

Ударная электромагнитная волна большой амплитуды в нелинейной линии передачи на основе распределенного полупроводникового диода

© А.С. Кюреган

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина,
111250 Москва, Россия

E-mail: semlab@yandex.ru

(Получена 23 октября 2017 г.)

Принята к печати 29 сентября 2018 г.

Принята к публикации 29 октября 2018 г.)

Получено аналитическое решение задачи о возникновении и распространении ударной электромагнитной волны большой амплитуды в полосковой линии передачи на основе распределенного полупроводникового диода, которое корректно учитывает ее нелинейность, диссипацию и временную дисперсию. Результаты теории использованы для оценки параметров линии передачи как обострителя фронта импульса напряжения, подаваемого на вход линии.

DOI: 10.21883/FTP.2019.04.47452.8752

1. Введение

Давно известно, что в нелинейных линиях передачи (ЛП) при определенных условиях возникают ударные электромагнитные волны, которые используются, в частности, для формирования импульсов напряжения с крутыми фронтами [1–6]. Нелинейными элементами могут быть распределенные вдоль линии индуктивность L , зависящая от тока I при использовании ферритов, и(или) емкость C , зависящая от напряжения U при использовании ферроэлектриков, полупроводниковых МДП-структур, диодов с барьером Шоттки или с $p^+ - n$ -переходом. Именно этот последний вариант ЛП теоретически исследован в настоящей работе применительно к проблеме обострения импульсов напряжения большой амплитуды.

Такую ЛП можно представить в виде множества последовательно соединенных ячеек, эквивалентная схема которых изображена на рис. 1, *a*. Распространение по ней электромагнитной волны вдоль оси z описывается при известных [7] условиях системой телеграфных уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} + R_L I = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial t} + GU = 0, \quad (1)$$

где $I = I(t, z)$ — ток вдоль линии, L и R_L — постоянные погонные индуктивность и сопротивление линии, G^{-1} — погонное сопротивление утечки. Нелинейность соотношения между напряжением $U = U(t, z)$ и погонной плотностью заряда $Q = Q(t, z)$ линии является причиной возникновения ударной волны. Среди использованных ранее соотношений наиболее общее и подходящее для нашего случая было предложено авторами работы [8]. Его можно представить в виде двух равенств:

$$U = Q/C_w(Q) + U_n, \quad U_n = R_n \partial(Q - C_n U_n) / \partial t, \quad (2)$$

где C_w — барьерная емкость диода, U_n — падение напряжения на емкости C_n и сопротивлении R_n —

нейтральной области n -слоя диода (см. рис. 1, *b*). Авторы остальных известных нам работ [1,2,9–13] либо использовали неподходящие для нашего случая зависимости $C_w(Q)$, либо пренебрегали величинами C_n и(или) R_n , а те, кто их учитывал (в том числе и авторы работы [8]), полагали C_n и R_n постоянными. На самом деле при большой амплитуде волны величины R_n и C_n явно зависят от времени из-за уменьшения толщины $(d - w)$ нейтральной области n -слоя, а R_n зависит еще и от плотности тока $J = \partial Q / \partial t$, протекающего поперек ЛП, вследствие уменьшения подвижности электронов с ростом напряженности электрического поля.

Способ учета этих особенностей, позволяющий корректно описать нелинейность, диссипацию и временную дисперсию активного n -слоя диода, изложен в разд. 2 настоящей статьи. В разд. 3 дано аналитическое описание реальной структуры фронта стационарной ударной волны в ЛП на основе распределенного диода, в разд. 4 описаны процессы формирования и затухания ударной волны при подаче на вход ЛП относительно медленно нарастающего напряжения, а в Заключение дана оценка параметров ЛП как обострителя фронта импульса напряжения.

2. Нелинейность и временная дисперсия диодов

Рассмотрим полосковую линию передачи, состоящую из протяженного вдоль оси z обратно смещенного $p^+ - n - n^+$ -диода, поперечное сечение которого схематически изображено на рис. 1, *b*. Будем считать, что:
– n^+ -подложка толщиной d_s однородно легирована донорами с концентрацией N_s ,
– активная n -область толщиной d однородно легирована донорами с концентрацией $N \ll N_s$,
– p^+ -слой (на рисунке не показан) толщиной $d_p \ll d$ легирован акцепторами с концентрацией $N_p \gg N$,

Таблица 1. Подгоночные параметры, входящие в формулы (5) и (7), для Si и 4H-SiC

Параметр	v_e , см/мкс	E_e , кВ/см	E_1 , кВ/см	E_2 , кВ/см	E_i , МВ/см	U_i , В
Si	10.0	7.1	∞	∞	1.43	1.83
4H-SiC	18.5	21	900	550	15.9	1.15

– ширина полоски l и толщина фронта δ_f ударной волны, распространяющейся по линии, много больше $(d + d_s)$,

– проводимость G истощенной области полупроводника $(0 < x < w)$ пренебрежимо мала.

