text{eff}}}{\bar{\alpha}} \right)^2 \bar{Z}. \quad (36)$$

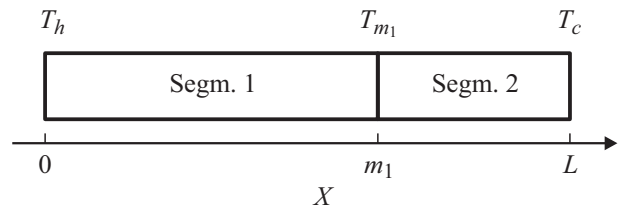


Рис. 1. Схема составной холодильной ветви из 2 секций: Segm. 1 и Segm. 2. Температуры соответствующих точек ветви приведены сверху.

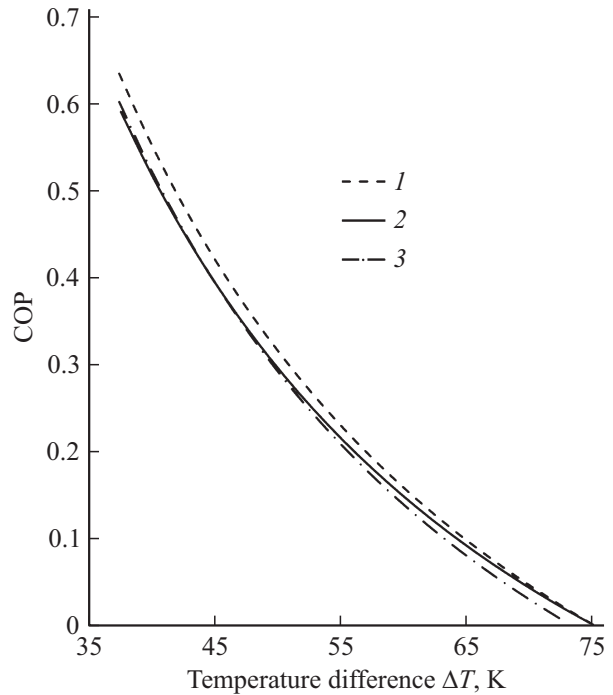


Рис. 2. Холодильный коэффициент (COP — coefficient of performance) составной ветви в сравнении с холодильным коэффициентом простой ветви. 1 —  $\Delta T_{\max}$  для простой ветви соответствует  $\Delta T_{\max}$  составной ветви, 2 — составная ветвь, 3 — ветвь из материала первой секции.

Таким образом, для составной ветви всегда существует область разностей температур, где она проигрывает в величине холодильного коэффициента простой (не составной) ветви, независимо от того, где расположена граница секций, если на горячем конце ветви расположен материал с большей эффективностью, чем на холодном. В простой ветви увеличение максимальной достижимой разности температур связано с ростом  $Z$  и сопровождается увеличением максимального холодильного коэффициента для любых разностей температур. Составная ветвь будет проигрывать в величине холодильного коэффициента во всем диапазоне температур простой ветви, обеспечивающей ту же разность температур, что и составная ветвь. Поэтому для составной ветви рост максимальной разности температур не приводит к росту максимального холодильного коэффициента во всей области температур. Таким образом, кривые тем-

пературных зависимостей максимальных значений холодильного коэффициента для составной и простой ветвей пересекаются. Конкретный вид кривой и положение точки пересечения для секционированной ветви определяются соотношением термоэлектрических параметров секций. В качестве примеров на прилагаемых рис. 1, 2 приведено сравнение максимального холодильного коэффициента в зависимости от разности температур для составной и простой ветвей.

### 3. Заключение

Приведенное рассмотрение холодильного коэффициента для составной ветви показывает, что максимальная разность температур не может служить для такой ветви ориентиром на свойства во всем диапазоне температур. Характеристики составной ветви оказываются хуже характеристик простой ветви, обеспечивающей такую же величину  $\Delta T_{\max}$ . Поэтому составная ветвь имеет перспективы использования только в узком диапазоне температур вблизи  $\Delta T_{\max}$ . Большинство применений термоэлектрических модулей связано с их работой при температурах вне этого диапазона, поэтому составная ветвь с этой точки зрения имеет мало перспектив по вытеснению простой ветви в массовом производстве.

### Список литературы

- [1] А.Л. Вайнер, Н.В. Колomoец, Э.М. Лукишкер, В.М. Ржевский. ФТП, **11**, 546 (1977).
- [2] И.А. Драбкин. ФТП, **51**, 952 (2017).
- [3] I. Drabkin. *Optimization of Thermoelectric Cooling and Generator Batteries* (LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017).

Редактор Л.В. Шаронова

### Coefficient of performance of segmented cooling thermoelectric leg

I.A. Drabkin

RMT Ltd,  
115230 Moscow, Russia

**Abstract** One of the main energy characteristics of a cooling leg is the maximum available temperature difference ( $\Delta T_{\max}$ ). The increase of  $\Delta T_{\max}$  involves growth of coefficient of performance (COP) maximum at all temperatures. The use a segmented leg allows to increase  $\Delta T_{\max}$ , however the maximum achievable COP increases only at large temperature differences, and at small temperature differences the maximum COP is even less than that in a simple leg.