

03

## Квадрупольное излучение незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Россия, Ярославль  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 10 апреля 2018 г. В окончательной редакции 17 сентября 2018 г.)

Рассмотрены капиллярные осцилляции незаряженной сферической капли вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в однородном электростатическом поле в первом порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к характерному линейному размеру капли и во втором порядке малости по квадрату отношения характерного линейного размера капли к длине излучаемой волны. Показано, что электрический квадрупольный момент капли изменяется во времени из-за осцилляций ее поверхности, что приводит к излучению электромагнитных волн квадрупольного типа. Построена математическая модель квадрупольного электромагнитного излучения незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, и проведена оценка его интенсивности и частоты.

DOI: 10.21883/JTF.2019.03.47169.147-18

### Введение

То, что заряженная капля идеально проводящей несжимаемой идеальной жидкости при осцилляциях будет излучать электромагнитные волны, показано еще в [1]. В самом деле, собственный заряд такой капли распределится по ее поверхности, и при осцилляциях капли частицы заряда будут двигаться ускоренно, что и вызовет в силу классических общезначимых положений (см., например, [2]) появление электромагнитного излучения. Техника счета, использованная в [1], сводится к выводу дисперсионного уравнения для осциллирующей капли идеальной жидкости для волновой зоны электрического поля капли, имеющего комплексные решения. Мнимая часть частоты соответствует затуханию, невозможному в идеальной жидкости, следовательно, источником потери энергии осцилляций капли является излучение ускоренно движущихся зарядов.

В общем случае излучение системы ускоренно движущихся зарядов, согласно теории электромагнитного излучения [3], состоит из суммы дипольного, квадрупольного и магнитно-дипольного излучений. Разделение электромагнитного излучения на мультипольные компоненты ведется по малому параметру  $\delta$ -квадрату отношения характерного линейного размера капли к длине излучаемой волны. Самая интенсивная компонента излучения есть дипольная, затем идут квадрупольная и магнитно-дипольная. Для осциллирующей заряженной капли в расчетах первого порядка малости по  $\epsilon$  (именно в этом порядке выполнены расчеты в [1]) — отношению амплитуды осцилляций к характерному линейному размеру капли обнаруживается только квадрупольная компонента излучения. Дипольное излучение осциллирующей заряженной капли обнаруживается в расчетах второго порядка малости по  $\epsilon$ , но тем не менее оно

оказывается на 14–15 порядков величины интенсивнее квадрупольного [4].

Для незаряженной капли идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости в однородном электростатическом поле очередность компонент излучения другая: в начале появляется дипольное излучение [5] (в первом порядке малости по  $\delta$  и по  $\epsilon$ ), затем квадрупольное (во втором порядке малости по  $\delta$  и первом по  $\epsilon$ ).

Расчету интенсивности квадрупольного излучения незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, осциллирующей в однородном электростатическом поле, и посвящена настоящая работа.

### Физическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о квадрупольном электромагнитном излучении незаряженной капли идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости, осциллирующей в однородном электростатическом поле напряженностью  $E_0$ . Пусть массовая плотность жидкости  $\rho$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Примем, что капля находится в вакууме, а ее объем определяется объемом сферы с радиусом  $R$ . На поверхности капли всегда существует капиллярное волновое движение, возбуждаемое уже тепловым движением молекул воды. Амплитуда таких волновых движений весьма мала:  $\propto \sqrt{kT/\sigma}$ , где  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — абсолютная температура [6]. При температурах порядка комнатной такая амплитуда для всех жидкостей меньше  $\text{Å}$ .

На поверхности свободно падающей капли под действием внешних силовых воздействий (например, со стороны обдувающего ее потока воздуха) амплитуда отдельных мод осциллирующей капли может принимать значения до десятков процентов от ее радиуса [7,8].

При этом капиллярные осцилляции заряженной индуцированным зарядом поверхности проводящей капли приводят к излучению электромагнитных волн.