Тогда поперечное электрическое поле E в n -области практически не зависит от y , а вдоль оси x распределено так, как изображено на рис. 1, *с*. Разность потенциалов между электродами $U(t, z)$, включающая и контактную разность потенциалов, связана с напряженностями $E_0(t, z)$, $E_n(t, z)$, $E_s(t, z)$ в плоскостях $x = 0$, $x = d$, $x = d + d_s$ и с толщиной истощенной области $w(t, z)$ очевидными соотношениями:

$$U = (E_0 - E_n) \frac{w}{2} + E_n d + E_s d_s, \quad (3)$$

$$E_0 = \frac{e}{\epsilon} N w + E_n, \quad (4)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость полупроводника, e — элементарный заряд. Далее для определенности мы будем считать, что в статическом случае (т.е. при $E_n = E_s = 0$) $w = d$, и $E_0 = E_B = eNd/\epsilon$ при $U = U_B$, где U_B — напряжение лавинного пробоя, связанное с d и E_B соотношениями

$$U_B = E_B d / 2, \quad E_B = E_i / \ln(U_B / U_i), \quad (5)$$

E_i и U_i — подгоночные параметры, приведенные в табл. 1 для Si [14] и 4H-SiC [15].

Электрические поля E_n , E_s в областях $w < x < d$, $d < x < d + d_s$ не зависят от x и обусловлены протекающим через них током с линейной плотностью

$$J = \frac{\partial Q}{\partial t} = l \epsilon \frac{\partial E_0}{\partial t} = l \left[e N v(E_n) + \epsilon \frac{\partial E_n}{\partial t} \right] = l e N_s \mu_{es} E_s, \quad (6)$$

где $Q(t, z) = l \epsilon E_0(t, z)$ — погонная плотность заряда в плоскости $x = 0$, $v(E)$ — дрейфовая скорость электронов, для которой мы будем использовать аппроксимацию

$$v(E) = v_e \frac{1 + (E/E_1)^2}{E_e/E + 1 + (E/E_2)^2}, \quad (7)$$

$v_e = \mu_e E_e$, μ_e и μ_{es} — низкополевые подвижности электронов в n -области и подложке. Она хорошо описывает реальные зависимости $v(E)$ в Si [14] (где скорость практически постоянна в сильном поле) и 4H-SiC [15] (где

скорость уменьшается с ростом E при $E > 200$ кВ.см) при значениях подгоночных параметров, приведенных в табл. 1.

Первое слагаемое в квадратных скобках формулы (6) соответствует току проводимости через сопротивление R_n , а второе — току смещения через емкость C_n . Так как обычно $N_s \gg N$, в подложке можно пренебречь током смещения и снижением подвижности в поле $E_s \ll E_e$. Из (4) и (6) следует, что

$$\partial w / \partial t = v(E_n), \quad (8)$$

т.е. граница $x = w$ между истощенной и нейтральной областями n -слоя движется со скоростью $v(E_n)$, изменяя тем самым эффективные значения R_n и $C_{w,n}$. Формулы

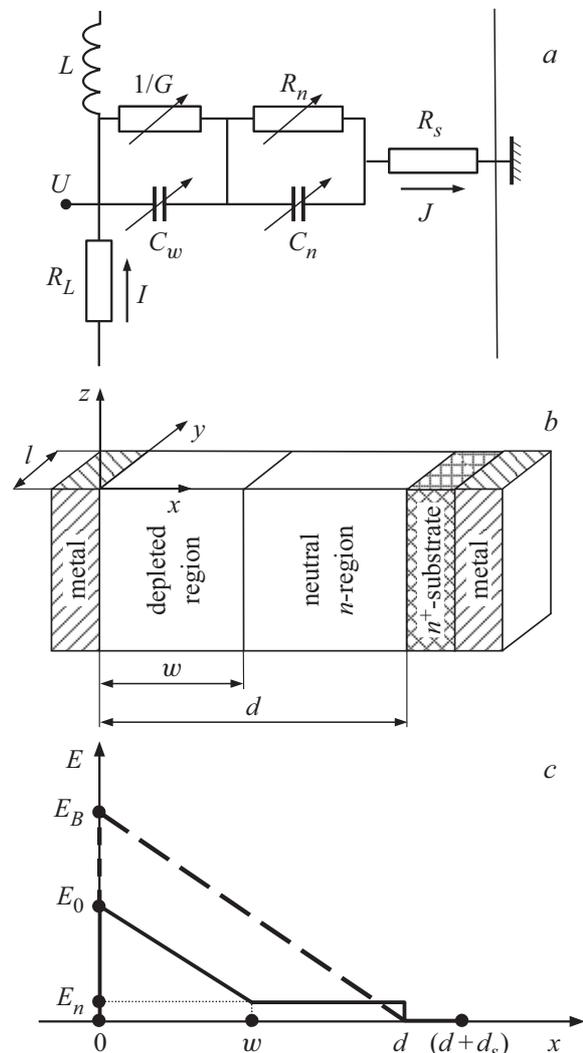


Рис. 1. Эквивалентная схема ячейки нелинейной линии передачи (*а*), поперечное сечение полоскового диода (*б*) и распределение электрического поля в $p^+ - n - n^+$ -структуре (*с*). C_w и G — емкость и проводимость истощенной области полупроводника $(0 < x < w)$, C_n и R_n — емкость и сопротивление нейтральной области n -слоя $(w < x < d)$, R_s — сопротивление подложки $(d < x < d_s)$. Тонкий p^+ -слой не показан.

(3)–(6) и (8) задают в неявном виде соотношение между U и Q и являются аналогом равенств (2), однако только они корректно и исчерпывающе описывают особенности нелинейности, диссипации и временной дисперсии активного n -слоя диода.

