

03

## Мгновенные спекл-структуры в частично когерентном оптическом волновом поле с широкими частотным и угловым спектрами

© В.П. Рябухо<sup>1,2</sup>, Л.А. Максимова<sup>1</sup>, Н.Ю. Мысина<sup>1</sup>, Д.В. Лякин<sup>1</sup>, П.В. Рябухо<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем точной механики и управления РАН,  
410028 Саратов, Россия

<sup>2</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия

e-mail: rvp-optics@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.07.2018 г.

Рассмотрена гипотеза о мгновенных объемных спекл-структурах в частично когерентном оптическом волновом поле частотно широкополосного излучения протяженного источника света. Обсуждены пространственно-временные корреляционные свойства мгновенных спекл-структур и их связь с пространственно-временными когерентными свойствами волнового поля. Показано, что мгновенные спекл-структуры определяют пространственные флуктуации волнового поля и его пространственные когерентные свойства. С помощью численного расчета поля волновых возмущений в ближней области дифракции излучения протяженного источника света получены изображения мгновенных спекл-структур в продольном сечении волнового поля, исследованы корреляционные свойства пространственного распределения мгновенной интенсивности волнового поля в направлении его распространения в зависимости от ширины частотного и ширины углового спектров поля. Показано, что продольная длина мгновенных спеклов может определяться или шириной частотного спектра поля, или шириной его углового спектра, или совместно и шириной частотного, и шириной углового спектров поля. Установлены условия, при которых мгновенные спекл-структуры распространяются, испытывая декорреляционные изменения в процессе распространения, на расстояние, определяемое шириной углового спектра поля.

DOI: 10.21883/OS.2019.02.47202.226-18

### Введение

Немонохроматическое оптическое волновое поле протяженного пространственно некогерентного или частично когерентного источника света имеет ограниченную область когерентности и конечное время когерентности волновых возмущений [1–3]. Такое волновое поле называют частично когерентным в пространстве и во времени.

Частично когерентное в пространстве волновое поле имеет конечные длины когерентности — поперечной и продольной по отношению к направлению распространения поля. В общем случае длины когерентности поля зависят как от ширины углового, так и от ширины частотного спектров поля [4–8]. Поперечные длины когерентности в основном определяются шириной углового спектра поля [1–3], и только при достаточно широком частотном спектре возникает зависимость этих длин от ширины частотного спектра возмущений поля [7–9]. Напротив, продольная длина когерентности поля может преимущественно определяться или шириной частотного спектра, или шириной углового спектра, или совместно шириной частотного и углового спектров поля [7,8]. Частотный и угловой спектры волнового поля оказывают конкурирующее влияние на длину продольной когерентности поля [5,7–10].

Перечисленные когерентные свойства поля следуют из формального корреляционного анализа волновых по-

лей с широкими угловым и частотным спектрами [7,10]. Эти свойства проявляются в натуральных интерференционных экспериментах [7,9–11], а также имеют решающее влияние на пространственное разрешение и глубину зондирования при формировании сигналов в корреляционной интерференционной микроскопии слоистых слабо рассеивающих объектов [10,12–16], где с помощью объектов с большой числовой апертурой формируются поля с максимально широкими на практике угловыми спектрами в сочетании с широкими частотными спектрами используемых источников света. В то же время с физической точки зрения пространственные когерентные свойства поля с необходимостью должны быть обусловлены временными и пространственными стохастическими флуктуациями поля, характер которых определяется параметрами частотного и углового спектров волнового поля. В качестве таких флуктуаций, как предлагается в [8], следует рассматривать мгновенные сгустки и разряжения энергии колебаний — мгновенные спекл-структуры, возникающие в волновом поле в результате мгновенной интерференции различных частотных и угловых составляющих этого поля. Пространственные и временные статистические свойства мгновенных спекл-структур должны определять пространственные когерентные свойства волнового поля как в поперечном, так и в продольном направлениях, а также и в процессе его распространения. Связь корреляционных свойств динамических спекл-структур,

образующихся в лазерном излучении, дифрагированном на движущемся рассеивателе, с параметрами пространственной и временной когерентности волнового поля излучения тепловых источников света рассматривается в [17].

В настоящей работе теоретически обосновывается гипотеза о мгновенных спекл-структурах, образующихся в частично когерентном волновом поле. С помощью численных расчетов и моделирования мгновенных спекл-структур исследуются продольные когерентные свойства частично когерентных волновых полей с широкими частотным и угловым спектрами, анализируются их корреляционные свойства в направлении распространения поля.

## Мгновенные спекл-структуры в пространственно частично когерентном волновом поле

В волновой оптике рассматриваются самосветящиеся первичные и в соответствии с принципом Гюенса-Френеля вторичные протяженные источники света. В качестве вторичного протяженного источника света, в частности, могут рассматриваться рассеиватели, освещаемые волновым полем с теми или иными когерентными свойствами. При когерентном освещении рассеивателя, когда элементарные рассеянные волны — вторичные волны — оказываются взаимно когерентными и интерferируют в той или иной точке пространства, в рассеянном волновом поле формируется нерегулярная интерференционная структура — спекл-структура, имеющая явно выраженный стохастический характер в силу случайного пространственного расположения рассеивающих центров и/или их случайных оптических свойств [18–20].

Такие спекл-структуры имеют стационарный характер, если рассеиватель неподвижен в целом и неизменны во времени его элементарные рассеивающие центры. В противном случае в рассеянном поле формируется динамическая спекл-структура [20–23], изменение которой приобретает стохастический характер при стохастическом изменении рассеивающих центров.

Аналогичные стационарные спекл-структуры должны возникать в поле излучения первичного самосветящегося протяженного источника при физически нереализуемом условии его строгой монохроматичности — одночастотности, когда все элементарные излучатели такого источника неподвижны и излучают строго монохроматические волны одной частоты. В противном случае, что всегда имеет место на практике, излучатели испускают немонахроматические волны и разной частоты, и в излучении такого источника возникает динамическая спекл-структура, которая имеет стохастический характер с временем флуктуаций (временем когерентности)  $\tau_c$ , обратно пропорциональным ширине  $\Delta\omega$  частотного спектра такого излучения,  $\tau_c \approx 2\pi/\Delta\omega$  [1–3]. В течение

времени когерентности  $\tau_c$  разность фаз волн от разных излучателей остается приблизительно постоянной — не изменяется больше чем на  $2\pi$  rad. Поэтому эти волны в течение времени когерентности складываются в разных точках пространства с теми или иными почти постоянными фазовыми соотношениями, увеличивая или уменьшая амплитуду суммарного возмущения поля, что приводит к эффекту пространственного перераспределения энергии суммарных волновых возмущений — к их интерференции и образованию мгновенной спекл-структуры в поле излучения. По истечении времени когерентности  $\tau_c$  существенно изменяются фазовые соотношения волн от элементарных излучателей, и, как следствие, стохастически изменяется пространственное распределение мгновенной интенсивности волнового поля — меняется реализация мгновенной спекл-структуры. Таким образом, в частично когерентном волновом поле протяженного частотно широкополосного источника света возникает динамическая мгновенная спекл-структура.

Изменяющаяся во времени мгновенная спекл-структура фактически определяет пространственные когерентные свойства волнового поля в зависимости от параметров его частотного и углового спектров. В частности, поперечные  $\varepsilon_{\perp}$  и продольные  $\varepsilon_{\parallel}$  длины корреляции спекл-структуры (размеры спеклов) определяют соответственно длины поперечной  $R_{\perp}$  и продольной  $L_c$  пространственной когерентности поля:  $R_{\perp} \approx \varepsilon_{\perp}$ ,  $L_c \approx \varepsilon_{\parallel}$ .

Поперечная длина когерентности  $R_{\perp}$  в основном определяется шириной углового спектра  $\theta$  волнового поля [1–3], и только при достаточно широком частотном спектре может проявиться зависимость от ширины частотного спектра [7–9]:

$$R_{\perp} \approx \frac{\lambda_0^2}{(2\lambda_0 + \Delta\lambda) \sin \theta} \approx \frac{\lambda_0}{2 \sin \theta} \approx \frac{\lambda_0}{2\theta}, \quad (1)$$

где  $\lambda_0$  — средняя длина волны,  $\Delta\lambda$  — ширина частотного спектра в шкале длин волн.