Исходя из общей теории излучения электромагнитных волн, интенсивность квадрупольного излучения для ускоренно движущейся системы зарядов вычисляется по формуле [3]:

$$I = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \frac{\partial^3}{\partial t^3} D_{\alpha\beta} \right)^2, \quad (1)$$

где тензор квадрупольного момента  $D_{\alpha\beta}$  определяется в виде

$$D_{\alpha\beta}(t) = \iiint_V \gamma(\mathbf{r}, t) (3x_\alpha(t)x_\beta(t) - \delta_{\alpha\beta}r^2(t)) dV. \quad (2)$$

где  $\gamma(\mathbf{r}, t)$  — объемная плотность заряда,  $\delta_{\alpha\beta}$  — дельта-символ Кронекера,  $x_\alpha(t)$  и  $x_\beta(t)$  — координаты радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$  в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  для точки, лежащей в объеме капли  $V$ .

Наличие внешнего электростатического поля приводит к искажению равновесной сферической формы капли, которая в линейном приближении по величине стационарной деформации может считаться сфероидальной [9–13], с квадратом эксцентриситета  $e^2$ :

$$e^2 = \frac{9E_0^2 R}{16\pi\sigma}.$$

Все расчеты задачи будем проводить в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ . Остальные величины задачи будут выражены в долях своих характерных значений:

$$[E_0] = R^{-1/2}\sigma^{1/2}, \quad [t] = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2},$$

$$[V] = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}, \quad [r] = R, \quad [P] = R^{-1}\sigma.$$

Сформулируем математически задачу о квадрупольном излучении сфероидальной незаряженной капли невязкой несжимаемой электропроводной жидкости, осциллирующей во внешнем электростатическом поле.

### Математическая формулировка задачи

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  равновесная сфероидальная форма капли  $r(\theta)$  претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение  $\xi(\theta, t)$  фиксированной амплитуды  $\varepsilon$ , существенно меньшей радиуса капли. Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, примем, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Примем также, что уравнение, описывающее поверхность капли, в сферической системе координат с началом в центре масс в безразмерных переменных имеет вид:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$  полностью определяется функцией потенциала скорости  $\psi(\mathbf{r}, t)$  [14]. Амплитудное значение поля скоростей течения жидкостей имеет тот же порядок малости, что и амплитуда осцилляций поверхности капли  $\psi(\mathbf{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$ . Электрическое поле в окрестности капли будем характеризовать электрическим потенциалом  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ .

Математическая формулировка задачи о расчете движения жидкости в незаряженной капле, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, имеет вид [1,15]:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta,$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s(t),$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu), \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

где  $h_j$  — коэффициенты, определяющие парциальный вклад  $j$ -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение,  $\Xi$  — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод,  $P_j(\mu)$  — полином Лежандра  $j$ -го порядка,  $j$  — целое число,  $\mu \equiv \cos \theta$ .

Исходя из общефизических соображений для замыкания выписанной системы уравнений, сформулируем дополнительные естественные условия постоянства объема капли, неподвижности ее центра масс, а также условие незаряженности капли:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla\Phi) dS = 0, \quad (4)$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

В этих выражениях введены следующие обозначения:  $\infty_S(t)$  — постоянное вдоль поверхности капли значение ее электрического потенциала,  $P = P_0 - \frac{\partial \psi}{\partial t}$  — гидродинамическое давление,  $P_0$  — постоянное давление внутри капли в состоянии равновесия,  $P_E = (\nabla\Phi)^2/8\pi$  — давление электрического поля,  $P_\sigma = \text{div } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  — капиллярное давление,  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  — единичный вектор нормали

к возмущенной поверхности капли [16], определяемый в виде:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{|\nabla(r - r(\theta, t))|} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (5)$$