3. Стационарная ударная волна

Стационарная ударная волна, строго говоря, может существовать только в бесконечно длинной ЛП с пренебрежимо малыми сопротивлением R_L и проводимостью G . В этом случае в системе координат $\tilde{z} = z - u_f t$, движущейся вместе с фронтом с постоянной скоростью u_f , уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{z}} - Lu_f \frac{\partial I}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \tilde{z}} - u_f \frac{\partial Q}{\partial \tilde{z}} = 0. \quad (9)$$

Интегрирование (9), с граничными условиями

$$U(\pm\infty) = U_{\pm}, \quad Q(\pm\infty) = Q_{\pm}, \quad I(\pm\infty) = 0 \quad (10)$$

приводит к соотношениям

$$Q(\tilde{z}) - Q_+ = \bar{C}[U(\tilde{z}) - U_+], \quad U(\tilde{z}) - U_+ = Lu_f I(\tilde{z}), \quad (11)$$

где эффективная погонная емкость

$$\bar{C} = \frac{Q_- - Q_+}{U_- - U_+} = \frac{\epsilon l}{w}, \quad (12)$$

$$\bar{w} = (w_+ + w_-)/2, \quad w_{\pm} = 2U_{\pm}/E_{\pm}, \quad E_{\pm} = E_B \sqrt{U_{\pm}/U_B} = Q_{\pm}/l\epsilon.$$

Далее мы будем считать, что параметры подложки N_s , d_s таковы, что выполняются два сильных неравенства:

$$E_s d_s \ll E_n d \quad \text{и} \quad d_s \ll h_s = 2\sqrt{t_f/\mu_0\sigma_s}, \quad (13)$$

где h_s — глубина проникновения магнитного поля в подложку с проводимостью $\sigma_s = e\mu_{es}N_s$ за время $t_f = \delta_f/u_f$ нарастания тока на фронте волны, μ_0 — магнитная постоянная. В этом случае диссипация в подложке пренебрежимо мала, погонная индуктивность линии $L = \mu_0(d + d_s)/l$ и скорость фронта

$$u_f = (L\bar{C})^{-1/2} = c_s \sqrt{\frac{\bar{w}}{d + d_s}} \quad (14)$$

могут быть значительно меньше скорости света $c_s = 1/\sqrt{\epsilon\mu_0}$ в полупроводнике [16–21]. Волновое сопротивление такой линии равно

$$Z = \frac{U(\tilde{z}) - U_+}{I(\tilde{z})} = \sqrt{\frac{L}{\bar{C}}} = Z_s \frac{\sqrt{\bar{w}(d + d_s)}}{l}, \quad (15)$$

где $Z_s = \sqrt{\mu_0/\epsilon} \approx 110$ Ом в кремнии.

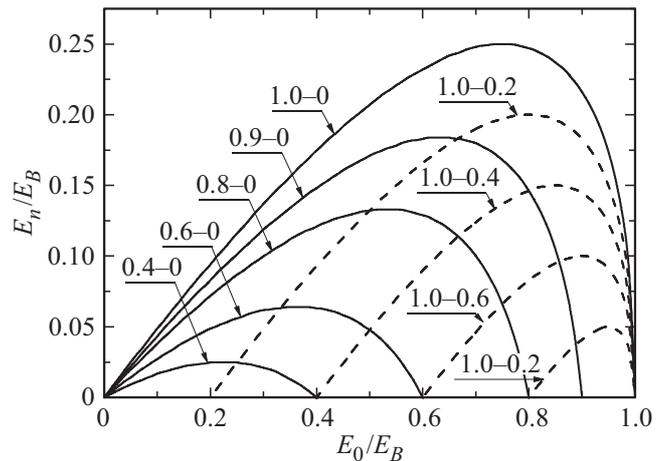


Рис. 2. Графики функции $E_n(E_0)$, рассчитанные по формуле (16). Числа у кривых указывают значения отношений E_-/E_B (первое) и E_+/E_B (второе).

Используя (3) без малого слагаемого $E_s d_s$ вместе с первым из равенств (11), легко показать, что при этих условиях

$$E_n(E_0) = E_0 - E_B + \sqrt{(E_B - E_0)^2 + (E_- - E_0)(E_0 - E_+)}, \quad (16)$$

$$U(E_0) = U_B E_B^{-2} [E_0(E_+ + E_-) - E_+ E_-]. \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, при $E_0 \rightarrow E_{\pm}$ (т.е. вдали от фронта, где $J \rightarrow 0$) $U_0 \rightarrow U_{\pm}$, а напряженность поля $E_n \rightarrow 0$ и достигает максимума

$$\hat{E}_n = \frac{\bar{E}^2}{2(E_B - \bar{E})} \quad (18)$$

на фронте при

$$E_0 = \hat{E}_0 = \frac{E_B E_+ + E_B E_- - E_+ E_- - \bar{E}^2}{2(E_B - \bar{E})}, \quad (19)$$

где $\bar{E} = (E_+ + E_-)/2$. Зависимости $E_n(E_0)$ приведены на рис. 2. Видно, что при больших U_- и малых U_+ максимальная напряженность поля в нейтральной области n -слоя значительно превосходит величину $E_e \leq 0.1E_B$, при которой зависимость $v(E)$ начинает отличаться от линейной. Из формул (4) и (16) можно получить максимальное значение \hat{U}_n падения напряжения на нейтральной части n -слоя $U_n = E_n(d - w)$. Точная формула очень громоздкая, поэтому мы приводим здесь приближенную формулу $\hat{U}_n = 4U_-/27$ для случая $U_+ = 0$, которая обеспечивает погрешность менее 15% и дает точное значение \hat{U}_n при $U_- = U_B$.