Продольная длина когерентности  $L_c$ , напротив, может преимущественно определяться или шириной частотного  $\Delta\lambda$ , или шириной углового  $\theta$  спектров поля, или одновременно и в равной степени шириной обоих этих спектров [5–8,10]:

$$L_c \approx \left[ \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2}{\lambda_0} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-1} \approx \left[ \frac{1}{l_c} + \frac{1}{\rho_{\parallel}} \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $l_c \approx c\tau_c \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda$  — длина временной когерентности волнового поля,  $c$  — скорость света,

$$\rho_{\parallel} \approx \lambda_0/2 \sin^2(\theta/2) \approx 2\lambda_0/\theta^2 \quad (3)$$

— длина продольной когерентности, преимущественно определяемая параметрами углового спектра поля при  $l_c \gg \rho_{\parallel}$ .

Следовательно, длина мгновенных спеклов  $\varepsilon_{\parallel}$  — продольная длина корреляции спекл-структуры — должна

определяться в соответствии с выражением (2) или шириной частотного спектра поля, или шириной его углового спектра, или одновременно и шириной частотного и шириной углового спектров поля.

При  $l_c \ll \rho_{\parallel}$  полагается, что  $l_c$  и  $\rho_{\parallel}$  отличаются примерно в 10 и более раз [8], длина мгновенных спеклов  $\varepsilon_{\parallel}$  определяется не шириной углового спектра волнового поля, а шириной его частотного спектра, поскольку в этом случае продольная длина корреляции флуктуаций поля ограничивается длиной волновых цугов возмущений поля. Следующие друг за другом в пространстве и во времени волновые цуги отличаются случайной фазой и случайной амплитудой, а значит и мгновенной интенсивностью, монотонно изменяющейся в пределах одного цуга. Ограниченные в поперечном направлении шириной углового спектра, а в продольном направлении — длиной временной когерентности  $l_c$ , мгновенные спеклы в процессе распространения поля движутся в направлении его распространения, постепенно испытывая частичную декорреляцию. Полная декорреляция возникает при распространении спеклов на расстояние  $\Delta z$ , равное длине продольной когерентности поля  $\rho_{\parallel}$ , определяемой, согласно (3), шириной его углового спектра  $\theta$ . Эту длину продольной когерентности  $\rho_{\parallel}$  следует рассматривать в качестве длины коррелированного распространения отдельных волновых возмущений, волновых цугов в целом, ограниченных длиной временной когерентности, а также и мгновенных спеклов поля.

Ниже представлены результаты численного исследования этого эффекта распространения и декорреляции мгновенных спеклов в процессе их распространения в частично когерентном поле со сравнительно малой длиной временной когерентности  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ .

В волновом поле с относительно узким частотным спектром и достаточно широким угловым спектром, когда  $l_c \gg \rho_{\parallel}$  ( $l_c$  превышает  $\rho_{\parallel}$  примерно в 10 и более раз [8]), характер пространственно-временного изменения мгновенных спекл-структур качественно отличается от вышерассмотренного случая, когда  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ . При  $l_c \gg \rho_{\parallel}$  длина продольной когерентности  $L_c$  волнового поля, согласно (2), ограничивается не длиной временной когерентности  $l_c$ , а длиной продольной когерентности  $\rho_{\parallel}$ , определяемой только параметрами углового спектра поля — преимущественно шириной углового спектра  $\theta$ . В этом случае длина мгновенных спеклов, а также и длина волновых цугов ограничиваются шириной углового спектра поля  $\theta$ . Это означает, что мгновенные спеклы и волновые цуги в целом не имеют какого-либо коррелированного распространения. Частично коррелированное распространение испытывают только отдельные возмущения волнового поля и только внутри спеклов на расстояние  $\Delta z$ , не превышающее длину когерентности  $\rho_{\parallel}$ . Возмущения, пробежавшие длину спекла  $\rho_{\parallel}$ , претерпевают фазовый набег, случайная составляющая которого примерно равна  $2\pi \text{ rad}$ , так что возникает полная декогерентность этих возмущений поля. Сами

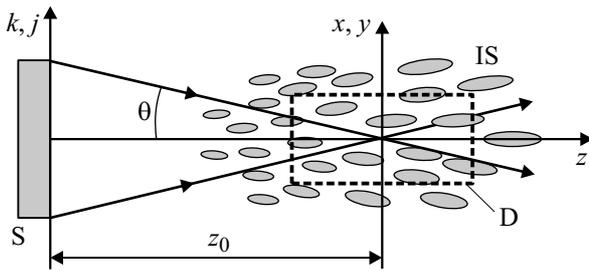
же мгновенные спеклы за время когерентности  $\tau_c$  испытывают полную декорреляцию, не перемещаясь вдоль распространения поля, как это происходит в частотно широкополосном волновом поле при  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ .

Мгновенные спекл-структуры в частично когерентном световом поле могут быть экспериментально наблюдаемы только при условии предельно высокой степени монохроматичности поля, поскольку для этого требуется время реакции фотодетектора  $\tau_{\text{ph}}$ , существенно меньшее времени когерентности  $\tau_c$ ,  $\tau_{\text{ph}} \ll \tau_c \approx 2\pi/\Delta\omega$ , которое определяет время квазистационарности мгновенной спекл-структуры. В излучении с достаточно широким частотным спектром такие спекл-структуры оказываются экспериментально ненаблюдаемыми в силу малости  $\tau_c$  и относительно большого времени  $\tau_{\text{ph}}$  существующих технических фотодетекторов. Однако мгновенные спекл-структуры могут быть численно смоделированы и исследованы качественно и количественно с использованием интегральных дифракционных преобразований полей [24,25], что сделано в настоящей работе и представлено ниже.

## Численное моделирование мгновенных спекл-структур в частично когерентном волновом поле в ближней области дифракции

Пространственно частично когерентное волновое поле создается протяженным пространственно некогерентным или частично когерентным полихроматическим источником света [1,2]. В качестве самосветящихся пространственно некогерентных источников могут рассматриваться тепловые источники света, газоразрядные лампы, светодиоды и т.д., имеющие широкий частотный спектр излучения. В качестве частично когерентных источников на практике могут рассматриваться вторичные источники света, например тонкий рассеиватель или зрачок оптической системы, на которые падает пространственно частично когерентное волновое поле. В дифракционной области и тех, и других источников формируется пространственно частично когерентное волновое поле с ограниченными длинами пространственной когерентности и соответственно ограниченным объемом когерентности, которые определяются и шириной углового спектра, и шириной частотного спектра этого поля [8].

Корреляционные свойства таких волновых полей могут быть качественно и количественно исследованы с помощью численных расчетов пространственно-временных распределений возмущений волновых полей  $E(x, y, z, t)$  в ближней или дальней областях дифракции с использованием соответствующих дифракционных преобразований граничного поля источника в скалярном приближении [24,25]. В настоящей работе исследовались пространственные распределения мгновенной интенсивности дифракционного поля  $I(x, y, z, t) \sim |E(x, y, z, t)|^2$



**Рис. 1.** Схема формирования исследуемого волнового поля в ближней области дифракции: S — протяженный источник света, D — область наблюдения мгновенной спекл-структуры IS.

в ближней области дифракции, где волновое поле с широким частотным спектром возмущений может иметь достаточно широкий угловой спектр, влияющий на продольные когерентные свойства поля. На рис. 1 приведена оптическая схема формирования исследуемого волнового поля, которой мы придерживались при расчетах возмущений поля в ближней области дифракции.

