

## 03 Фото- и термофорез нагретых умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы

© Н.В. Малай,<sup>1</sup> Е.Р. Щукин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет, 308007 Белгород, Россия

<sup>2</sup> Институт высоких температур РАН, 125412 Москва, Россия

e-mail: malay@bsu.edu.ru; evgrom@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 4 июня 2018 г. В окончательной редакции 3 октября 2018 г.)

В квазистационарном приближении Стокса при малых числах Рейнольдса и Пекле построена теория фото- и термофореза нагретой умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы. При решении уравнений газовой динамики учитывался степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В граничных условиях учтены все эффекты, линейные по числу Кнудсена. Получены выражения для общей силы и скорости, из которых следует, что каждое из указанных явлений может оказывать существенное влияние на движение нагретой частицы.

DOI: 10.21883/JTF.2019.04.47303.219-18

### Введение

В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникнуть упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения. Их появление вызвано передачей нескомпенсированного импульса частицам молекулами газообразной среды. При этом движение частиц, обусловленное внешним заданным градиентом температуры, называют термофорезом [1,2]. Термофоретическая сила перемещает частицы в области с более низкой температурой. Когда термофоретическая сила становится равной по величине силе сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно со скоростью, называемой термофоретической. Явление фотофореза в газе заключается в движении частиц в поле электромагнитного излучения под действием радиометрической силы [3]. Механизм фотофореза можно кратко описать следующим образом. При взаимодействии электромагнитного излучения с частицей внутри нее происходит выделение тепловой энергии, с некоторой объемной плотностью  $q_i$ , которая неоднородно нагревает частицу. Молекулы газа, окружающие частицу, после соударения с ее поверхностью отражаются от нагретой стороны частицы с большей скоростью, чем от холодной. В результате частица приобретает нескомпенсированный импульс, направленный от горячей стороны частицы к холодной. В зависимости от размеров и оптических свойств материала частицы более горячей стороной может оказаться как освещенная, так и теневая сторона частицы. Поэтому имеет место как положительный (движение частицы в направлении излучения), так и отрицательный фотофорез. Кроме того, если поток излучения неоднороден по сечению, то может возникнуть поперечное относительно направления распространения

электромагнитного излучения движение частицы в газе. Явления термо- и фотофореза практически всегда сопутствуют термодинамически неравновесным дисперсным системам.

Фото- и термофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения частиц в каналах тепло- и массообменников, на движение частиц в зонах просветления дисперсных систем и в окрестностях, вымывающих частицы, капель; можно использовать при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесения заданной толщины специальных покрытий из частиц, получение высококачественных оптических волокон и т.д. [1–7].

В опубликованных до настоящего времени работах по теории фото- и термофореза эти явления хорошо изучены при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы [1–7]. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы  $T_{is}$  и температурой газообразной среды вдали от нее  $T_{e\infty}$  к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство  $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$ , и значительным, если  $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim 0(1)$ . В последнем случае частицу называют нагретой. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением частицы электромагнитного излучения и т.д. Индексы „e“ и „i“ здесь и далее относятся к газу и частице соответственно; индексом „S“ обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы, и индексом „∞“ — физические величины, характеризующие газообразную среду в невозмущенном потоке.

Если  $(T_{is} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim 0(1)$ , то при решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В этом случае газообразная среда считается неизотермической, и система газодинамических уравнений, описывающая такую среду, ставится существенно нелинейной. В научной литературе имеется мало работ, посвященных исследованию движения частиц при значительных относительных перепадах температуры в газообразных средах, в частности, рассматривались, например, гравитационное движение нагретых частиц [8], фотофорез нагретых крупных частиц [9], термофорез крупных нагретых частиц [10]. В этих работах показано, что нагрев поверхности частиц существенно влияет на их движение.

Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена [2]:  $\text{Kn} = \lambda/R$ , где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекул газа,  $R$  — характерный размер частицы. Частицы называют крупными, если  $\text{Kn} \leq 0.01$  и умеренно крупными при  $0.01 \leq \text{Kn} \leq 0.3$ .