Искомые величины разложим по порядкам малости безразмерной амплитуды осцилляций  $\varepsilon$  [17]:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2), \quad \psi_j(\mathbf{r}, t) = \psi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2), \\ P(\mathbf{r}, t) &= P^{(0)}(\mathbf{r}) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2), \\ P_\sigma(\mathbf{r}, t) &= P_\sigma^{(0)}(\mathbf{r}) + P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2), \\ P_E(\mathbf{r}, t) &= P_E^{(0)}(\mathbf{r}) + P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Phi^{(0)}(r, \theta)$  — электрический потенциал в окрестности равновесного незаряженного сфероида во внешнем электростатическом поле;  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  — добавка первого порядка малости к электрическому потенциалу, связанная с возмущением поверхности капли. Верхний индекс означает порядок малости по  $\varepsilon$ .

Подставляя разложения (6) в (3) и (4), выделим задачи нулевого и первого порядков по  $\varepsilon$ .

Потенциал  $\Phi^{(0)}(r, \theta)$  в линейном по  $e^2$  приближении может быть получен как переходом от известного выражения [18] для электрического потенциала вытянутого проводящего эллипсоида в однородном внешнем поле, приведенного в [18] в сферических координатах, к сферическим координатам, так и прямым решением электростатической задачи нулевого порядка малости по  $\varepsilon$  в сферической системе координат методом возмущений

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(r, \theta) &= E_0 r P_1(\mu) \left( \frac{1}{r^3} - 1 \right) + \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} e^2 \\ &\times E_0 \left( P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right). \end{aligned}$$

Форма возмущенной поверхности капли  $r(\theta, t)$  с точностью до слагаемых первого порядка по каждому из малых параметров  $\varepsilon$  и  $e^2$  описывается уравнением

$$r(\theta, t) = 1 + e^2 h(\theta) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j(t) P_j(\mu), \quad (7)$$

где амплитудные коэффициенты  $M_j(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} M_j(t) &= h_j \cos(\omega_j t) \\ &+ e^2 \left( h_{j-2} \frac{j(j-1)(3j^2-3j+2)}{4(2j-1)(2j-3)(3j-4)} \right. \\ &\times (\cos(\omega_{j-2}t) - \cos(\omega_j t)) \\ &- h_{j+2} \frac{(j+1)(3j^3+27j^2+44j+16)}{4(2j+3)(2j+5)(3j+2)} \\ &\left. \times (\cos(\omega_{j+2}t) - \cos(\omega_j t)) \right) \quad (j \in \Xi). \end{aligned}$$

В отсутствие внешнего электрического поля второе слагаемое  $\sim e^2$  обращается в нуль, и амплитуда возмущения  $M_j(t)$  будет определяться лишь слагаемым с частотой  $\omega_j$ :  $M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t)$ .

Выражение для добавки к электрическому потенциалу в окрестности возмущенного сфероида определяется в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \varepsilon \left( \frac{6}{35} \frac{e^2 M_3(t)}{r} + \left( \sum_{j \in \Xi} \left[ 3(\mu_{j-1}^+ M_{j-1}(t) \right. \right. \right. \\ &+ \mu_{j+1}^- M_{j+1}(t)) + e^2 (M_{j-3}(t) l_1(j) + M_{j-1}(t) l_2(j) \\ &\left. \left. \left. + M_{j+1}(t) l_3(j) + M_{j+3}(t) l_4(j)) \right] r^{-(n+1)} \right) \right) P_j(\mu). \end{aligned}$$

## Поверхностная плотность заряда

Определим теперь плотность поверхностного заряда  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , распределенного по возмущенной осесимметричной поверхности идеально проводящей капли по известной формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi(\mathbf{r}, t)) \Big|_{r=r(\theta, t)} \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)) \Big|_{r=r(\theta, t)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $r(\theta, t)$  задано соотношением (7).