Численные расчеты комплексной амплитуды  $U(x, y, z, \lambda)$  скалярных возмущений монохроматического волнового поля  $E(x, y, z, \lambda, t) = U(x, y, z, \lambda) \exp(i2\pi ct/\lambda)$  с длиной волны  $\lambda$  в ближней области дифракции производились с использованием дифракционного интеграла Френеля–Кирхгоффа [24,25]. В дискретной форме для полного возмущения  $E(x, y, z, t)$  полихроматического поля в определенном диапазоне длин волн  $[\lambda_0 - \Delta\lambda/2, \lambda_0 + \Delta\lambda/2]$  можно записать следующее выражение:

$$E(x, y, z, t) = \sum_{\lambda_0 - \Delta\lambda/2}^{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} U(x, y, z, \lambda) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} ct\right) = \sum_{\lambda_0 - \Delta\lambda/2}^{\lambda_0 + \Delta\lambda/2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} P(k, j) A(k, j, \lambda) \exp(i\Delta\varphi(k, j, \lambda)) \frac{1}{i\lambda} \times \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (R(k, j; x, y, z) + ct)\right)}{R(k, j; x, y, z)} \cos(\mathbf{nR}(k, j; x, y, z)), \quad (4)$$

где  $A(k, j, \lambda)$  и  $\Delta\varphi(k, j, \lambda)$  — пространственные распределения амплитуды и фазы граничного поля источника,  $P(k, j)$  — бинарная апертурная функция источника, определяющая его форму и размеры:  $P(k, j) = 1$  в пределах источника и равна 0 за его пределами,  $R(k, j; x, y, z)$  — расстояние от квазиточечного элементарного излучателя источника с координатами  $(k, j)$  до точки наблюдения с координатами  $(x, y, z)$ ,  $R = \sqrt{(x - k)^2 + (y - j)^2 + z^2}$ ,  $\cos(\mathbf{nR})$  — косинус угла между направлением внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности источника и вектором  $\mathbf{R}(k, j; x, y, z)$ , соединяющим точки с координатами  $(k, j)$  и  $(x, y, z)$ , ось  $z$  проходит

через центр апертуры источника,  $M \times N$  — размер матрицы дискретных отсчетов в плоскости источника.

Для численного моделирования волнового поля излучения протяженного источника в вышеописанном представлении источник необходимо рассматривать как совокупность квазиточечных источников в плоскости  $(k, j)$ , излучающих элементарные сферические волны с длиной волн в интервале  $[\lambda_0 - \Delta\lambda/2, \lambda_0 + \Delta\lambda/2]$  со случайными начальными фазами, равномерно распределенными в интервале  $[0, 2\pi]$ , и со случайными амплитудами, распределенными по релеевскому закону [2]. Для задания конечных размеров апертуры источника и ее формы пространственное распределение комплексной амплитуды граничного поля  $U(k, j, \lambda) = A(k, j, \lambda) \exp(\Delta\varphi(k, j, \lambda))$  модулируется бинарной функцией  $P(k, j)$ , равной 1 в пределах апертуры определенной формы и 0 за ее пределами.

Начальная фаза элементарных волн  $\Delta\varphi(k, j, \lambda)$  определялась в виде дискретного массива случайных величин  $\Delta\varphi(k, j, \lambda) = 2\pi h(k, j, \lambda)$ , где случайная величина  $h(k, j, \lambda)$  задавалась статистически равномерно распределенной от 0 до 1, что соответственно определяет статистически равномерное распределение фазы поля элементарных излучателей источника в интервале  $[0, 2\pi]$ . Поскольку определяющее значение для структуры дифракционного поля имеют не столько амплитуды элементарных волн, сколько их фазы, то при численных расчетах действительная амплитуда  $A(k, j, \lambda)$  для упрощения расчетов полагалась не случайной, а детерминированной величиной, постоянной в пределах апертуры источника. Также для упрощения расчетов полагалось, что частотный спектр излучения равномерный ( $A(\lambda) = \text{const}$ ) в интервале  $[\lambda_0 - \Delta\lambda/2, \lambda_0 + \Delta\lambda/2]$ .

Путем изменения величины времени  $t$  или, что существенно проще и нагляднее, слагаемого  $ct$  в показателе экспоненты в (4) задавалась динамика пространственного изменения дифракционного поля — распространение отдельных возмущений поля, распространение и/или декорреляционные изменения мгновенных спекл-структур.

С точки зрения конкурентного влияния ширины частотного и ширины углового спектров волнового поля на его пространственно-временные когерентные свойства важно рассмотреть два предельных случая: 1) когда длина продольной когерентности поля  $L_c$  преимущественно определяется шириной частотного спектра  $\Delta\lambda$  и равна длине временной когерентности  $L_c \approx l_c$ , 2) когда  $L_c$  преимущественно определяется шириной углового спектра  $\theta$  и равна  $\rho_{\parallel}$ ,  $L_c \approx \rho_{\parallel}$ . В соответствии с (2) в первом случае  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ , а во втором  $l_c \gg \rho_{\parallel}$ .

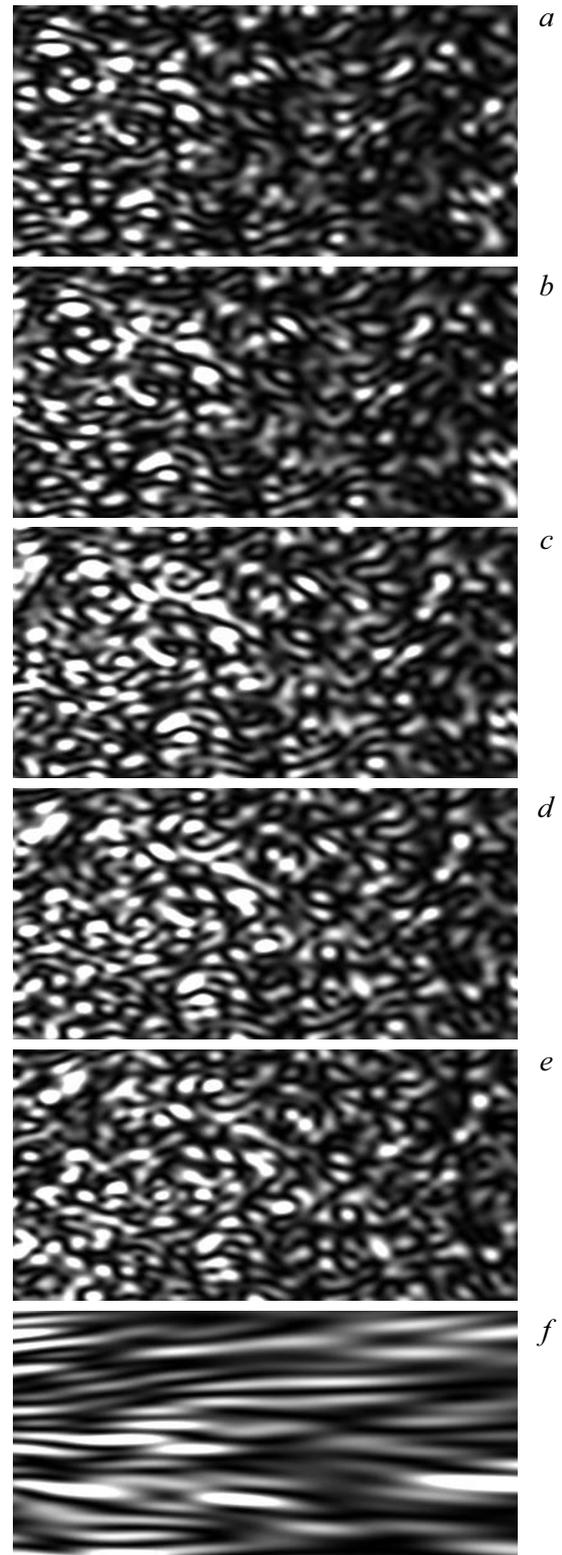
### Мгновенные спекл-структуры в частотно широкополосном поле с узким угловым спектром ( $l_c \ll \rho_{\parallel}$ )

В экспериментальной практике часто используются направленные пучки частично когерентного света, ко-

торые имеют достаточно узкий угловой спектр при относительно широком частотном спектре, когда выполняется соотношение  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ . В этом случае длина продольной когерентности практически равна длине временной когерентности  $L_c \approx l_c$ , а длина когерентности  $\rho_{\parallel}$  определяет длину коррелированного распространения волновых пучков. В рамках представления о мгновенных спекл-структурах длина временной когерентности  $l_c$  определяет продольную длину корреляции мгновенной спекл-структуры — длину мгновенных спеклов, а длина когерентности  $\rho_{\parallel}$  должна определять в этом случае длину коррелированного распространения мгновенной спекл-структуры — длину коррелированного распространения мгновенных спеклов. Численное моделирование мгновенных спекл-структур с использованием (4) подтверждает эти представления.