В последнее время наблюдается большой интерес к исследованию фото- и термофореза умеренно крупных частиц (течение со скольжением). Например, в работах [11,12] рассмотрен термофорез ультрамелких и наноразмерных частиц, широкое развитие получил микромасштабный термофорез (MST), технология позволяющая анализировать взаимодействия биомолекул [13–15] и т.д. В настоящей работе рассматривается фото- и термофорез нагретой умеренно крупной частицы сферической формы, т.е. рассматриваются оба этих явления одновременно, что представляет как научный, так и практический интерес.

## Постановка задачи

Рассмотрим твердую умеренно крупную аэрозольную частицу сферической формы радиуса  $R$ , взвешенную в газе с плотностью  $\rho_e$ , теплопроводностью  $\lambda_e$  и вязкостью  $\mu_e$ , поверхность которой неравномерно нагревается электромагнитным излучением. Неравномерный нагрев приводит к неоднородному распределению температуры вдоль поверхности частицы. Это приводит к возникновению фотофоретической силы. С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры  $\nabla T$ , что приводит к возникновению термофоретической силы. Когда эти обе силы уравновешиваются силой вязкого сопротивления среды, частица начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения частицы называется фото-и термофоретической скоростью.

В настоящей работе при описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид их зависимости от температуры:  $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta$ ,  $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha$ ,  $\lambda_i = \lambda_{i0} t_i^\gamma$ , где  $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$ ,  $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$ ,  $t_k = T_k/T_{e\infty}$  ( $k = e, i$ );  $0.5 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ,

$-1 \leq \gamma \leq 1$ . Например, для воздуха  $\alpha = 0.81$ ,  $\beta = 0.72$ ; для азота  $\alpha = 0.77$ ,  $\beta = 0.69$  и относительная погрешность при этом не превышает 4% [16].

При теоретическом описании фото-и термофореза будем предполагать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица–газообразная среда протекает квазистационарно. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса. Задача решается гидродинамическим методом, т.е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями.

Фото- и термофорез удобно описывать в сферической системе координат  $r, \theta, \phi$ , связанной с центром масс аэрозольной частицы; ось  $Oz$  направлена в сторону распространения однородного потока излучения интенсивностью  $I_0$  и вектора  $\nabla T$ . Поскольку система отсчета связана с центром движущейся аэрозольной частицы, то задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость которого  $U_\infty$  подлежит определению ( $U_\infty \parallel Oz$ ). Распределения скоростей, давлений и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси  $Oz$ . При указанном выборе начала системы координат нагретую частицу можно считать неподвижной, а внешнюю среду (газ) — движущейся в сторону, противоположную направлению фактического движения нагретой частицы со скоростью  $U_\infty = -U_{pth}$ , где  $U_{pth}$  — скорость фото- и термофореза.

В рамках сформулированных допущений уравнения гидродинамики и теплопроводности имеют вид [17]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu_e \left[ \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_e U_k^e) = 0, \tag{1}$$

$$\text{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0, \quad n_e = P_e/kT_e, \tag{2}$$

$$\text{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i. \tag{3}$$

Здесь  $x_k$  — декартовы координаты,  $\rho_e, n_e$  — плотность и концентрация молекул газообразной среды,  $k$  — постоянная Больцмана.

Система газодинамических уравнений (1)–(3) решалась со следующими граничными условиями в сферической системе координат:

$$y \rightarrow \infty, \quad U_r^e = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta^e = -U_\infty \sin \theta,$$

$$P_e = P_{e\infty}, \quad T_e = T_{e\infty} + |\nabla T| r \cos \theta, \tag{4}$$

$$y \rightarrow 0, \quad T_i \neq \infty, \tag{5}$$

$$y = 1, \quad T_e - T_i = C_i \text{Kn} \frac{\partial T_e}{\partial y},$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} - C_q \text{Kn} \frac{\lambda_e}{R} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_{e\infty}^4), \tag{6}$$

$$U_r^e = C_V \text{Kn} \frac{v_e}{RT_e} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right), \quad (7)$$

$$U_\theta^e = C_m \text{Kn} \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right) + K_{TS} \frac{v_e}{RT_e} (1 + \text{Kn} \beta'_R) \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{TS} \text{Kn} \beta_R \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial^2 T_e}{\partial y \partial \theta} - K_{TS} \text{Kn} \beta_B \frac{v_e}{2RT_e} \times \left( y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^2} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 T_e}{\partial y \partial \theta} \right), \quad (8)$$