Используя разложения (8) для компонент электрического потенциала и вектор нормали к возмущенной поверхности сфероида во внешнем поле

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) &= \left( 1 - \frac{1}{3} e^2 \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r - \left( \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} e^2 \left( (1 - \xi(\theta, t)) \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} - P_2(\mu) \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

получим по (8) поверхностную плотность заряда на возмущенной капле  $r(\theta, t)$  с точностью до слагаемых порядка  $\sim E_0 e^2 \varepsilon \sim E_0^3 \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \left( 3E_0 \left( P_1(\mu) + \frac{2}{5} e^2 P_3(\mu) \right) \right. \\ &- \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + E_0 \xi(\theta, t) \left( 6P_1(\mu) + \frac{2}{5} e^2 (P_1(\mu) + 15P_3(\mu)) \right) \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{3} e^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} P_2(\mu) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) \right) \right) \Big|_{r=1}. \end{aligned}$$

Здесь функции  $\xi(\theta, t)$  и  $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  имеют первый порядок малости по  $\varepsilon$ . В (9)  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — орты сферической системы координат.

Учитывая вид функции  $\xi(\theta, t)$  из (7) и решение для добавки электрического потенциала  $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ , запишем поверхностную плотность заряда в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi} E_0 \left( P_1(\mu) + \frac{2}{5} e^2 P_3(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \left( M_{j-1}(t) k_1 + M_{j+1}(t) k_2 - e^2 \left( \frac{2}{35} M_3(t) \delta_{j,0} + M_{j-3}(t) k_3 + M_{j-1}(t) k_4 + M_{j+1}(t) k_5 + M_{j+3}(t) k_6 \right) \right) P_j(\mu) \right) \quad (j \in \Xi). \quad (10)$$

Численные коэффициенты  $k_1 - k_6$ , зависящие лишь от значения индекса  $j$ , приведены в Приложении.

### Расчет квадрупольных моментов

Для вычисления интенсивности квадрупольного электромагнитного излучения от электропроводной капли в (1) рассчитаем тензор квадрупольного момента  $D_{\alpha\beta}(t)$ . Подставляя в исходную формулу (2) выражение для квадрата модуля радиус-вектора  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , запишем в общем виде выражение для тензора квадрупольного момента в декартовой системе координат [3,18]:

$$D_{\alpha\beta}(t) = \int_V \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \delta(r - r(\mathbf{r}, t)) (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV, \\ V = \left[ -r \leq x \leq r; -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}; -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right].$$

Здесь  $r = r(\mathbf{r}, t)$  — уравнение поверхности капли;  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — поверхностная плотность заряда;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки на поверхности капли;  $\delta(r - r(\mathbf{r}, t))$  — дельта-функция Дирака [19];  $\delta_{\alpha\beta}$  — дельта-символ Кронекера.

Дальнейший расчет квадрупольных моментов проведем аналогично [20]. Перепишем выражения для компонент квадрупольных моментов в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре капли. Наличие дельта-функции в выражениях для компонент тензора квадрупольного момента превращает интегрирование по объему в интегрирование по возмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли. В результате получим:

$$D_{11}(t) = \int_S \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) ((2 - 3 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi, \\ D_{22}(t) = \int_S \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) ((3 \sin^2 \varphi - 1) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$D_{33}(t) = \int_S \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta d\varphi, \\ D_{12}(t) = D_{21}(t) = 3 \int_S \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) \times \cos \varphi \sin \varphi \sin^3 \theta d\theta d\varphi, \\ D_{13}(t) = D_{31}(t) = 3 \int_S \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) \times \cos \varphi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta d\varphi, \\ D_{23}(t) = D_{32}(t) = 3 \int_S \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) \times \sin \varphi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta d\varphi, \\ S = [r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (11)$$

В (11)  $r(\theta, t)$  определяется выражениями (7);  $v(\theta, t)$  соотношением (10);  $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$  — формулой (9).