При численном моделировании мгновенных спекл-структур в соответствии с оптической схемой рис. 1 предполагались следующие параметры схемы, источника и его излучения. Использовалась квадратная форма апертуры источника, размеры источника и расстояние до области наблюдения спекл-структуры — угловые размеры источника  $2\theta$  задавались такими, чтобы в пределах области наблюдения укладывалось достаточно большое число спеклов в поперечном и продольном направлениях и чтобы спеклы уверенно разрешались. Размер матрицы дискретных отсчетов  $M \times N$  в плоскости источника варьировался в пределах от  $100 \times 100$  до  $600 \times 600$ , размеры области наблюдения в отсчетах составляли  $200 \times 400$  отсчетов. Центральная длина волны излучения  $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ , ширина частотного спектра  $\Delta\lambda$  варьировалась от  $10^{-5} \mu\text{m}$  для квазимонохроматического света до  $\Delta\lambda \approx 0.2 \mu\text{m}$ , что соответствует ширине частотного контура видимого белого света.

На рис. 2 представлены получаемые в результате численного моделирования пространственные распределения мгновенной интенсивности волнового поля в его продольном сечении — в плоскости  $(x, z)$ , рассчитанные для различных моментов времени  $t$  (рис. 2, *a–e*). Градациями серого на этих изображениях отображены пространственные изменения мгновенной интенсивности поля  $I(x, z)$ . Области с повышенной мгновенной интенсивностью и соответственно большой амплитудой возмущений — продольные спеклы поля — на изображениях представлены светлыми. Фактически на рис. 2 представлены изображения мгновенных спекл-структур в продольном сечении волнового поля. На рис. 2, *a–e* представлены мгновенные спекл-структуры в полихроматическом излучении ( $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda = 0.2 \mu\text{m}$ ), рассчитанные для различных моментов времени  $t$  в процессе распространения поля при  $l_c \ll \rho_{\parallel}$  ( $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 12 \mu\text{m}$ ), а на рис. 2, *f* представлено изображение квазимонохроматической ( $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda = 10^{-5} \mu\text{m}$ ) мгновенной спекл-структуры, образующейся при  $l_c \gg \rho_{\parallel} \approx 12 \mu\text{m}$ . Такая квазимонохроматическая спекл-структура (рис. 2, *f*) рассматривалась для определения корреляционной функции



**Рис. 2.** Мгновенные спекл-структуры в продольном сечении  $x, z$  частично когерентного волнового поля ( $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ): *a–e* —  $l_c \ll \rho_{\parallel}$  ( $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 12 \mu\text{m}$ ); *f* —  $l_c \gg \rho_{\parallel} \approx 12 \mu\text{m}$ ; *a* —  $ct = 0$ , *b* —  $ct = 1.5 \mu\text{m}$ , *c* —  $ct = 3 \mu\text{m}$ , *d* —  $ct = 4.5 \mu\text{m}$ , *e* —  $ct = 6 \mu\text{m}$ ; размер области наблюдения  $20 \times 40 \mu\text{m}$ .

распространения мгновенных спеклов и соответственно для определения длины  $\rho_{\parallel}$  коррелированного распространения мгновенных спекл-структур в полихроматическом излучении (рис. 2, *a-e*).

На рис. 2, *a-e* отчетливо прослеживается смещение слева направо по ходу распространения поля спекл-структуры в целом и отдельных ее элементов (спеклов) в продольном направлении — вдоль оси  $z$ , определяющей направление распространения света (рис. 1), при постепенном видоизменении структуры и отдельных спеклов, что обусловлено нарастающей декорреляцией спекл-структуры (нарастающей декогерентностью) в процессе распространения волнового поля.

Эффекты распространения мгновенной спекл-структуры и эффекты ее декорреляции можно выявить и количественно определить с помощью функций корреляции пространственных распределений мгновенной интенсивности  $I_1(x, z)$  и  $I_2(x, z)$  спекл-структуры, образующихся в различные моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  (рис. 2, *a-e*).

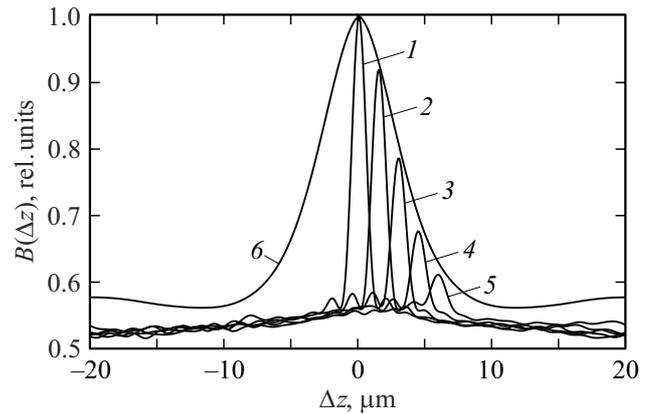
Функции автокорреляции  $B_{11}(\Delta x, \Delta z)$  и взаимной корреляции  $B_{12}(\Delta x, \Delta z)$  спекл-структур в продольном ( $x, z$ ) сечении поля с распределениями интенсивностей  $I_1(x, z)$  и  $I_2(x, z)$  можно определить в приближении статистической однородности этих распределений, используя свойства преобразования Фурье [25,26], с помощью следующих выражений:

$$B_{11}(\Delta x, \Delta z) = \sum_{x=1}^N \sum_{z=1}^M I_1(x, z) I_1(x - \Delta x, z - \Delta z) \times \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F}(I_1(x, z)) \mathbf{F}^*(I_1(x, z)) \}, \quad (5)$$

$$B_{12}(\Delta x, \Delta z) = \sum_{x=1}^N \sum_{z=1}^M I_1(x, z) I_2(x - \Delta x, z - \Delta z) \times \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F}(I_1(x, z)) \mathbf{F}^*(I_2(x, z)) \}, \quad (6)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta z$  — величины взаимного смещения распределений мгновенной интенсивности вдоль осей координат  $x$  и  $z$ ,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}^{-1}$  — символы прямого и обратного двумерных преобразований Фурье.