В движущейся системе координат уравнение (6) принимает вид

$$u_f \frac{\partial(E_0 - E_n)}{\partial E_0} \frac{\partial E_0}{\partial \tilde{z}} + \frac{E_B}{d} v[E_n(E_0)] = 0 \quad (20)$$

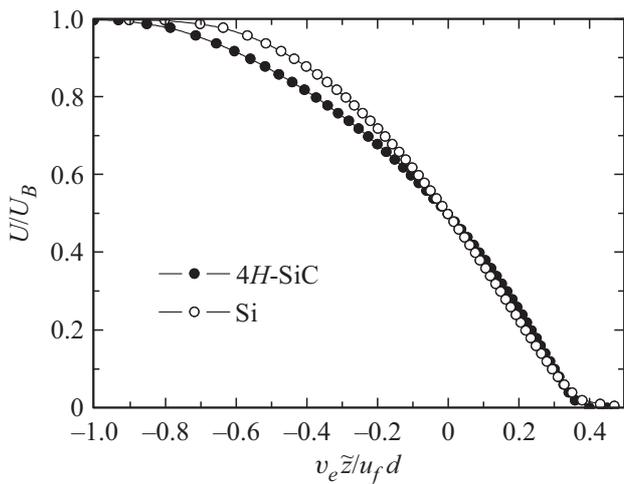


Рис. 3. Распределения напряжения U на фронте ударной волны в кремниевой (светлые символы) и карбид-кремниевой (темные символы) линиях, рассчитанные по формулам (17) и (21) при $U_- = U_B$ и $U_+ = 0$.

и интегрируется с учетом (16) при любой зависимости $v(E)$:

$$\tilde{z} = u_f d \int_{E_0}^{\bar{E}} \frac{(1 - \bar{E}/E_B) dE}{v[E_n(E)] \sqrt{(E - E_B)^2 + (E_- - E)(E - E_+)}} \quad (21)$$

начало координат на оси \tilde{z} выбрано в точке, где $E_0 = \bar{E}$. Примеры распределений напряжения U вдоль линии, рассчитанной по формулам (17), (21), приведены на рис. 3. Как видно, структуры фронта в ЛП на основе Si и 4H-SiC практически совпадают, несмотря на существенное различие между типами зависимостей $v(E)$ в этих материалах. Если $E_- < E_B$, то интеграл (21) в расходитсся логарифмически при $E_0 \rightarrow E_{\pm}$, так как при этом $v(E_n) \propto |E_0 - E_{\pm}|$. Поэтому при удалении от фронта E_0 приближается к E_{\pm} по закону

$$E_0(\tilde{z}) - E_{\pm} \propto \pm \exp(\mp \tilde{z}/\lambda), \quad (22)$$

где $\lambda = 2u_f t_M \frac{E_B - \bar{E}}{E_- - E_+}$, $t_M = \varepsilon/eN\mu_e$ — время максвелловской релаксации в n -области. Вырожденный случай $E_- = E_B$ отличается тем, что в формуле (22) нужно заменить λ на $\lambda/2$ при $E_0 \rightarrow E_-$. Из (21) следует, что характерное время нарастания напряженности поля на фронте

$$t_f = \frac{E_- - E_+}{u_f} \left. \frac{d\tilde{z}}{dE_0} \right|_{\tilde{z}=0} = \frac{d(E_- - E_+)(E_B - \bar{E})}{E_B v[E_n(\bar{E})]} \sqrt{\frac{2}{(E_B - E_+)^2 + (E_B - E_-)^2}} \quad (23)$$

Примеры зависимостей t_f от U_- , рассчитанные по этой формуле, приведены на рис. 4. Постоянство t_f в Si

и увеличение в 4H-SiC при больших U_- обусловлено соответственно насыщением зависимости $v(E)$ и уменьшением $v(E)$ в сильных полях E_n . Однако характерные скорости нарастания напряжения U_-/t_f на фронте в обоих случаях монотонно увеличиваются с ростом U_- и максимальны при $U_- = U_B$.

При прохождении фронта ударной волны в нейтральной части n -слоя диода рассеивается мощность с линейной плотностью $P_n = lE_n(d - w)eNv(E_n)$. Используя (4) и (6), эту формулу можно представить в виде

$$P_n = ld\varepsilon E_n \left(1 - \frac{E_0 - E_n}{E_B}\right) \left(1 - \frac{\partial E_n}{\partial E_0}\right) \frac{\partial E_0}{\partial t}. \quad (24)$$

Интегрируя (24) по времени с учетом (16), нетрудно получить линейную плотность энергии, рассеянной на фронте после прохождения волны:

$$\omega_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n dt = ld \frac{\varepsilon}{E_B} \left[\frac{(E_B - E_+)^3 - (E_B - E_-)^3}{3} - (E_- - E_+)(E_B - \bar{E})^2 \right]. \quad (25)$$

При $E_+ = 0$ формула (25) упрощается и принимает следующий вид:

$$\omega_n = ld\varepsilon \frac{E_-^3}{12E_B}. \quad (26)$$

Как видно, в этом случае ω_n в $2\sqrt{U_b/U_-}$ раза меньше линейной плотности энергии электрического поля $\omega_- = ld\varepsilon E_-^2/6$ в ЛП, заряженной до напряжения U_- .