Поскольку капля осесимметрична и уравнение ее возмущенной поверхности  $r(\theta, t)$  не зависит от координаты  $\varphi$ , то после интегрирования (11) по углу  $\varphi$  получим:

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2} D_{33}(t) = \pi \int_0^\pi \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) \times (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = -2\pi \int_0^\pi \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} \times r^4(\theta, t) P^2(\mu) \sin \theta d\theta,$$

$$D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = 0.$$

Подставим поверхностную плотность заряда (10) и вектор нормали (9) на возмущенной поверхности капли  $r(\theta, t)$  в отличные от нуля компоненты тензора и получим их аналитическое выражение через амплитудные коэффициенты  $M_j(t)$ :

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2} D_{33}(t) = -\frac{3}{2} E_0 \times \int_0^\pi \left( \cos \theta \left( 1 + e^2 \left( 3 \cos \theta - \frac{19}{15} \right) \right) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \left( M_{j-1}(t) p_1 + M_{j+1}(t) p_2 + e^2 \left( \frac{2}{35} M_3(t) \delta_{j,0} + M_{j-3}(t) p_3 + M_{j-1}(t) p_4 + M_{j+1}(t) p_5 + M_{j+3}(t) p_6 \right) \right) P_j(\cos \theta) \right) P_2(\mu) \sin \theta d\theta. \quad (13)$$

Численные коэффициенты  $p_1-p_6$ , зависящие лишь от значения индекса  $j$ , приведены в Приложении.

Учтем ортогональность полиномов Лежандра и, подставляя явный вид  $M_j(t)$ , перейдем к размерным переменным:

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2}D_{33}(t) = -E_0R^4 \times \varepsilon \left( \frac{9}{7} h_3 \cos(\omega_3 t) + e^2 \left( \frac{52}{245} h_3 \cos(\omega_3 t) + \frac{2}{847} h_5 (236 \cos(\omega_3 t) + 149 \cos(\omega_5 t)) \right) \right),$$

$$\omega_j = \left( \frac{\sigma}{\rho R^3} j \left( (j-1)(j+2) - e^2 \frac{(2j^5 + 23j^4 + 21j^3 - 17j^2 - 7j^2 - 2)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \right) \right)^{1/2}.$$

Следует заметить, что квадрупольный момент незаряженной капли во внешнем поле отличен от нуля только для возмущенной поверхности капли (квадрупольный момент равновесного незаряженного сфероида во внешнем электростатическом поле равен нулю) и при расчетах с точностью до квадрата эксцентриситета определяется третьей и пятой модами осцилляций.

Найдем максимальное значение суммы квадратов третьей производной по времени от полученных компонент тензора квадрупольного момента:

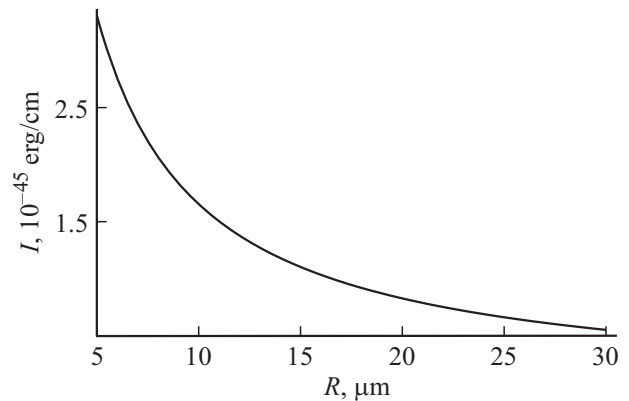
$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \frac{\partial^3}{\partial t^3} D_{\alpha\beta}(t) \right)_{\max}^2 = 6E_0^2 R^8 \varepsilon^2 \left( \frac{9}{7} h_3 \omega_3^3 + e^2 \left( \frac{52}{245} h_3 \omega_3^3 + \frac{2}{847} h_5 (236 \omega_3^3 + 149 \omega_5^3) \right) \right)^2. \quad (14)$$

Подставим (14) в (1) и найдем интенсивность квадрупольного электромагнитного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле:

$$I = \frac{1}{30c^5} E_0^2 R^8 \omega^2 \left( \frac{9}{7} h_3 \omega_3^3 + e^2 \left( \frac{52}{245} h_3 \omega_3^3 + \frac{2}{847} h_5 (236 \omega_3^3 + 149 \omega_5^3) \right) \right)^2. \quad (15)$$

На основе полученного соотношения (15) проведем численные оценки квадрупольного шумового радиоизлучения от конвективных облаков.