где  $y = r/R$ ,  $U_r^e$  и  $U_\theta^e$  — нормальная и касательная компоненты массовой скорости газа  $\mathbf{U}_e$ ;  $v_e = \mu_e/\rho_e$  — кинематическая вязкость;  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ . Граничные условия на поверхности частицы (6)–(8) записаны с учетом всех эффектов, линейных по числу Кнудсена [18]. Входящие в (6)–(8) газокINETические коэффициенты  $K_{TS}$ ,  $C_m$  — коэффициенты теплового и изотермического скольжений;  $\beta'_R$ ,  $\beta_R$ ,  $\beta_B$  — поправки на кривизну и барнеттовское скольжение;  $C_q$ ,  $C_V$  — коэффициенты потоков тепла и среднемассового переноса, растекающихся в слое Кнудсена;  $C_t$  — коэффициент скачка температуры. Выражения для газокINETических коэффициентов  $K_{TS}$ ,  $C_m$ ,  $\beta'_R$ ,  $\beta_R$ ,  $\beta_B$ ,  $C_q$ ,  $C_V$ ,  $C_t$  приведены в [18], где они получены в ходе решения в слое Кнудсена уравнения Больцмана. При коэффициентах аккомодации тангенциальной проекции импульса и энергии молекул, равных единице, значения газокINETических коэффициентов равны [18]:  $R_{TS} = 1.161$ ,  $C_m = 1.131$ ,  $C_q = 0.548$ ,  $C_V = 0.971$ ,  $C_t = 2.179$ ,  $\beta'_R = -0.701$ ,  $\beta_R = 3.731$ ,  $\beta_B = 3.651$ .

Условия (6) учитывают скачок температуры газа у поверхности частицы и непрерывности теплового потока с учетом растекания части теплоты по слою Кнудсена и на излучение; условие (7) учитывает непротекания молекул через поверхность частицы с учетом растекания части потока молекул по слою Кнудсена, а изотермическое и тепловое скольжения учтены в условии (8);  $\sigma_0$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $\sigma_1$  — интегральная степень черноты [19]. На большом расстоянии от частицы ( $y \rightarrow \infty$ ) справедливы граничные условия (4), а конечность физических величин, характеризующих частицу при  $y \rightarrow 0$ , учтено в (5).

Вид граничных условий указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости  $U_r^e$  и ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [20]. Известно [20], что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений. С учетом этого выражения для компонент массовой скорости будем искать в виде

$$U_r^e(y, \theta) = U_\infty \cos \theta G(y), \quad U_\theta^e(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta g(y).$$

Здесь  $G(y)$  и  $g(y)$  — произвольные функции, зависящие от координаты  $y$ .

## Поля температур вне и внутри частицы

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные  $\mu_{e\infty}$ ,  $\rho_{e\infty}$ ,  $\lambda_{e\infty}$  и сохраняющиеся в процессе движения частицы  $R$ ,  $|\nabla T|$ ,  $T_{e\infty}$  и  $U_\infty$ . Из этих параметров, кроме числа Рейнольдса, можно составить и безразмерную комбинацию  $\varepsilon = R|\nabla T|/T_{e\infty}$ , характеризующую перепад температуры на размере частицы. При описании термофореза  $\varepsilon = R|\nabla T|/T_{e\infty}$  играет роль малого параметра [2,10], а при описании фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса [6,9]. Действительно, скорость частицы в поле градиента температуры по порядку величины равна  $\frac{\mu_{e\infty}}{\rho_{e\infty} T_{e\infty}} \frac{\Delta T_e}{L}$  [2]. Здесь  $\frac{\Delta T_e}{L}$  — средний градиент температуры вдали от частицы. Этот градиент равен отношению перепада температуры  $\Delta T_e$  на конечном отрезке  $L$ . Скорость термофореза равна с обратным знаком скорости центра инерции газовой среды на большом расстоянии от частицы, поэтому  $|U_{th}| \sim \frac{\mu_{e\infty}}{\rho_{e\infty} T_{e\infty}} \frac{\Delta T_e}{L} = \frac{\mu_{e\infty}}{\rho_{e\infty} R} \varepsilon$ . Тогда число Рейнольдса, построенное по характерной скорости, равно  $\text{Re} = \frac{|U_{th}| R \rho_{e\infty}}{\mu_{e\infty}} = \varepsilon$ , т.е. для фотофореза роль малого параметра играет число Рейнольдса, а для термофореза —  $\varepsilon$ .