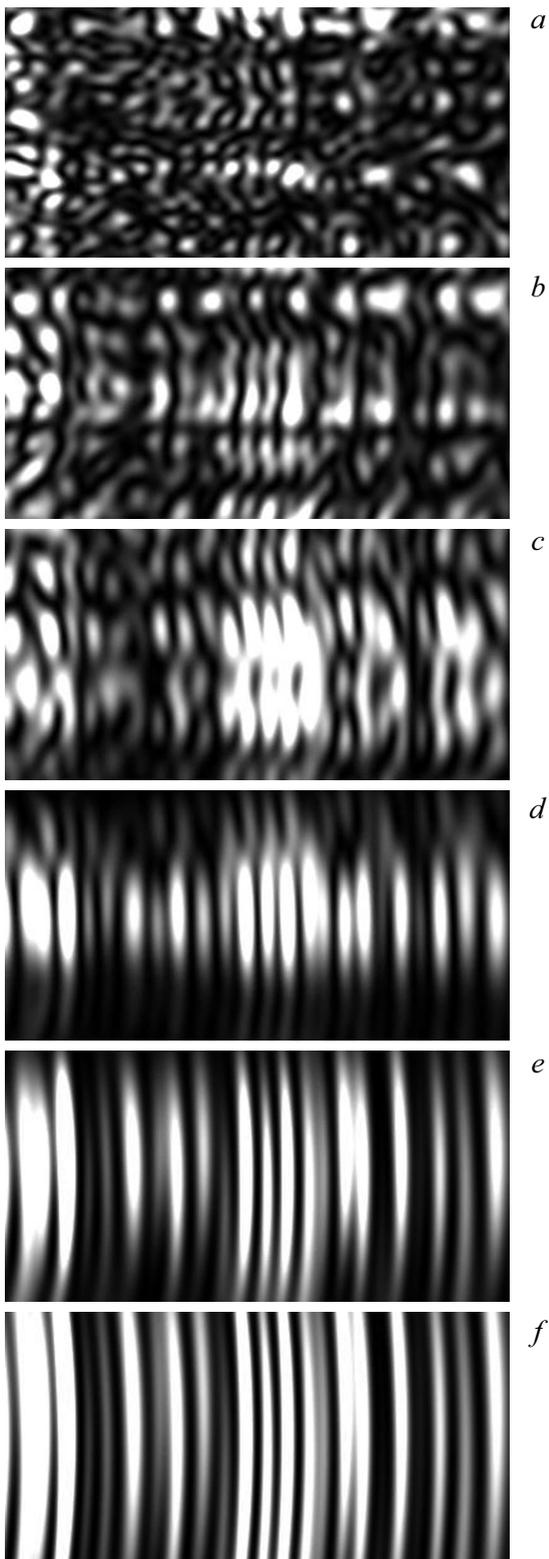
На рис. 3 представлены графики нормированных функций продольной корреляции  $B(\Delta x = 0, \Delta z) = B(\Delta z)$  — автокорреляции (кривые 1 и 6) и взаимной корреляции (кривые 2–5) спекл-структур в продольном ( $x, z$ ) сечении волнового поля, отдельные реализации которых представлены на рис. 2. Ширина кривой функции автокорреляции 1 определяется длиной мгновенных спеклов, ограничиваемой (в рассматриваемом случае  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ ) длиной временной когерентности поля  $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$ . Смещение максимумов взаимной корреляции на кривых 2–5 относительно кривой автокорреляции 1 показывает эффект смещения мгновенных спекл-структур в процессе распространения волнового поля, а снижение величины максимумов с увеличением смещения  $\Delta z$  показывает эффект декорреляции спекл-структуры в процессе ее



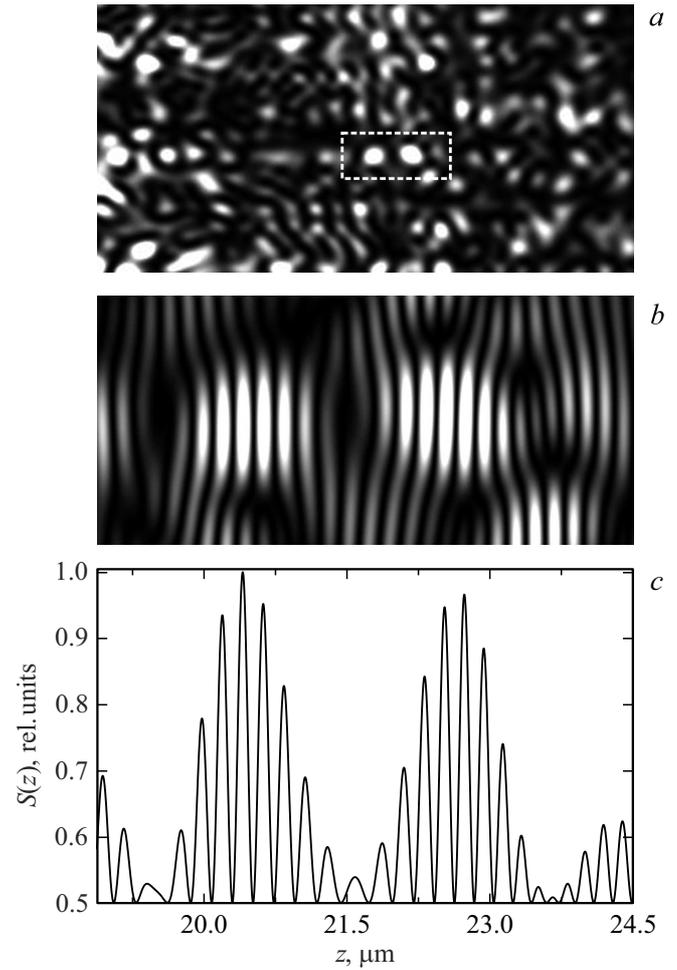
**Рис. 3.** Нормированные функции автокорреляции (кривые 1 и 6) и взаимной корреляции (кривые 2–5), усредненные по 10 парам реализаций мгновенных спекл-структур, рассчитанные по различным реализациям граничного поля источника: 1 — функция автокорреляции спекл-структуры при  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 12 \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$  (рис. 2, *a*); 2–5 — функции взаимной корреляции пар спекл-структур при  $t = 0$  и  $t = \Delta t$  (рис. 2, *a-e*): 2 —  $c\Delta t = 1.5 \mu\text{m}$ , 3 —  $c\Delta t = 3 \mu\text{m}$ , 4 —  $c\Delta t = 4.5 \mu\text{m}$ , 5 —  $c\Delta t = 6 \mu\text{m}$ ; 6 — автокорреляционная функция квази-монохроматической спекл-структуры при  $l_c \gg \rho_{\parallel}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 12 \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 30 \text{mm}$  (рис. 2, *f*).

распространения. Огибающей максимумов (кривая 6), как и ожидалось из теоретических представлений, служит функция автокорреляции квази-монохроматических спекл-структур (рис. 2, *f*), образующихся в поле при той же ширине углового спектра  $\theta$ , но при существенно более узком частотном спектре  $\Delta\lambda$ , когда  $l_c \gg \rho_{\parallel}$  и продольная когерентность поля ограничивается длиной когерентности  $\rho_{\parallel}$ , определяемой шириной углового спектра.

Поперечные размеры мгновенных спеклов  $R_{\perp}$  определяются, согласно (1), преимущественно шириной  $\theta$  углового спектра волнового поля. Если изменять ширину углового спектра поля с длиной когерентности  $L_c$ , определяемой шириной его частотного спектра  $\Delta\lambda$ ,  $L_c \approx l_c$ , то это повлечет изменение поперечных размеров спеклов при неизменной их продольной длине, ограничиваемой  $l_c$ . На рис. 4 показано, как трансформируются изображения мгновенных спеклов в продольном ( $x, z$ ) сечении поля при уменьшении угловых размеров источника  $\theta$  при неизменной ширине частотного спектра  $\Delta\lambda$ . С уменьшением  $\Delta\lambda$  спеклы вытягиваются в поперечном направлении ( $R_{\perp} \gg L_c \approx l_c$ ), превращаясь в пределе, когда источник становится почти точечным ( $\theta \approx 0$ ,  $R_{\perp} \approx \infty$ ), в слои квазисферической формы толщиной  $l_c$  с центром на источнике (рис. 4, *e, f*). При моделировании изображений мгновенных спекл-структур расстояние  $z_0$  от источника до области наблюдения, равное  $130 \mu\text{m}$ , выбиралось таким, чтобы была заметна кривизна слоев квазисферической формы при малых размерах источника (рис. 4, *e, f*).



**Рис. 4.** Мгновенные спекл-структуры в продольном сечении  $(x, z)$  частично когерентного волнового поля при  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ ,  $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$ :  $a - \theta \approx 0.23 \text{ rad}$ ,  $b - \theta \approx 0.15 \text{ rad}$ ,  $c - \theta \approx 0.077 \text{ rad}$ ,  $d - \theta \approx 0.038 \text{ rad}$ ,  $e - \theta \approx 0.015 \text{ rad}$ ,  $f - \theta \approx 0.0077 \text{ rad}$ ; размер области наблюдения  $20 \times 40 \mu\text{m}$ ; расстояние  $z_0$  от источника до области наблюдения  $130 \mu\text{m}$ .