Прежде всего, отметим, что возможный источник электромагнитного излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке  $\sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$  [21]. Характерные размеры таких капель от 3



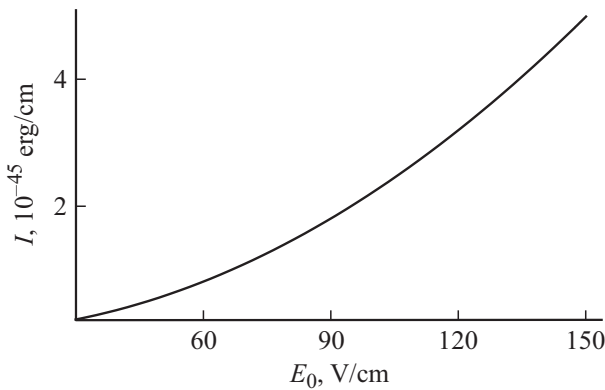
**Рис. 1.** Зависимость интенсивности квадрупольного электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, от радиуса равновеликой сферической капли, рассчитанная при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $E_0 = 50 \text{ V/cm}$  ( $\sim 2 \cdot 10^4 E_{0cr}$  при  $R = 3 \mu\text{m}$  и  $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0cr}$  при  $R = 30 \mu\text{m}$ ).

до  $30 \mu\text{m}$ . Максимум их концентрации в облаке приходится на диапазон от 3 до  $7 \mu\text{m}$ . Следует заметить, что осцилляции поверхности капель объясняются, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие вследствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними каплями. Натурные наблюдения показали, что величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли [7,8]. Таким образом, для получения оценок интенсивности излучения примем отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли  $\xi(\theta, t)/R = \varepsilon$ , равным 0.1.

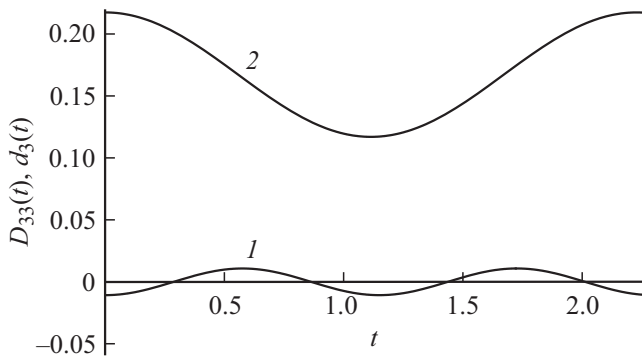
Рассчитаем по (15) интенсивность квадрупольного излучения от единичной незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле. Для численных оценок примем:  $h_3 = h_5 = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $R = 30 \mu\text{m}$ ,  $E_0 = 50 \text{ V/cm}$  [22] ( $\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0cr}$  при  $R = 3 \mu\text{m}$  и  $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0cr}$  при  $R = 30 \mu\text{m}$ , где  $E_{0cr}$  — критическое значение напряженности поля). Тогда из (14) получим оценку  $I \sim 6 \cdot 10^{-46} \text{ erg/cm}$ . Для капли радиусом  $R = 8 \mu\text{m}$  получим значение интенсивности  $I \sim 2 \cdot 10^{-45} \text{ erg/cm}$ . При радиусе капли  $R = 3 \mu\text{m}$  излучение составляет  $I \sim 6 \cdot 10^{-45} \text{ erg/cm}$  (рис. 1).