При нахождении фото- и термофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости по  $\varepsilon$ . Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (2), (3). Решая эти уравнения методом разделения переменных, получаем следующие выражения для  $t_e$  и  $t_i$  ( $t_k = T/T_{e\infty}$ ,  $k=e,i$ ):

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), \quad (9)$$

где

$$t_{e0} = \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

$$t_{i0}(y) = \left( B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy \right)^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

$$t_{e1} = \frac{1}{t_{e0}^\alpha} \cos \theta \left( y + \frac{\Gamma}{y^2} \right),$$

$$t_{i1} = \frac{1}{t_{i0}^\gamma} \cos \theta \left[ Dy + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left( y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \right],$$

$$H_0 = \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i0}T_{e\infty}} J_0, \quad H_1 = \frac{R^2}{3\lambda_{i0}T_{e\infty}} J_1, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i dV,$$

$$J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV = 0, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\psi_0 = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{i0}T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx, \quad x = \cos \theta,$$

$$\psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_{i0}T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) x dx,$$

$z = r \cos \theta$ ,  $\int_V a_i z dV$  — дипольный момент плотности тепловых источников [6,9].

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур, определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности, для коэффициентов  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  имеем

$$\Gamma = \frac{Rt_{eS}^\alpha}{\lambda_{iS}T_{e\infty}\delta} J_1 + \frac{1}{\delta} \left\{ \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} - \omega_4 + \text{Kn} \left[ C_t \left( 1 + \frac{\alpha l^{(S)}}{1+\alpha} \right) \omega_4 + 2C_q \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \right] \right\}, \quad \Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1.$$

Здесь

$$\delta = 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_4 + \text{Kn} \left[ C_t \left( 2 - \frac{\alpha l^{(S)}}{1+\alpha} \right) \omega_4 + 2C_q \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \right],$$

$$\omega_4 = 1 + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{iS}} T_{e\infty}^3 t_{eS}^3, \quad \lambda_{iS} = \lambda_{i0} t_{iS}^\gamma, \quad \lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha,$$

$$t_{iS} = t_{i0}(y=1), \quad t_{eS} = t_{e0}(y=1), \quad l^{(S)} = (t_{eS}^{1+\alpha} - 1)/t_{eS}^{1+\alpha}.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы  $T_{iS}$  определяется из решения следующей системы уравнений, в которой  $T_{iS} = t_{iS}T_{e\infty}$ ,  $T_{eS} = t_{eS}T_{e\infty}$ :

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS} \left( 1 + C_t \text{Kn} \frac{l^{(S)}}{1+\alpha} \right), \\ \frac{l^{(S)}}{1+\alpha} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{eS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{eS}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{eS}} (t_{iS}^4 - 1). \end{cases} \quad (10)$$

При выполнении неравенства  $\lambda_e \ll \lambda_i$  (имеет место для большинства газов) коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа, тогда в коэффициенте динамической вязкости мы можно пренебречь зависимостью по углу  $\theta$  в системе „частица–газ“ (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры). С учетом этого можно считать, что вязкость связана только с температурой  $t_{e0}$ , т.е.  $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$ . Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

С учетом (9) выражение для динамической вязкости имеет вид

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta. \quad (11)$$

Полученное выражение для динамической вязкости (11) в дальнейшем используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой аэрозольной частицы сферической формы.

## Решение гидродинамической задачи. Нахождение выражений для полей скорости и давления

Исследование линеаризованного по скорости уравнение Навье–Стокса в сферической системе координат показало, что если предположить коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (слабая угловая асимметрия распределения температуры), то это уравнение может быть в конечном итоге сведено к неоднородному дифференциальному уравнению 3-го порядка с изолированной особой точкой, и решение этого уравнения можно искать в виде обобщенных степенных рядов; подробный вывод приведен в [8]. Таким образом, общие выражения для компонент массовой скорости, удовлетворяющие условию ограниченности решения при  $y \rightarrow \infty$ , имеют вид

$$U_r^e = U_\infty \cos \theta G(y), \quad G(y) = A_1 G_1 + A_2 G_2 + G_3,$$

$$U_\theta^e = -U_\infty \sin \theta g(y), \quad g(y) = A_1 G_4 + A_2 G_5 + G_6,$$

$$P_e = P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta \left\{ \frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} \right.$$

$$\left. + y \left[ 3 + \frac{\beta - 1}{2} y f \right] \frac{d^2 G}{dy^2} \right.$$

$$\left. - \left[ 2 - y^2 f^I - \frac{\beta}{2} y^2 f^2 + (\beta - 2) y f \right] \frac{dG}{dy} \right.$$

$$\left. + 2 \left[ y^{II} + y f^I (4 + y \beta f) - \frac{2}{3} f \right] G \right\}.$$