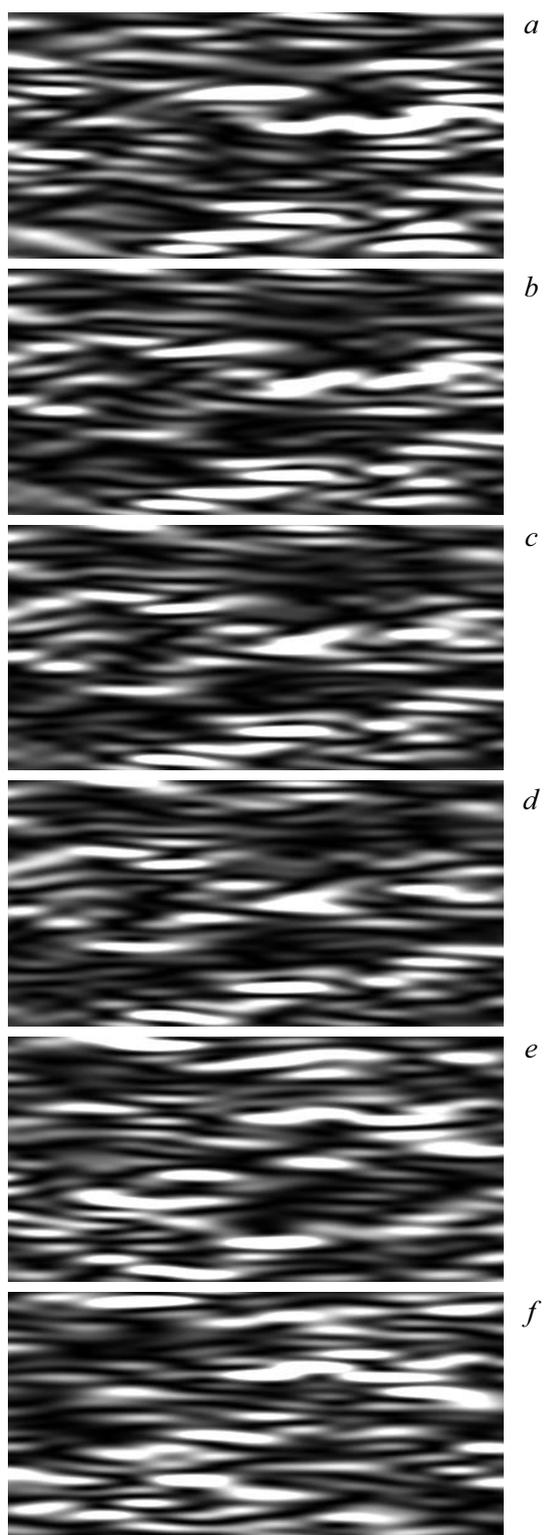


**Рис. 5.** Мгновенная продольная спекл-структура волнового поля при  $l_c \ll \rho_{\parallel}$  ( $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 21 \mu\text{m}$ ), размер области наблюдения  $20 \times 40 \mu\text{m}$  ( $a$ );  $b$  — изображение пространственного распределения объемной плотности энергии поля  $S(z)$  в продольном  $(x, z)$  сечении в выделенной на рис. 5  $a$  области размером  $2.4 \times 5 \mu\text{m}$ ;  $c$  — график распределения  $S(z)$  вдоль оси  $z$ .

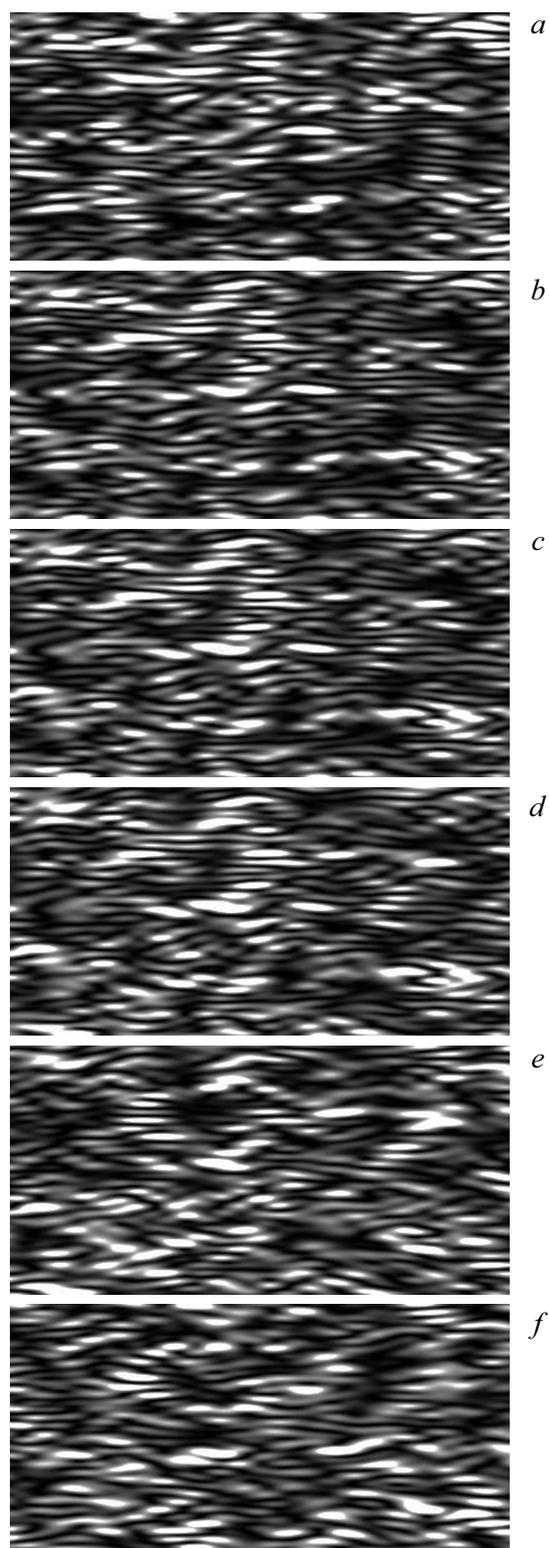
Мгновенные спеклы имеют внутреннюю осциллирующую энергетическую структуру — объемную плотность потока энергии  $S(z) \sim [\text{Re}\{E(z)\}]^2$  — с пространственным периодом осцилляций  $\Lambda_S$ , определяемым параметрами и частотного, и углового спектров волнового поля [7]:

$$\Lambda_S \approx \frac{\lambda_0}{2} \left( \cos^2(\theta/2) + \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \sin^2(\theta/2) \right)^{-1}. \quad (7)$$

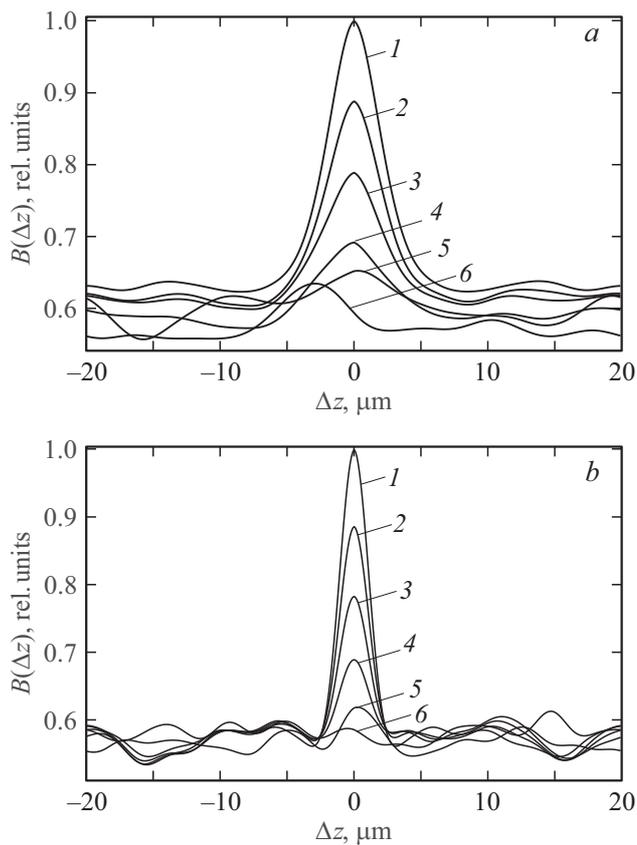
На рис. 5,  $a$  представлено изображение мгновенной спекл-структуры  $I(x, z)$  в продольном сечении волнового поля с длинами продольной когерентности  $l_c \ll \rho_{\parallel}$ ,  $l_c \approx 1.5 \mu\text{m}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 21 \mu\text{m}$ , а на рис. 5,  $b$  для этого же поля в увеличенном масштабе представлено изображение пространственного распределения объемной плотности потока энергии  $S(x, z)$  в пределах области, отмеченной



**Рис. 6.** Мгновенные спекл-структуры в продольном ( $x, z$ ) сечении узкополосного волнового поля с широким угловым спектром ( $l_c \gg \rho_{\parallel}$ ,  $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 75.6 \mu\text{m}$ ,  $\theta = 0.36 \text{ rad}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 8.6 \mu\text{m}$ ) в различные моменты времени:  $a - ct = 0$ ,  $b - ct = 20 \mu\text{m}$ ,  $c - ct = 30 \mu\text{m}$ ,  $d - ct = 40 \mu\text{m}$ ,  $e - ct = 70 \mu\text{m}$ ,  $f - ct = 100 \mu\text{m}$ ; размер области наблюдения  $20 \times 40 \mu\text{m}$ .