Следует отметить неожиданное свойство изучаемой ЛП: величина подвижности электронов и характер ее зависимости от напряженности поля определяют толщину фронта δ_f и время нарастания напряжения t_f

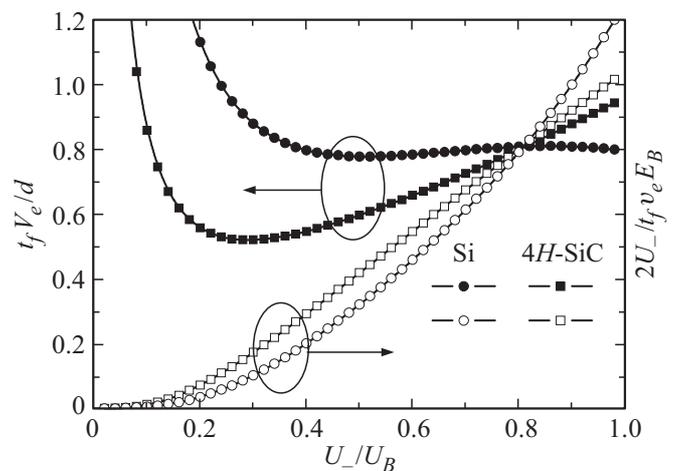


Рис. 4. Зависимости нормированных длительности t_f фронта ударной волны (темные символы) и скорости нарастания напряжения U_-/t_f на фронте (светлые символы) от U_- , рассчитанные по формуле (23) для кремниевой и карбид-кремниевой линий при $U_+ = 0$.

(см. (21)–(23)), но никак не влияют на максимальное падение напряжения \tilde{U}_n и линейную плотность энергии потерь ω_n в нейтральной части n -слоя.

Наибольший практический интерес представляет случай $E_+ = 0$, $E_- = E_B$, когда¹ $t_f \approx \xi d/v_e$ и толщина фронта $\delta_f = u_f t_f \approx \xi c_s d/v_e \sqrt{2\gamma}$, где $\gamma = (1 + d_s/d)$. Используя полученные результаты, можно показать, что в этом случае оба условия (13) выполняются при

$$d_s/d \ll \min \left(\frac{N_s \mu_{es}}{N \mu_e}, \frac{2c_s}{v_e} \sqrt{\xi \frac{N \mu_e E_e}{N_s \mu_{es} E_B}} \right). \quad (27)$$

Правая часть этого неравенства максимальна при

$$\frac{N_s \mu_{ex}}{N \mu_e} = \left[\xi \frac{E_e}{E_B} \left(2 \frac{c_s}{v_e} \right)^2 \right]^{1/3} \equiv \gamma_0, \quad (28)$$

откуда следует соотношение

$$\frac{\delta_f}{d + d_s} \approx \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{E_B}{8E_e}}.$$

Так как обычно $E_e < 0.1E_B$, то при условии (27) или, что то же самое, $\gamma \ll \gamma_0$ выполняется сильное неравенство $\delta_f \gg (d + d_s)$, которое оправдывает применение телеграфных уравнений (1) и одномерных соотношений (3)–(8) для анализа структуры фронта ударной волны.

4. Формирование и затухание ударной волны

Точный учет временной дисперсии и диссипации с помощью формул (3)–(6) и (8) необходим только вблизи фронта, где плотность тока J очень велика и быстро изменяется со временем. При удалении от фронта (при $|\tilde{z}| > \lambda$) плотность тока J и скорость его изменения экспоненциально уменьшаются. Поэтому в формулах (3), (4) можно положить $E_n = E_s = 0$ и использовать вместо них одно простое соотношение

$$\frac{U}{U_B} \equiv V = \left(\frac{Q}{Q_B} \right)^2, \quad (29)$$

которое правильно описывает нелинейность емкости диода. Разумеется, при этом не учитываются дисперсия и диссипация на фронте. Кроме того, для упрощения задачи будем считать погонное сопротивление R_L постоянной величиной, пренебрегая тем самым скин-эффектом в металле электродов. Тогда из (1) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} + (r + g) \frac{\partial q}{\partial \theta} + r g q = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(q \frac{\partial q}{\partial \chi} \right), \quad (30)$$

которое можно использовать для качественного анализа процессов формирования и затухания ударной волны в

¹ Множитель ξ близок к единице; он равен 0.8 для Si и 0.96 для 4H-SiC (см. рис. 4).

ЛП, на вход которой подается медленно нарастающее напряжение. В (30) использованы безразмерные переменные

$$q = Q/Q_B, \quad \theta = t/t_0, \quad \chi = \frac{z}{t_0} \sqrt{\frac{L \bar{C}_B}{2}},$$

параметры $r = t_0 R_L/L$, $g = t_0/\tau_g$, характеризующие диссипацию за фронтом, и учтено, что в обратно смещенных диодах линейная плотность тока утечки $GU = eNlw/\tau_g = Q/\tau_g$, где $\tau_g = t_g N/n_i$, t_g — генерационное время жизни, n_i — собственная концентрация в полупроводнике, $\bar{C}_B = 2\epsilon l/d$. Далее мы будем использовать простейшие начальное и граничное условия

$$q(0, \chi) = 0 \quad \text{и} \quad q(\theta, 0) = \begin{cases} \sqrt{\theta} & \text{при } \theta < 1 \\ 1 & \text{при } \theta > 1 \end{cases}, \quad (31)$$

соответствующие линейному нарастанию напряжения на входе в незаряженную ЛП от нуля до U_B за время t_0 . Обычно параметр $rg/(r+g)^2$, характеризующий относительный вклад в затухание волны двух различных механизмов, очень мал вследствие неравенства $L/R_L \ll \tau_g \sim 1$ мс, поэтому можно считать $g = 0$.