Здесь  $f = -\frac{l}{y(1+\alpha)}$ ,  $G_k = \left( 1 + \frac{l}{2(1+\alpha)} \right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G_{k-3}^I$  ( $k = 4, 5, 6$ ),  $f^I, f^{II}, G_1^I, G_2^I, G_3^I$  — первые, вторые производные по  $y$  от соответствующих функций.

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} l^n, \quad G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3,n} l^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y),$$

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n} l^n + \omega_2 \ln(y) C_1(y).$$

Значения коэффициентов  $C_{1,n}$  ( $n \geq 1$ ),  $C_{2,n}$  ( $n \geq 3$ ) и  $C_{3,n}$  ( $n \geq 4$ ) определяются с помощью следующих

рекуррентных соотношений:

$$C_{1,n} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \left\{ \left[ (n-1)(3n^2 + 13n + 8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2) \right] C_{1,n-1} - \left[ (n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3) \right] C_{1,n-2} + (n-2) \left[ (n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3 \right] C_{1,n-3} \right\},$$

$$C_{2,n} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \left\{ \left[ (n-1)(3n^2 + n - 6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2 \right] C_{2,n-1} - \left[ \gamma_3(n+1) + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1 n(n-2) + \gamma_2(n-2) \right] C_{2,n-2} + (n-2) \left[ (n-1)(n-3) + \gamma_3 + \gamma_1(n-3) \right] C_{2,n-3} + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)\Delta_k - 6 \frac{(-\gamma_4)(1-\gamma_4)\dots(n-1-\gamma_4)}{n!} \right\},$$

$$C_{3,n} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left\{ (n-1)[3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2] C_{3,n-1} - [(n-1)(n-2)(3n-4) + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3] C_{3,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{3,n-3} + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1)\Delta_k \right\},$$

$$\Delta_k = (3k^2 + 16k + 15)C_{1,k} - ((k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2)C_{1,k-1} + (3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3)C_{1,k-2},$$

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \gamma_2 = 2 \frac{1+\beta}{1+\alpha}, \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}.$$

При вычислении коэффициентов  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$  по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что

$$C_{1,0} = 1, C_{2,0} = 1, C_{3,1} = 0, C_{2,2} = 1,$$

$$C_{2,1} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4), \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$\gamma_4 = \beta/(1+\alpha), \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15} \left[ \frac{1}{4}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4)(4 + 3\gamma_1 + \gamma_2) + 3\gamma_3 + 3\gamma_4(\gamma_4 - 1) \right], C_{3,2} = \frac{1}{4}\gamma_3,$$

$C_{3,3} = 1, C_{3,0} = 1, C_{1,n}, C_{2,n}$  и  $C_{3,n}$  при  $n < 0$  равны нулю.

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий на поверхности аэрозольной частицы.

### Определение термофоретической силы и скорости умеренно крупной нагретой твердой частицы сферической формы. Анализ полученных результатов

В первом приближении по  $\epsilon$  получены выражения для полей температур вне и внутри аэрозольной частицы, а также распределения скорости и давления в ее окрестности. Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы и имеет вид [17]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi |_{r=R}. \quad (12)$$

Здесь  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, U_r^e$  и  $U_\theta^e$  — компоненты тензора напряжений, радиальная и касательная компоненты массовой скорости,  $\sigma_{rr} = \mu_e \left( 2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right).$

Подставляя в (12) полученные выше выражения, после интегрирования получаем, что общая сила будет складываться из силы вязкого сопротивления среды  $F_\mu$ , фотофоретической  $F_{ph}$  и термофоретической силы  $F_{th}$ :

$$F = F_\mu + F_{ph} + F_{th}, \quad (13)$$

где  $F_\mu = 6\pi R \mu_e \infty U_\infty f_\mu n_z, F_{ph} = -6\pi R \mu_e \infty f_{ph} \int_V q_i z_i dV n_z, F_{th} = -6\pi R \mu_e \infty f_{th} |\nabla T| n_z, \mathbf{n}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $Oz$ .