**Рис. 7.** Мгновенные спекл-структуры в продольном ( $x, z$ ) сечении узкополосного волнового поля ( $l_c \gg \rho_{\parallel}$ ,  $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 75.6 \mu\text{m}$ ,  $\theta = 0.54 \text{ rad}$ ,  $\rho_{\parallel} \approx 3.9 \mu\text{m}$ ) в различные моменты времени:  $a - ct = 0$ ,  $b - ct = 20 \mu\text{m}$ ,  $c - ct = 30 \mu\text{m}$ ,  $d - ct = 40 \mu\text{m}$ ,  $e - ct = 70 \mu\text{m}$ ,  $f - ct = 100 \mu\text{m}$ ; размер области наблюдения  $20 \times 40 \mu\text{m}$ .



**Рис. 8.** Функции автокорреляции (кривые 1) и взаимной корреляции (кривые 2–6) мгновенных спекл-структур волновых полей ( $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 75.6 \mu\text{m}$ ) с различной шириной  $\theta$  углового спектра: *a* —  $\theta = 0.36 \text{ rad}$ ,  $\rho_{||} \approx 8.6 \mu\text{m}$ , *b* —  $\theta = 0.54 \text{ rad}$ ,  $\rho_{||} \approx 3.9 \mu\text{m}$ ; 1 —  $c\Delta t = 0 \mu\text{m}$ , 2 —  $c\Delta t = 20 \mu\text{m}$ , 3 —  $c\Delta t = 30 \mu\text{m}$ , 4 —  $c\Delta t = 40 \mu\text{m}$ , 5 —  $c\Delta t = 70 \mu\text{m}$ , 6 —  $c\Delta t = 100 \mu\text{m}$ .

рамкой на рис. 5, *a*, и в графической форме на рис. 5, *c* представлено пространственное распределение  $S(z)$  в направлении распространения поля.

Таким образом, с помощью численного моделирования подтверждаются гипотеза и представления о возникновении и распространении мгновенных спекл-структур в частично когерентном поле, об эффекте их декорреляции в процессе распространения и о длине коррелированного распространения, определяемой шириной углового спектра волнового поля, продольная когерентность которого ограничивается шириной его частотного спектра.

### Мгновенные спекл-структуры в частотно узкополосном поле с широким угловым спектром ( $l_c \gg \rho_{||}$ )

В волновом поле с узким частотным спектром и достаточно широким угловым спектром длина продольной когерентности волнового поля  $L_c$  определяется

шириной углового спектра  $\theta$ ,  $L_c \approx \rho_{||}$ . Следовательно, и длина мгновенных спеклов поля также ограничивается шириной углового спектра и равна  $\rho_{||}$ . На рис. 6 и 7 представлены рассчитанные изображения мгновенных спеклов в продольном сечении поля, полученные при одной и той же ширине частотного спектра  $\Delta\lambda = 4 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ,  $l_c \approx 75.6 \mu\text{m}$ , но при разной ширине  $\theta$  углового спектра и соответственно разной длине когерентности  $\rho_{||}$ : рис. 6 —  $\theta = 0.36 \text{ rad}$ ,  $\rho_{||} \approx 8.6 \mu\text{m}$ , рис. 7 —  $\theta = 0.54 \text{ rad}$ ,  $\rho_{||} \approx 3.9 \mu\text{m}$ . Отчетливо видно, что с увеличением ширины углового спектра уменьшается и поперечная, и продольная длины спеклов. Различия в продольной длине мгновенных спеклов количественно можно определить по ширине автокорреляционных функций (5) спекл-структур. На рис. 8, *a, b* представлены автокорреляционные функции спекл-структур (кривые 1), показанных на рис. 6 и 7, по которым можно оценить продольную длину спеклов  $\rho_{||}$ .

Ограничение длины мгновенных спеклов шириной углового спектра принципиально меняет характер пространственно временной динамики мгновенной спекл-структуры волнового поля. В этом случае спекл-структура не смещается в продольном направлении — отсутствует эффект ее распространения, как это происходит при  $l_c \ll \rho_{||}$ , а испытывает в течение времени  $t$  декорреляционные изменения — происходит бурление (кипение) спеклов в продольном сечении поля. На рис. 6, *a-f* и 7, *a-f* представлены изображения спекл-структур, образующихся в разные моменты времени, на которых, как это можно видеть, никак не проявляется продольное смещение спеклов — слева направо. Взаимно корреляционные функции этих спекл-структур (рис. 8) также не показывают их смещение — максимумы этих функций практически не смещаются. Наблюдается взаимная декорреляция спекл-структур с течением времени, о чем свидетельствует уменьшение максимумов функции взаимной декорреляции (рис. 8, кривые 2–6). Отметим, что максимум взаимной корреляции становится практически нулевым (возникает почти полная декорреляция) при  $ct = 70 \mu\text{m}$ , что примерно равно заданной длине временной когерентности рассматриваемого поля  $l_c \approx 75.6 \mu\text{m}$ .

### Заключение

В настоящей работе показано, что в частично когерентном оптическом волновом поле формируются изменяющиеся во времени мгновенные спекл-структуры, определяющие пространственно-временные флуктуации поля и соответственно его пространственные когерентные свойства. С помощью численного расчета волновых возмущений в ближней области дифракции поля излучения протяженного источника света исследованы корреляционные свойства пространственного распределения мгновенной интенсивности волнового поля в направлении его распространения. Показано, что

в продольном направлении дифракционного поля (в направлении его распространения) длина корреляции мгновенной интенсивности (длина мгновенных спеклов) может определяться или шириной частотного спектра поля, или шириной его углового спектра, или совместно и шириной частотного, и шириной углового спектров поля. Последняя ситуация напрямую не анализировалась в настоящей работе, однако такой вывод можно сделать по аналогии с продольной пространственной когерентностью поля, где такая зависимость показана теоретически и подтверждена натурным экспериментом [6–8], рассмотрев два предельных случая, когда длина мгновенных спеклов определяется либо только шириной частотного спектра поля, либо только его угловым спектром. Эти два рассмотренных в работе предельных случая важны, поскольку характер формирования мгновенных спекл-картин и их изменения в процессе распространения волнового поля для этих двух предельных случаев различается существенным образом.

В случае частотно широкополосного волнового поля, когда длина спеклов ограничивается длиной временной когерентности, мгновенная спекл-структура поля распространяется в пространстве как целое, испытывая декорреляционные изменения в процессе распространения на расстояние, определяемое шириной углового спектра поля. Объемные спеклы волнового поля в этом случае можно рассматривать в качестве объемных волновых цугов поля, распространяющихся в пространстве в волновом поле.

Если поле имеет относительно узкий частотный спектр, но достаточно широкий угловой спектр, то длина мгновенных спеклов определяется шириной углового спектра. В этом случае спекл-структура поля испытывает декорреляционные изменения без распространения в пространстве как целое, а длина продольных спеклов определяет продольную длину когерентности волнового поля.

Корреляционный анализ численно смоделированных мгновенных спекл-структур подтвердил различия в процессах формирования и распространения в пространстве флуктуаций волнового поля для двух рассмотренных предельных случаев и тем самым подтвердил предложенную ранее в [8] гипотезу о подобных различиях.

