01

Зависимость самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из металла от механизма поверхностного рассеяния электронов

© Э.В. Завитаев,[1] К.Е. Харитонов,[1] А.А. Юшканов[2]

[1] Государственный гуманитарно-технологический университет,
142611 Орехово-Зуево, Московская обл., Россия
[2] Московский государственный областной университет,
141014 Москва, Россия
e-mail: EduardZavitaev@yandex.ru

Поступило в Редакцию 14 июля 2018 г.
В окончательной редакции 19 ноября 2018 г.
Принято к публикации 3 декабря 2018 г.

Выполнен расчет самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки из металла. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к радиусу проволоки может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие, учитывающее зависимость коэффициента зеркальности от дефектов поверхности и угла падения электронов на внутреннюю поверхность проволоки.

DOI: 10.21883/JTF.2019.05.47462.275-18

В последнее время наблюдается растущий интерес к электромагнитным свойствам систем, включающих в себя металлические проволоки малого радиуса [1–5]. Электромагнитные свойства таких систем определяются такими свойствами проволок как электропроводность и индуктивность. Для проволок, радиус которых существенно превышает длину свободного пробега электронов внутри объемного образца, эти характеристики могут быть найдены с использованием макроскопической электродинамики [6].

В то же время электрические свойства проволок, радиус которых сравним с длиной свободного пробега электронов Λ, существенно отличаются от свойств „массивных“ проволок [7–9].

Вопросы, касающиеся расчета электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки из металла, обсуждались в работах [7,9]. Магнитная индукция внутри такой проволоки определялась в работе [9]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана, для электронов в металле.

В настоящей работе рассматривается цилиндрическая проволока из немагнитного металла (относительная магнитная проницаемость $\mu \approx 1$) радиуса R и длины D (будем считать, что $D \gg R$), к концам которой приложено переменное электрическое напряжение частоты ω. Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью цилиндра. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $R < \gamma$ — глубины скин-слоя).

Однородное периодическое по времени электрическое поле, вектор напряженности которого $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\exp(-i\omega t)$, воздействует на электроны проводимости внутри проволоки и вызывает появление внутри нее высокочастотного тока с плотностью $\mathbf{j}$.

Проведем расчет самоиндукции, обусловленной магнитным полем внутри проволоки.

Как известно, самоиндукция L — это коэффициент пропорциональности между магнитным потоком Φ и силой тока I, создающей магнитное поле [6]:

$$\Phi = LI \Longrightarrow L = \frac{\Phi}{I}. \quad (1)$$

Если тонкую цилиндрическую проволоку разрезать по оси OO' (рис. 1), то видна элементарная площадка dS, по которой следует интегрировать при вычислении магнитного потока во внутренней области. На рис. 1 крестиками указано направление силовых линий вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ при условии, что плотность тока направлена вдоль оси Z, направление которой совпадает с осью проволоки.

Запишем формулу для расчета магнитного потока Φ через элементарную площадку проводника dS:

$$\Phi = \int B dS,$$

где $dS = Ddr = DRd\delta$, $\delta = r/R$ — „безразмерный радиус индукции“ (r — радиальная координата электронов).

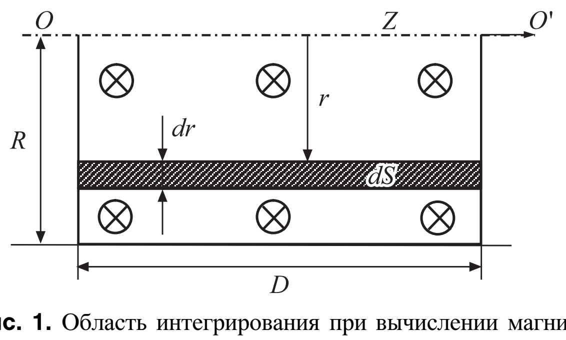

Рис. 1. Область интегрирования при вычислении магнитного потока Φ внутри проволоки.

Тогда

$$\Phi = \int_0^1 B(\delta)dS = DR\int_0^1 B(\delta)d\delta. \qquad (2)$$

Выражение для магнитной индукции B внутри проволоки, где в качестве граничного условия используется зависимость коэффициента зеркальности q от дефектов поверхности H и угла падения электронов θ на внутреннюю поверхность проволоки (модель Соффера), получено в работе [10]. Данное граничное условие можно записать в следующем виде:

$$q(H, \cos\theta) = \exp\left(-(4\pi H)^2 \cos^2\theta\right),$$

$$\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad H = \frac{h_s}{\lambda_F},$$

где h_s — среднеквадратичная высота поверхностного рельефа, λ_F — длина волны де-Бройля электрона на поверхности Ферми.