Если еще и сопротивление R_L пренебрежимо мало, то нетрудно [3–6, 22] найти частное решение задачи Коши (30), (31), которое описывает распространение так называемой простой волны [22], возбуждаемой внешним источником напряжения на входе (т.е. при $z = 0$) в незаряженную ЛП:

$$\chi = \sqrt{q}(\theta - q^2). \quad (32)$$

Эта формула применима при $\chi_\theta \leq \chi \leq \chi_f(\theta)$ и $1 \geq q \geq q_f(\theta)$, где $\chi_\theta = \theta H(\theta - 1)$, $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, χ_f и q_f — положение и амплитуда разрыва, который в этом приближении образуется вместо фронта конечной толщины и устраняет нефизичную двужначность зависимости (32) q от χ [22]. Если $t_f \ll t_0$, то сам фронт является квазистационарным, так что для вычисления его структуры и скорости можно использовать соотношения, полученные в предыдущем разделе, полагая $U_- = U_B q_f^2$. В частности, безразмерная скорость разрыва $v_f = \partial \chi_f / \partial \theta$ должна быть равна $\sqrt{q_f/2}$, поэтому дифференцирование (32) по θ при $q = q_f$ приводит к уравнению

$$(\theta - 5q_f^2) \frac{\partial q_f}{\partial \theta} = (2 - \sqrt{2}) q_f,$$

решая которое с начальным условием $q_f(0) = 0$, получим

$$q_f = \sqrt{\frac{\theta}{\chi_1 + 1}}, \quad \chi_f = \chi_1 \left(\frac{\theta}{\chi_1 + 1} \right)^{5/4}, \quad (33)$$

$$q_f = (\chi_f/\chi_1)^{2/5}, \quad (34)$$

где $\chi_1 = 2\sqrt{2}/(5 - 2\sqrt{2}) \approx 1.3$. Формулы (32)–(34) отлично описывают численное решение задачи Коши (30), (31) без учета затухания, приведенное на рис. 5.

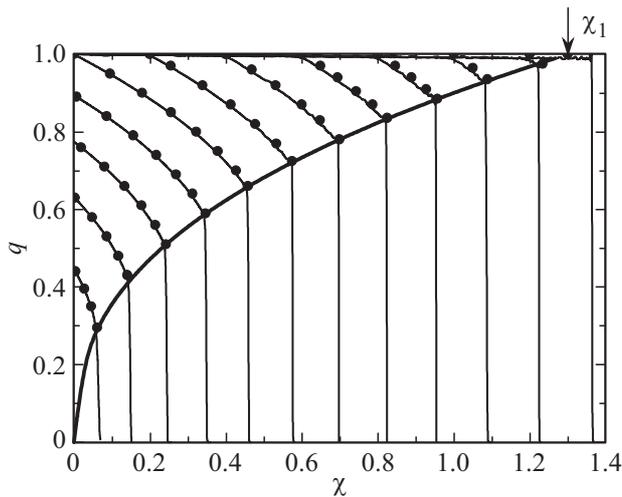


Рис. 5. Профили незатухающей ударной волны в моменты $\theta = 0.2; 0.4 \dots 2.4$ при $r = g = 0$. Тонкие сплошные линии — численное решение задачи Коши (30), (31), темные символы — расчет $q(\theta, \chi)$ по формуле (32), толстая линия — зависимость $q_f(\chi_f)$, рассчитанная по формуле (34).

При $\theta > 1$ появляется область $0 < \chi < \chi_\theta$, в которой $q = 1$, тогда как при $\chi_\theta < \chi < \chi_f$ профиль волны по-прежнему описывается формулой (32). Правая граница χ_θ движется со скоростью $\partial\chi/\partial\theta|_{q=1} = 1$ и догоняет фронт в плоскости $\chi = \chi_1$ в момент $\theta = \theta_1 = 1 + \chi_1$. После этого возникает стационарная волна с амплитудой $q_f = 1$ и безразмерной скоростью фронта $v_f = \sqrt{1/2}$. Используя (26) и (34), нетрудно показать, что за время θ_1 в нейтральной части n -слоя на фронте рассеивается энергия

$$\Omega_1 \equiv \int_0^{\chi_1} \omega_n [q_f(z)] dz = \frac{5}{66} l z_1 \epsilon E_B U_B, \quad (35)$$

которая в 4.4 раза меньше энергии электрического поля ω_{-z_1} , запасенной к этому времени в линии.

При конечном сопротивлении R_L аналитическое решение задачи Коши (30), (31) неизвестно, даже если считать $R_L = \text{const}$. Результаты численного решения вполне ожидаемы: омические потери в электродах приводят к затуханию волны, как это изображено на рис. 6. Амплитуда скачка напряжения достигает максимума $V_m = q_m^2$ при $\chi = \chi_m$ в момент $\theta = \theta_m$. Поэтому оптимальная длина ЛП, используемой для обострения фронта входного импульса, равна $z_m = \chi_m t_0 \sqrt{2/LC_B}$.