Таким образом, можно сказать, что представления о мгновенных спекл-структурах волнового поля и о зависимостях их параметров от частотного и углового спектров поля не только позволяют в физически наглядной образной форме проводить качественный анализ, но и дают возможность осуществлять количественные оценки пространственных когерентных свойств волнового поля, не прибегая к феноменологическому анализу проявления когерентности света в интерференционном эксперименте. Данная возможность интересна и с прикладной точки зрения, например для более точной количественной оценки процессов декорреляции волновых полей с широкими частотными и угловыми

спектрами при их прохождении через границы раздела сред с различными показателями преломления [27] при исследовании слоистых объектов технического и биологического происхождения в методах корреляционной интерференционной микроскопии [10,12–16] с целью расширения диагностических и измерительных возможностей этих методов, в частности для увеличения точности определения геометрических и оптических параметров объектов [28], а также для оценки влияния оптических полей на биологические объекты на клеточном уровне [29]. Полагаем также, что полученные результаты и выработанные представления будут полезны для анализа волновых полей других частотных диапазонов, в частности терагерцового диапазона, для которого уже создаются фокусирующие устройства для формирования полей с большой числовой апертурой [30].

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда, проект № 16-19-10528.

## Список литературы

- [1] Mandel L., Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. NY: Cambridge University Press, 1995. 1166 p.; Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000. 896 с. doi 10.1017/CBO9781139644105
- [2] Goodman J.W. Statistical Optics. Wiley, 2000. 567 p.; Гудмен Дж. Статистическая оптика. М.: Мир, 1988. 528 с. doi 10.1063/1.2815179
- [3] Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах. М.: Физматлит, 2010. 428 с.
- [4] Rosen J., Yariv A. // Opt. Commun. 1995. V. 117. N 1–2. P. 8. doi 10.1016/0030-4018(95)00086-N
- [5] Abdulhalim I. // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2006. V. 8. N 11. P. 952. doi 10.1088/1464-4258/8/11/004
- [6] Рябухо В.П., Лякин Д.В. // Опт. и спектр. 2005. Т. 98. В. 2. С. 309; Ryabukho V.P., Lyakin D.V. // Opt. Spectrosc. 2005. V. 98. N 2. P. 273. doi 10.1134/1.1870071
- [7] Ryabukho V.P., Lyakin D.V., Grebenyuk A.A., Klykov S.S. // J. Optics. 2013. V. 15. N 2. P. 025405. doi 10.1088/2040-8978/15/2/025405
- [8] Лякин Д.В., Мысина Н.Ю., Рябухо В.П. // Опт. и спектр. 2018. Т. 124. В.3. С. 348; Lyakin D.V., Mysina N.Yu., Ryabukho V.P. // Opt. Spectrosc. 2018. V. 124. N 3. P. 349. doi 10.1134/S0030400X18030165
- [9] Рябухо В.П., Кальянов А.Л., Лычагов В.В., Лякин Д.В. // Опт. и спектр. 2010. Т. 108. В. 6. С. 1032; Ryabukho V.P., Kal'yanov A.L., Lyakin D.V., Lychagov V.V. // Opt. Spectrosc. 2010. V. 108. N 6. P. 979. doi 10.1134/S0030400X1006024X
- [10] Abdulhalim I. // Ann. Phys. 2012. V. 524. N 12. P. 787. doi 10.1002/andp.201200106
- [11] Рябухо В.П., Лякин Д.В., Лычагов В.В. // Опт. и спектр. 2006. Т. 100. № 5. С. 788; Ryabukho V.P., Lyakin D.V., Lychagov V.V. // Opt. Spectrosc. 2006. V. 100. N 5. P. 724. doi 10.1134/S0030400X06050146
- [12] De Groot P., Colonna de Lega X., Kramer J., Turzhitsky M. // Appl. Opt. 2004. V. 43. N 25. P. 4821. doi 10.1364/AO.43.004821

- [13] Labiau S., David G., Gigan S., Vocca A.C. // Opt. Lett. 2009. V. 34. N 10. P. 1576. doi 10.1364/OL.34.001576
- [14] Лякин Д.В., Рябухо В.П. // Квант. электрон. 2013. Т. 43. № 10. С. 949; Lyakin D.V., Ryabukho V.P. // Quant. Electron. 2013. V. 43. N 10. P. 949. doi 10.1070/QE2013v043n10ABEH015187
- [15] Gao W. // J. Mod. Opt. 2015. V. 62. N 21. P. 1764. doi 10.1080/09500340.2014.952689
- [16] Dubois A. // Appl. Opt. 2017. V. 56. I. 9. P. D142. doi 10.1364/AO.56.00D142
- [17] Martienssen W., Spiller E. // Am. J. Physics. 1964. V. 32. N 12. P. 919. doi 10.1119/1.1970023
- [18] Dainty J.C. (ed.) Laser Speckle and Related Phenomena. Springer Science & Business Media, 2013. V. 9. 286 p. doi 10.1007/978-3-662-43205-1
- [19] Франсон М. Оптика спеклов. М.: Мир, 1980. 171 с.; Françon M. La Granularité Laser (Speckle) et ses Applications en Optique. Masson Paris, NY, Barcelone, Milan, 1978. 171 p.
- [20] Goodman J.W. Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications. Roberts & Company, Publishers, Englewood, 2007. 387 p.
- [21] Yoshimura T., Iwamoto S. // J. Opt. Soc. Am. A. 1993. V. 10. I. 2. P. 324. doi 10.1364/JOSAA.10.000324
- [22] Okamoto T., Asakura T. // Progress in Optics. 1995. V. 34. P. 183. doi 10.1016/S0079-6638(08)70326-3
- [23] Rabal H.J., Braga Jr R.A. Dynamic Laser Speckle and Applications. CRC Press, 2008. 282 p. doi 10.1201/9781420060164
- [24] Born M., Wolf E. Principles of Optics. Cambridge University Press, 2002. 994 p.; Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с. doi 10.1017/CBO9781139644181
- [25] Goodman J.W. Introduction to Fourier Optics, 3rd Edition. Roberts & Company Publishers, 2005. 528 p.
- [26] Локишин Г.Р. Основы радиооптики. М.: Интеллект, 2009. 344 с.
- [27] Рябухо В.П., Лычагов В.В., Лякин Д.В., Смирнов И.В. // Опт. и спектр. 2011. Т. 110. № 5. С. 854; Ryabukho V.P., Lychagov V.V., Lyakin D.V., Smirnov I.V. // Opt. Spectrosc. 2010. V. 110. N 5. P. 802. doi 10.1134/S0030400X11050134
- [28] Лякин Д.В., Максимова Л.А., Сдобнов А.Ю., Рябухо В.П. // Опт. и спектр. 2017. Т. 123. № 3. С. 463. Lyakin D.V., Maksimova L.A., Sdobnov A.Yu., Ryabukho V.P. // Opt. Spectrosc. 2017. V. 123. N 3. P. 487. doi 10.1134/S0030400X17090235
- [29] Будаговский А.В., Маслова М.В., Будаговская О.Н., Будаговский И.А. // Квант. электрон. 2017. Т. 47. № 2. С. 158; Budagovskiy A.V., Budagovskaya O.N., Maslova M.V., Budagovskiy I.A. // Quant. Electron. 2017. V. 47. N 2. P. 158. doi 10.1070/QEL16168
- [30] Черномырдин Н.В., Щадько А.О., Лебедев С.П., Спектор И.Е., Толстогозов В.Л., Кучерявенко А.С., Малахов К.М., Командин Г.А., Горелик В.С., Зайцев К.И. // Опт. и спектр. 2018. Т. 124. № 3. С. 420; Chernomyrdin N.V., Shchadko A.O., Lebedev S.P., Spektor I.E., Tolstoguzov V.L., Kucheryavenko A.S., Malakhov K.M., Komandin G.A., Gorelik V.S., Zaytsev K.I. // Opt. Spectrosc. 2018. V. 124. N 3. P. 428. doi 10.1134/S0030400X18030086