Тогда

$$B = \frac{3\mu_0 n e^2 R^2 E_z}{\pi v_F m\delta}\int_0^\delta\int_0^1\int_0^\pi \frac{\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\nu}$$

$$\times\left(\frac{(\exp(-(4\pi H)^2\cos^2\theta)-1)\exp(-\nu\eta/\rho)}{1-\exp(-(4\pi H)^2\cos^2\theta)\exp(-\nu\eta_0/\rho)}+1\right)\xi d\xi d\rho d\alpha, \qquad (3)$$

где

$$\xi = \frac{r}{R}, \qquad \rho = \frac{v_\perp}{v_F}, \qquad \nu = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\frac{R}{v_F},$$

$$\eta = \xi\cos\alpha + \sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}, \qquad \eta_0 = 2\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}$$

Здесь μ_0 — магнитная постоянная вакуума; n, e, m — соответственно концентрация, заряд и масса электронов; $v_\perp$ — радиальная составляющая скорости электронов, v_F — скорость Ферми; τ — электронное время релаксации.

Подставив (3) в (2), получим формулу для вычисления магнитного потока Φ:

$$\Phi = \frac{\mu_0 n e^2 R^3 E_z D}{v_F m}J_\Phi, \qquad (4)$$

где

$$J_\Phi = \frac{3}{\pi}\int_0^1\int_0^\delta\int_0^1\int_0^\pi \frac{\xi\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\delta\nu}$$

$$\times\left(\frac{(\exp(-(4\pi H)^2\cos^2\theta)-1)\exp(-\nu\eta/\rho)}{1-\exp(-(4\pi H)^2\cos^2\theta)\exp(-\nu\eta_0/\rho)}+1\right)d\delta d\xi d\rho d\alpha.$$

Выражение для силы тока I через поперечное сечение тонкой цилиндрической проволоки с граничными условиями Соффера было получено в работе [8]:

$$I = \frac{ne^2R^3E_z}{v_F m}J_I, \qquad (5)$$

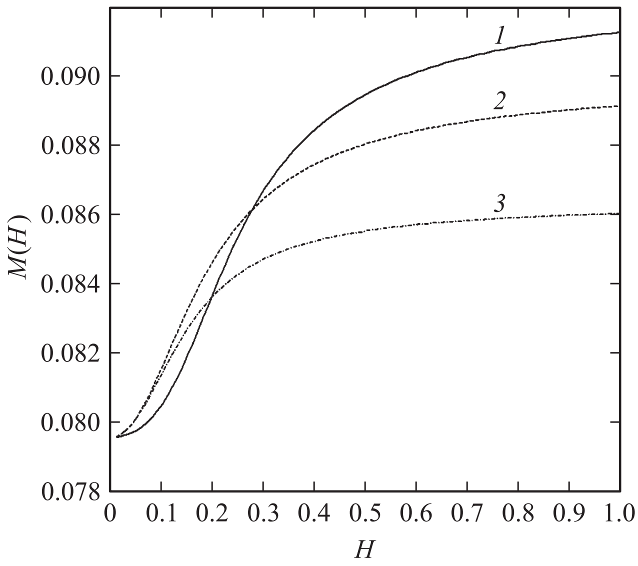

Рис. 2. Зависимость модуля M безразмерной самоиндукции от безразмерного „параметра шероховатости поверхности“ H при фиксированном значении безразмерной частоты внешнего поля Ω и при различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов Ψ: *1* — ($\Omega = 1$, $\Psi = 0.1$), *2* — ($\Omega = 1$, $\Psi = 1$), *3* — ($\Omega = 1$, $\Psi = 3$).

где

$$J_I = \int_0^1\int_0^1\int_0^\pi \frac{\xi\rho\sqrt{1-\rho^2}}{\nu}$$

$$\times\left(\frac{(\exp(-(4\pi H)^2\cos^2\theta)-1)\exp(-\nu\eta/\rho)}{1-\exp(-(4\pi H)^2\cos^2\theta)\exp(-\nu\eta_0/\rho)}+1\right)d\xi d\rho d\alpha.$$

Поделив (4) на (5), найдем искомую самоиндукцию L, обусловленную магнитным полем внутри проволоки

$$L = \mu_0 D\frac{J_\Phi}{J_l}. \qquad (6)$$

Следует подчеркнуть, что самоиндукция является комплексной величиной, для которой физический смысл, кроме модуля (абсолютной величины), имеет также и аргумент (фаза), задающий угол между радиус-вектором соответствующей точки и положительной вещественной полуосью в „комплексной плоскости самоиндукции“.

Значимость расчета коэффициента самоиндукции для реальных объектов обусловлена тем, что через него можно определить такую важную величину, как собственная энергия магнитного поля тока [6], необходимую, например, для описания поверхностных плазмонов в цилиндрических проводниках.

Заметим, что самоиндукция, вызванная магнитным полем вне проволоки, не зависит от характера распределения тока по ее сечению и имеет логарифмическую расходимость.