Значения коэффициентов  $f_\mu, f_{ph}$  и  $f_{th}$  имеют вид

$$f_\mu = \frac{2}{3} \frac{N_2 + C_m \operatorname{Kn} N_4}{N_1 + C_m \operatorname{Kn} N_3},$$

$$\begin{aligned}
 f_{th} &= 4K_{TS} \frac{v_{eS}}{R\delta T_{e\infty} t_{eS}^{1+\alpha}} \frac{G_1(1)}{N_1 + C_m Kn N_3} \left\{ \left( \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \right. \right. \\
 &+ C_i Kn \omega_4 \left. \right) \left[ 1 + Kn \left\{ \beta'_R + \beta_B + 2C_V^* \frac{G_4(1)}{G_1(1)} \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left( 1 - C_m Kn \frac{G_4^I(1) + G_1(1) - G_4(1)}{G_4(1)} \right) \right\} \right] \\
 &+ Kn(\beta_R - \beta_B) \left[ \omega_4 + \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \left( \frac{\alpha \lambda^{(S)}}{1 + \alpha} - 2C_q Kn \right) \right] \left. \right\}, \\
 f_{ph} &= K_{TS} \frac{v_{eS} G_1(1)}{\delta T_{e\infty} \pi R^3 \lambda_{iS} t_{eS} (N_1 + C_m Kn N_3)} \left\{ 1 + Kn \left[ \beta'_R \right. \right. \\
 &+ \beta_B + (\beta_R - \beta_B) \left( \frac{\alpha \lambda^{(S)}}{1 + \alpha} - 2 \right) + 2C_V^* \frac{G_4(1)}{G_1(1)} \\
 &\times \left. \left. \left( 1 - C_m Kn \frac{G_4^I(1) + G_1(1) - G_4(1)}{G_4(1)} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$N_1(1) = G_1(1)G_2^I(1) - G_2(1)G_1^I(1),$$

$$N_2(1) = G_1(1)G_3^I(1) - G_3(1)G_1^I(1),$$

$$N_3(1) = G_2(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_2^{II}(1)$$

$$+ \left( 2 + \frac{l^{(S)}}{1 + \alpha} \right) (G_2(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_2^I(1)),$$

$$N_4(1) = G_3(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_3^{II}(1) + \left( 2 + \frac{l^{(S)}}{1 + \alpha} \right)$$

$$\times (G_3(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_3^I(1)),$$

$$v_{eS} = v_{e\infty} t_{eS}^{1+\beta}, \quad C_V^* = C_V / K_{TS}.$$

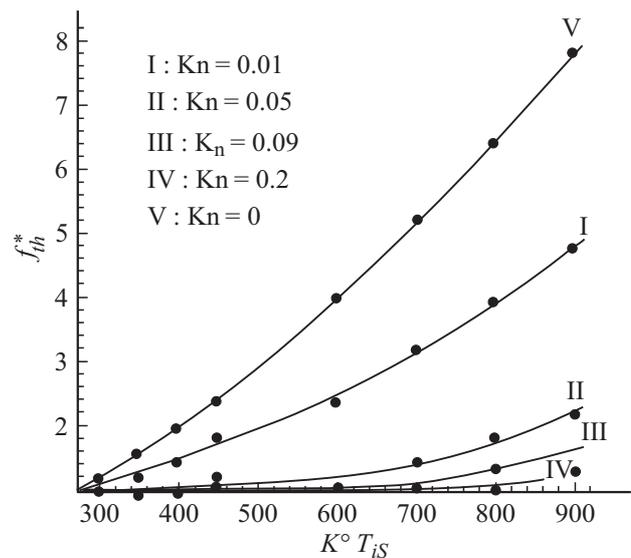
Приравняв полную силу  $F$  к нулю, получаем следующее выражение для скорости фото- и термофореза  $U_{pth}$  ( $U_{pth} = -U_\infty$ ) твердой умеренно крупной нагретой частицы сферической формы:

$$U_{pth} = - \left( h_{ph} \int_V q_j z dV + h_{th} |\nabla T| \right) n_z, \quad (14)$$

где  $h_{ph} = f_{ph} / f_\mu$ ,  $h_{th} = f_{th} / f_\mu$ .