Величины χ_m и θ_m очень слабо уменьшаются с ростом r (см. рис. 7) и с достаточной для практических целей точностью могут считаться постоянными и равными χ_1 и θ_1 соответственно. Максимальная амплитуда разрыва $V_m = U_m/U_B$, естественно, тоже уменьшается с ростом r , но медленнее, чем нарастает омическое падение напряжения U_r на электродах между входом в линию и плоскостью $\chi = \chi_m$, равное в рассматриваемом

здесь случае [23]

$$\begin{aligned} \frac{U_r(t_m)}{U_B} &\equiv V_r(\theta_m) = 1 - \frac{1}{r} (e^r - 1) e^{-r\theta_m} \Big|_{t_m \ll t_r} \\ &\approx 4.6 \frac{t_0}{t_r}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $t_r = \sigma_M \mu_0 d_M (d + d_s)$, σ_M и d_M — проводимость и толщина электродов соответственно. Причина этого состоит в том, что затухание приводит к уменьшению со временем тока I вдоль линии, так что второе слагаемое в (1) частично компенсирует „омическое“ поле $R_L I$ и замедляет уменьшение напряжения U с ростом z .

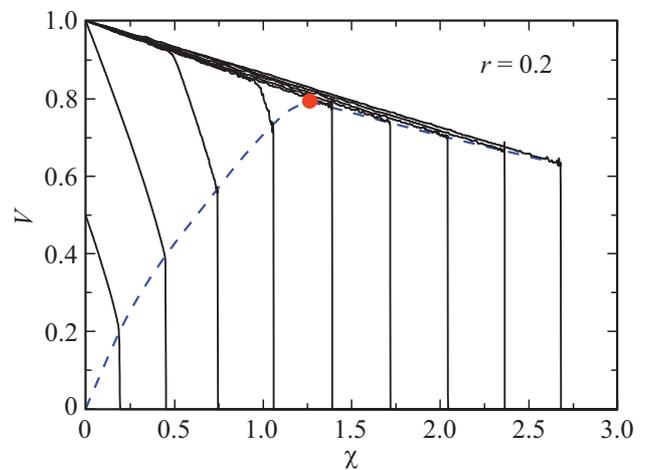


Рис. 6. Сплошные линии — профили затухающей ударной волны в моменты $\theta = 0.5; 1.0 \dots 4.5$, полученные путем численного решения задачи Коши (30), (31), при $r = 0.2$ и $g = 0$. Штриховая линия — зависимость амплитуды разрыва от его положения. Точкой отмечено положение χ_m и амплитуда $V_m = q_m^2$ максимального разрыва в момент $\theta = \theta_m = 2.3$.

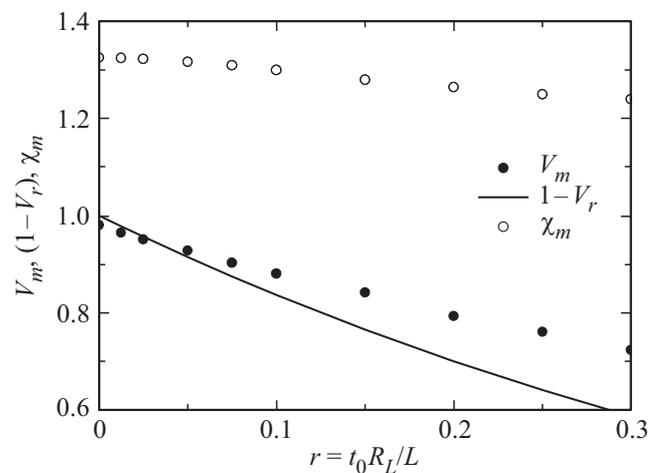


Рис. 7. Зависимости положения χ_m и амплитуды $V_m = q_m^2$ максимального разрыва от безразмерного сопротивления r . Символы — результаты численного решения, сплошная линия — расчет $(1 - V_r)$ по формуле (35) при $\theta_m = 2.3$.

Сопrotивление R_L уменьшается с ростом d_M и σ_M , но ограничено снизу скин-эффектом, учет которого приводит к тому, что вместо (30) получается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Его решение даже численными методами представляет собой нетривиальную задачу. Однако при сильном скин-эффекте (т.е. при $d_M > 2\sqrt{t_m/\sigma_M\mu_0}$) для омического падения напряжения U_σ вдоль электродов между входом в линию и фронтом была получена точная формула [23]. При малом затухании в электродах, когда $t_0 \ll t_\sigma = \pi\sigma\mu_0(d + d_s)^2$, ее можно представить в виде

$$\frac{U_\sigma(t)}{U_B} \equiv V_\sigma(\theta) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{t_0}{t_\sigma}} [\theta^{3/2} - (\theta - 1)^{3/2} H(\theta - 1)]_{t=t_m} \approx 2.67 \sqrt{\frac{t_0}{t_\sigma}}. \quad (37)$$

Очевидно, при $V_\sigma(\theta_m) \ll 1$ скин-эффект не может привести к изменению соотношений $\chi_m \approx \chi_1$ и $\theta_m \approx 1 + \chi_1$, использование которых приводит к последнему приближенному равенству в (37).