В случае, когда радиус проволоки R значительно превышает длину свободного пробега электронов Λ

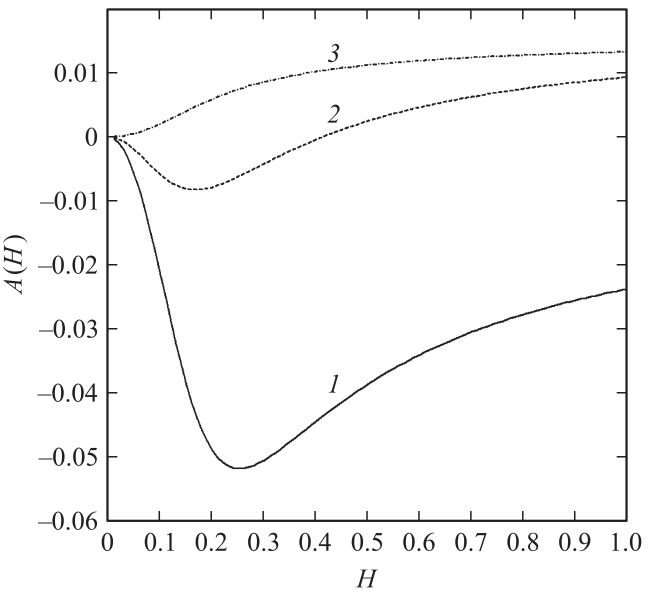

Рис. 3. Зависимость аргумента A самоиндукции L от безразмерного „параметра шероховатости поверхности“ H при фиксированном значении безразмерной частоты внешнего поля Ω и при различных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов Ψ: *1* — ($\Omega = 1$, $\Psi = 0.1$), *2* — ($\Omega = 1$, $\Psi = 1$), *3* — ($\Omega = 1$, $\Psi = 3$).

$(R \gg \Lambda)$, из (6) можно получить макроскопическую асимптотику самоиндукции L_m, обусловленной магнитным потоком внутри проволоки. После проведения несложных вычислений имеем

$$L_m = \frac{\mu_0 D}{4\pi}.$$

На рис. 2 представлена зависимость модуля M безразмерной самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки $L/\mu_0 D$ от безразмерного „параметра шероховатости поверхности“ H. Рисунок выполнен для случая фиксированной безразмерной частоты внешнего поля $\Omega = \omega R/v_F$, при этом отношение радиуса проволоки к безразмерной обратной длине свободного пробега электронов $\Psi = R/\Lambda$ разное для каждой кривой. Из анализа хода кривых следует, что с увеличением параметра шероховатости модуль самоиндукции плавно возрастает, достигая своего асимптотического значения, которое определяется безразмерной обратной длиной свободного пробега электронов Ψ.

На рис. 3 представлена зависимость аргумента A самоиндукции тонкой цилиндрической проволоки L от безразмерного „параметра шероховатости поверхности“ H. При этом безразмерная частота внешнего поля Ω и безразмерная обратная длина свободного пробега электронов Ψ для кривых такие же, как на предыдущем рисунке. При условии, что радиус проволоки не превосходит длину свободного пробега электронов $(R \leq \Lambda)$ аргумент самоиндукции имеет минимум, который сглаживается по мере увеличения радиуса. Дальнейшее его увеличение, когда выполняется условие $R > \Lambda$, приводит к изменению знака аргумента.

Таким образом, учет зависимости коэффициента зеркальности металла от дефектов поверхности и угла падения электронов на внутреннюю поверхность тонкой проволоки позволяет выявить целый ряд особенностей коэффициента самоиндукции, которые не характерны для макроскопических проволок.

Список литературы

[1] *Op't Root W.P.E.M., Brussaard G.J.H., Smorenburg P.W., Luiten O.J.* // Nat. Commun. 2016. Vol. 7. P. 13769.

[2] *Yang J., Cao Q., Zhou C.* // Opt. Express. 2009. Vol. 17. N 23. P. 20806–20815.

[3] *Maier S.A., Andrews S.R., Martin-Moreno L., Garcia-Vidal F.J.* // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 176805 (1–4).

[4] *Manjavacas A., Garcia de Abajo F.J.* // Opt. Express. 2009. Vol. 17. N 22. P. 19401–19413.

[5] *Neubrech F., Kolb T., Lovrincic R., Fahsold G., Pucci A., Aizpurua J., Cornelius T.W., Toimil-Molares M.E., Neumann R., Karim S.* // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 89. P. 253104 (1–3).

[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2016. 656 с.

[7] *Завитаев Э.В., Юшканов А.А.* // Микроэлектроника. 2008. Т. 37. № 6. С. 429–438.

[8] *Кузнецова И.А., Чапкин А.В., Юшканов А.А.* // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 1. С. 45–51.

[9] *Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е.* // Вестник МГОУ. Серия Физика–Математика. 2016. № 2. С. 74–84.

[10] *Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е.* // Современные проблемы физико-математического образования. Сборник материалов VI Междунар. заочной научно-практической конф. Орехово-Зуево, 12 декабря 2016 г. С. 51–53.