10

Акустический аналог электродинамических правил сохранения

© Н.Н. Розанов

Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова, Санкт-Петербург, Россия
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nnrosanov@mail.ru

Поступило в Редакцию 14 января 2019 г.
В окончательной редакции 14 января 2019 г.
Принято к публикации 15 января 2019 г.

В рамках линейной акустики на основе линеаризованных уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости представлены и обсуждены правила сохранения для интегральных характеристик акустического возмущения.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.07.47535.17702

Законы сохранения, истоки которых лежат, по-видимому, в трудах античных философов, играют особую роль в современной физике. В механике наиболее важны законы сохранения импульса, энергии и момента импульса [1]. Естественно, что в средах или системах с диссипацией эти законы нарушаются: трение останавливает и поступательное, и вращательное движение и ведет к убыванию энергии. Для полей, например электромагнитного и акустического, также хорошо известны законы сохранения, аналогичные механическим, и они также справедливы в случае консервативных (недиссипативных) сред [2,3]. Эти основные законы сохранения связаны со свойствами симметрии среды или системы относительно различных преобразований в соответствии с теоремой Нетер [4]. Эта теорема применима к системам, характеризующимся лагранжианом, т. е. во всяком случае к консервативным системам.

Попытки вывода законов сохранения для неконсервативных систем различной природы проводились в ряде работ [5–8], в том числе применительно к акустике [9]. Для подхода [9] характерен выбор сохраняющихся величин в квадратичной или билинейной по амплитудам полей форме, т. е. величин энергетического типа. Кроме того, такой подход справедлив для дискретных систем, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В то же время в электродинамике известны сохраняющиеся для диссипативных систем линейные по напряженностям полей интегральные величины [10,11]. Задачей настоящей работы служит выяснение вопроса о наличии аналогичных сохраняющихся величин в линейной акустике, что может представлять не только принципиальный, но и прикладной интерес [12].

Исходим из уравнения Навье–Стокса, считая скорость жидкости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ много меньшей по модулю скорости звука [13]:

$$\rho\,\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, t — время, x_i $(i = 1, 2, 3)$ — декартовы координаты, p — давление, η и ξ — коэффициенты вязкости; подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Традиционно разделяем исходное невозмущенное движение (отмечается индексом 0) и малое акустическое возмущение: $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}'\,(\mathbf{v}_0 = 0), \ldots$. Тогда из (1) в первом порядке по возмущениям следует

$$\rho_0\,\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi\,\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right). \tag{2}$$

Будем считать, что для невозмущенной жидкости ее плотность не зависит от времени, $\partial\rho_0/\partial t = 0$, а возмущение в каждый момент времени локализовано в конечной области (асимптотически, на периферии жидкость неподвижна и возмущение давления отсутствует). Тогда, проинтегрировав (2) по объему, приходим к соотношению

$$\frac{d\mathbf{P}_a}{dt} = 0, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{P}_a = \iiint \rho_0\,\mathbf{v}\,dV \tag{4}$$

— сохраняющийся в вязкой жидкости интегральный акустический импульс. Заметим, что для одномерного движения (плоские волны) интегральный импульс (4) сохраняется и при учете нелинейного члена в уравнении Навье–Стокса (1). Естественное убывание со временем максимальной скорости движения жидкости сочетается с диффузионным расплыванием области, затронутой возмущением, что и обеспечивает указанное правило сохранения.

При интегрировании (2) по времени (в бесконечных пределах) в оправданном в линейном приближении пренебрежении временны́м изменением коэффициентов вязкости найдем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi\,\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right) = \frac{\partial P'}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Здесь введены интегральные величины скорости и давления

$$\mathbf{V} = \int \mathbf{v}\,dt, \quad P' = \int p'\,dt. \tag{6}$$

Для одномерного движения форма (5) упрощается:

$$\frac{d}{dx}\left[P' - \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right)\frac{dV}{dx}\right] = 0, \tag{7}$$

т.е.

$$P' - \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right)\frac{dV}{dx} = \text{const}. \tag{8}$$

Соотношение (8) устанавливает связь между интегральными величинами давления и градиента скорости в акустической волне.

Заметим, что из дополнительных — термодинамических — соображений следует, что коэффициент поглощения звука при низких частотах пропорционален квадрату частоты [13]. Поэтому с уменьшением частоты поглощение звука убывает. Сохранение в вязкой жидкости интегрального акустического импульса (4), который интерпретируется как нуль-частотная компонента акустического импульса, согласуется с отсутствием поглощения низкочастотного звука.

Ограничением данного рассмотрения служит пренебрежение шумовыми (флуктуационными) явлениями теплового характера.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Физматлит, 1965. 204 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Физматлит, 1973. 400 с.
[3] *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматлит, 1961. 563 с.
[4] *Noether E.* // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1918. V. 2. P. 235–257.
[5] *Bessel-Hagen E.* // Math. Annals. 1921. V. 84. P. 258–276.
[6] *Honein T., Chien N., Herrmann G.* // Phys. Lett. A. 1991. V. 155. P. 223–224.
[7] *Котоусов А.Т., Махутов Н.А.* // ДАН. 1996. Т. 351. № 4. С. 476–478.
[8] *Бобровницкий Ю.И.* // ДАН. 2004. Т. 395. № 1. С. 43–46.
[9] *Бобровницкий Ю.И.* // Акуст. журн. 2005. Т. 51. В. 1. С. 59–67.
[10] *Розанов Н.Н.* // Оптика и спектроскопия. 2009. Т. 107. В. 5. С. 761–765.
[11] *Розанов Н.Н., Архипов Р.М., Архипов М.В.* // УФН. 2018. Т. 188. В. 12. С. 1347–1353.
[12] *Андреев С.Г., Бабкин А.В., Баум Ф.А., Имховик Н.А., Кобылкин И.Ф., Колпаков В.И., Ладов С.В., Одинцов В.А., Орленко Л.П., Охитин В.Н., Селиванов В.В., Соловьев В.С., Станюкович К.П., Челышев В.П., Шехтер Б.И.* Физика взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. Изд. 3-е, перераб. М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 832 с. Т. 2. 644 с.
[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Физматлит, 1986. 733 с.