При оценке коэффициентов  $f_\mu$ ,  $f_{ph}$ ,  $f_{th}$ ,  $h_{ph}$  и  $h_{th}$  необходимо учитывать, что индексом „S“ обозначены значения физических величин, взятые при средней относительной температуре поверхности частицы  $T_{iS}$ , которая определяется из (10); функции  $G_1(y)$ ,  $G_1^I(y)$ ,  $G_1^{II}(y)$ ,  $G_2$ ,  $G_2^I(y)$ ,  $G_2^{II}(y)$ ,  $G_3$ ,  $G_3^I(y)$ ,  $G_3^{II}(y)$ ,  $N_1(y)$ ,  $N_2(y)$ ,  $N_3(y)$  и  $N_4(y)$  — берутся при  $y = 1$ ,  $G_1^I(y)$ ,  $G_1^{II}(y)$  и т.д. первая и вторая производные от соответствующих функций.

Полученные выше формулы для силы и скорости фото- и термофореза можно использовать и при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы. В случае, когда величина нагрева поверхности частицы мала, т.е. средняя температура поверхности



Кривые зависимости от числа Кнудсена и средней температуры.

по величине незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от частицы ( $T_0 \rightarrow 0$ ), зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности от температуры можно пренебречь, и тогда ( $y = 0$ ) имеем:  $G_1 = 1$ ,  $G_1^I = -3$ ,  $G_1^{II} = 12$ ,  $G_1^{III} = -60$ ,  $G_2 = 1$ ,  $G_2^I = -1$ ,  $G_2^{II} = 2$ ,  $G_2^{III} = -6$ ,  $G_3 = 1$ ,  $G_3^I = 0$ ,  $G_3^{II} = 0$ ,  $G_3^{III} = 0$ ,  $N_1 = 2$ ,  $N_2$ ,  $N_3 = 6$  и  $N_4 = 6$ . В этом случае формулы для силы и скорости термофореза совпадают с известными в литературе результатами (см. например, [2]). Если в формулах (13), (14) положить  $Kn = 0$ , то мы получаем выражения для силы и скорости фото- и термофореза нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы, полученные в работах [9,10].

Для иллюстрации в качестве примера зависимости  $F_{th}$  от  $T_{iS}$  и числа Кнудсена на рисунке приведены кривые, связывающие значения коэффициента  $f_{th}^* = f_{th} / f_{th}|_{T_{iS}=273K}$  со значениями  $T_{iS}$  частиц меди, движущихся в воздухе при нормальных условиях при  $Kn = 0, 0.01, 0.05, 0.09, 0.2$ . Значения коэффициентов  $v_{e\infty}$ ,  $\lambda_{e\infty}$ ,  $\lambda_{i0}$  были взяты при  $T_{iS} = 273 K$  из [16]. При  $T_{iS} = 273 K$  значение коэффициента  $f_{th}|_{T_{iS}=273K} = 6.178 \cdot 10^{-5}$ .

Формулы (13), (14) позволяют оценивать силу и скорость фото- и термофореза умеренно крупных нагретых аэрозольных частиц сферической формы при произвольных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры (как при малых, так и при значительных относительных перепадах температуры). В граничных условиях учтены

все эффекты, линейные по числу Кнудсена. Полученные формулы носят наиболее общий характер.

Кроме того, из формул видно, что величина и направление силы и скорости фотофореза умеренно крупных аэрозольных частиц определяются величиной и направлением дипольного момента плотности тепловых источников  $\int_V q_i z dV n_z$ . В тех случаях, когда дипольный момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части частицы, которая обращена к потоку излучения), частица движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части частицы), частица будет двигаться навстречу направлению распространения излучения. Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Отсюда следует, что фотофоретическая сила и скорость с увеличением интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. При постоянной величине дипольного момента увеличение радиуса  $R$  частицы приводит к уменьшению фотофоретической силы и скорости обратно пропорционально  $R^3$ . Фотофоретическая сила и скорость существенно зависят и от теплопроводности вещества частицы. При  $\lambda_{is} \rightarrow \infty$  (высоко теплопроводные частицы) сила и скорость фотофореза при фиксированной величине дипольного момента стремятся к нулю. Чтобы оценить зависимость силы и скорости фотофореза от числа Кнудсена и нагрева поверхности частицы необходимо конкретизировать плотность тепловых источников. Степень неоднородности распределения энергии излучения в частице зависит от оптических констант материала частицы ( $m_S$ ) и параметра дифракции  $x_a$ . В этом случае выражение для плотности излучения в частице, трансформируемой в тепло, можно записать в виде  $q_i = 4\pi \frac{n_S a_S}{n_0 \lambda_0} I_0 B_S$ , где  $m_S = n_S + i a_S$ ,  $x_a = 2\pi R/\lambda_0$ ,  $n_S$  — показатель преломления,  $a_S$  — показатель поглощения,  $n_0$  — показатель преломления среды,  $I_0$ ,  $\lambda_0$  — интенсивность и длина волны излучения,  $B_S$  — функция координат, рассчитываемая по теории Ми [6,21].