5. Заключение

Полученные выше результаты позволяют оценить достижимые параметры ЛП как обострителя фронта импульса напряжения. В качестве примера проделаем это для ЛП на основе Si и 4H-SiC, с помощью которых нужно сформировать импульс с фронтом $t_f = 0.2$ нс и коэффициентом обострения $k = t_0/t_f = 10$. Эти условия позволяют найти все необходимые параметры линии:

- толщину n -слоя $d = t_f v_e / \chi$;
- напряжение пробоя U_B и напряженность поля E_B по формулам (5);
- величину γ_0 по формуле (28) и полную толщину полупроводника γd ;
- оптимальную длину линии $z_m = \chi_m t_0 c_s / \sqrt{\gamma}$;
- минимальную толщину $d_M = 2\sqrt{\theta_m t_0 / \sigma_M \mu_0}$ электродов, при которой их сопротивление определяется скин-эффектом;
- нормированное падение напряжения вдоль электродов $V_m = U_\sigma(\theta_m t_0) / U_B$ по формуле (37);
- нормированную ширину линии $l / \gamma d = Z_s / Z \sqrt{2\gamma}$.

Результаты расчетов при $\gamma = \gamma_0 / 4$, $\sigma_M = 3 \cdot 10^5$ См/см и Ом, приведенные в табл. 2, позволяют сделать

Таблица 2. Расчетные параметры ЛП с $Z = 5$ Ом на основе Si и 4H-SiC

Параметр	E_B , МВ/см	U_B , кВ	d , мкм	γd , мкм	z_m , см	d_M , мкм	V_m	$l / \gamma d$
Si	0.27	0.37	27	290	6.9	22	0.037	4.7
4H-SiC	2.1	4.48	43	240	10.6	22	0.046	7.2

следующие выводы. Во-первых, необходимая длительность фронта t_f однозначно определяет его максимальную амплитуду $U = U_B$. По этому показателю карбид-кремниевые ЛП обладают явным преимуществом над кремниевыми. Причиной этого, очевидно, является гораздо более высокая электрическая прочность карбида кремния. Во-вторых, в рассмотренном случае омическое падение напряжения вдоль электродов U_σ много меньше U_B и даже почти в 3 раза меньше \hat{U}_n . Поэтому общие потери энергии в ЛП за время t_m лишь немного превосходят Ω_1 . В-третьих, увеличение коэффициента обострения k при заданной длительности фронта приводит к росту минимальной толщины d_M электродов, напряжения U_σ и особенно быстрому росту оптимальной длины линии z_m , которая и при $k = 10$ оказывается очень большой. Вероятно, именно это последнее обстоятельство является основным конструктивным ограничением максимально допустимой величины k .

Автор благодарен А.В. Горбатюку и О.В. Руденко за плодотворные обсуждения процессов эволюции нелинейных распределенных систем. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-08-01292).

Список литературы

- [1] R. Landauer. IBM J. Res. Develop., **4**, 391 (1960).
- [2] Р.В. Хохлов. Радиотехника и электроника, **6**, 916 (1961).
- [3] И.Г. Катаев. *Ударные электромагнитные волны* (М., Сов. радио, 1963).
- [4] Л.А. Моругин, Г.В. Глебович. *Наносекундная импульсная техника* (М., Сов. радио, 1964).
- [5] А.В. Гапонов, Л.А. Островский, Г.И. Фрейдман. Изв. вузов. Радиофизика, **10**, 1378 (1967).
- [6] P.W. Smith. *Transient Electronics. Pulsed Circuit Technology* (Chichester, John Wiley & Sons Ltd., 2002).
- [7] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны* (М., Радио и связь, 1988).
- [8] S.T. Peng, R. Landauer. IBM J. Res. Develop., **17**, 299 (1973).
- [9] R. Owens, C. Eng, G. White. Proc. IEE, **113**, 1763 (1966).
- [10] E. Cumberbatch. SIAM J. Appl. Mathematics, **15**, 450 (1967).
- [11] S.K. Mullick. IBM J. Res. Develop., **11**, 558 (1967).
- [12] D. Jäger. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **24**, 566 (1976).
- [13] M.M. Turner, G. Branch, P.W. Smith. IEEE Trans. Electron Dev., **38**, 810 (1991).
- [14] А.С. Кюрегян, С.Н. Юрков. ФТП, **23**, 1819 (1989).
- [15] А.С. Кюрегян. ФТП, **50**, 293 (2016).
- [16] M.V. Fischetti, S.E. Laux. Phys. Rev. B, **38**, 9721 (1988).
- [17] A. Akturk, N. Goldsman, S. Potbhare, A. Lelis. J. Appl. Phys., **105**, 033703 (2009).
- [18] H. Guckel, P.A. Brennan, I. Palócz. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **15**, 468 (1967).
- [19] H. Hasegawa, M. Furukawa, H. Yanai. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **19**, 869 (1971).
- [20] G.W. Hughes, R.M. White. IEEE Trans. Electron Dev., **22**, 945 (1975).

- [21] D.F. Williams. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **47**, 176 (1999).
- [22] Дж. Уизем. *Линейные и нелинейные волны* (М., Мир, 1977) [G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley & Sons Inc., N.Y., 1974)].
- [23] А.С. Кюрегян. Журн. радиоэлектроники [электронный журнал], № 10 (2018). Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct18/9/text.pdf>

Редактор Г.А.Оганесян

Shock electromagnetic wave of large amplitude in the nonlinear transmission line based on distributed semiconductor diode

A.S. Kyuregyan

All-Russian Electrical Engineering Institute,
111250 Moscow, Russia

Abstract An analytical solution to the problem of formation and propagation of large amplitude shock electromagnetic waves in strip transmission line (TL) based on the distributed semiconductor diode was obtained. This solution correctly takes into account non-linearity, time dispersion and dissipation of TL. The results of the theory has been to estimate the parameters of TL as peaker of the high voltage pulse applied to transmission line input.