Для термофоретической силы и скорости численные оценки показали также существенную их зависимость от числа Кнудсена и средней температуры поверхности частицы.

Полученные формулы для фото- и термофореза указывают на то, что при описании поведения нагретых умеренно крупных частиц в термодинамически неравновесных по температуре аэродисперсных системам необходимо учитывать совместное влияние этих эффектов.

## Заключение

В квазистационарном приближении Стокса при числах Рейнольдса и Пекле, много меньших единицы, построена теория фото- и термофореза нагретых умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы.

Численные оценки показали нелинейный характер зависимости силы и скорости фото- и термофореза от числа Кнудсена и от средней температуры поверхности частиц. Полученные формулы для фото- и термофореза указывают на то, что при описании поведения нагретых умеренно крупных частиц в термодинамически неравновесных по температуре аэродисперсных системам необходимо учитывать совместное влияние этих эффектов.

## Список литературы

- [1] Epstein P.S. // Z. Phys. 1929. Bd. 54. N 7/8. P. 537–539.
- [2] Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.
- [3] Ehrenhaft F. // Z. Phys. 1917. Bd. 17. P. 353–358.
- [4] Selim A., Hossain M.A., Rees D.A.S. // Int. J. Thermal Sci. 2003. Vol. 42. P. 973–982.
- [5] Pueshel R.L., Verma S., Rohatschek M., Ferry G.V., Boiadjeva N., Hovard S.D. // J. Geophys. Res. D. 2000. Vol. 105. N 3. P. 3727–3736.
- [6] Береснев С.А., Ковалев Ф.Д., Кочнева Л.Б., Рунков В.А., Суетин П.Е., Черемисин А.А. // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 1. С. 52–57.
- [7] Soong Chyi-Yeou, Li Wen-Ken, Tzeng Pei-Yuan // Opt. Lett. 2010. Vol. 35. N 5. P. 625–627.
- [8] Малай Н.В., Стукалов А.А., Рязанов К.С., Щукин Е.Р. // ПМТФ. 2008. № 1. С. 74–80. [Malai N.V., Stukalov A.A., Ryazanov K.S., Shchukin E.R. // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. Vol. 49. N 1. P. 58–63.]
- [9] Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 10. С. 42–50. [Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A. // Tech. Phys. 2012. Vol. 57. N 10. P. 1364–1371.]
- [10] Малай Н.В., Лиманская А.В., Щукин Е.Р. // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 2 (336). С. 164–171. [Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R. // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2016. Vol. 57. N 2. С. 337–343.]
- [11] Бубенчиков А.М., Потеев А.И., Бубенчиков М.А. // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 7. С. 59–61.
- [12] Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Потеев А.И., Маслов А.С., Овчаренко В.В., Усенко О.В. // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 7. С. 87–92.
- [13] Reineck P., Wienken C.J., Braun D. // Electrophoresis. 2010. Vol. 31. N 2. P. 279–286.
- [14] Baaske P., Wienken C.J., Reineck P., Duhr S., Braun D. // Angew. Chem. Int. Ed. Engl. 2010. Vol. 49. N 12. P. 1–5.
- [15] Jerabek-Willemsen M., André T., Wanner A., Roth H.M., Duhr S., Baaske P., Breitsprecher D. // J. Mol. Struct. 2014. Vol. 107. P. 101–113.
- [16] Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966. 535 с.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: ТТЛ, 1954. 795 с.
- [18] Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2253–2262.
- [19] Шейнблин А.Е. Излучательные свойства твердых материалов. Справочник. М.: Энергия, 1974. 471 с.
- [20] Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
- [21] Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.