Из приведенных оценок и рис. 1 видно, что с увеличением радиуса капли на порядок (от  $R = 3$  до  $30 \mu\text{m}$ ) интенсивность излучения уменьшается на порядок.

На рис. 2 приведены характеристики излучения в зависимости от напряженности внешнего электрического поля. Видно, что с увеличением напряженности электростатического поля интенсивность излучения быстро увеличивается: при увеличении напряженности поля



**Рис. 2.** Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей, осциллирующей в электростатическом поле, от напряженности внешнего поля, рассчитанная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1 и  $R = 30 \mu\text{m}$ .



**Рис. 3.** Зависимость от безразмерного времени величин проекций на ось симметрии безразмерных электрических квадрупольного и дипольного моментов незаряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле, рассчитанная при  $\epsilon = 0.1$ ,  $E_0 = 50 \text{ V/cm}$ . Кривая 1 соответствует квадрупольному моменту  $D_{33}(t)$ , рассчитанному при  $h_3 = h_5 = 0.5$ , кривая 2 — дипольному моменту  $d_3(t)$ , рассчитанному при  $j = 2$ ,  $h_2 = 1$ .

в 3 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок, что согласуется с (15).

По сравнению с интенсивностью дипольного электромагнитного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, [5] интенсивность квадрупольного электромагнитного излучения оказывается на 14–15 порядков слабее.

На рис. 3 приведены зависимости от безразмерного времени величины безразмерной осесимметричной компоненты  $D_{33}(t)$  квадрупольного момента, рассчитанного на основе (13) при  $h_3 = h_5 = 0.5$  (кривая 1), а также величины ее безразмерной проекции на ось симметрии дипольного момента  $d_3(t)$  (кривая 2), рассчитанного по выражению:

$$\mathbf{d}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z E_0 \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{15} e^2 \right) + H(t) \right],$$

$$H(t) = 4\epsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left( G_1 \cos(\omega_j t) + e^2 (G_2 \cos(\omega_j t) + G_3 \cos(\omega_{j-2} t) - G_4 \cos(\omega_{j+2} t)) \right) + \epsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left( 1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \times \left( G_5 \cos(\omega_j t) + e^2 (G_6 \cos(\omega_j t) + G_7 \cos(\omega_{j+2} t) + G_8 \cos(\omega_{j-2} t)) \right) + \epsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left( 1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \left( G_9 \cos(\omega_j t) + e^2 (G_{10} \cos(\omega_j t) + G_{11} \cos(\omega_{j+2} t) + G_{12} \cos(\omega_{j-2} t)) \right)$$

(по аналогии с [5]) при  $j = 2$ ,  $h_2 = 1$  для сфероидальной капли воды во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 50 \text{ V/cm}$ ;  $G_i$  — численные коэффициенты, зависящие только от номера моды, имеющие весьма громоздкий вид, и потому не приведенные.

Безразмерные кривые пришлось строить потому, что размерности квадрупольного  $D_{33}(t)$  и дипольного  $d_3(t)$  моментов не совпадают, а их желательно было представить на одном графике для наглядности.

Несложно видеть, что частота изменения во времени квадрупольного момента примерно в четыре раза больше чем частота изменения дипольного момента, что может помочь в экспериментальной идентификации мультипольности электромагнитного излучения от капли воды во внешнем однородном электростатическом поле.

### Заключение

В первом порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к характерному линейному размеру капли и во втором порядке малости по квадрату отношения характерного линейного размера капли к длине излучаемой волны проведена оценка интенсивности квадрупольного электромагнитного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле. Оказалось, что интенсивность квадрупольного излучения на 14–15 порядков величины меньше интенсивности дипольного излучения от такой же капли, а частота квадрупольного излучения выше, чем у дипольного, в несколько раз.

### Приложение

Выражения для численных коэффициентов  $k_1 - k_6$  в (10) и для  $p_1 - p_6$  в (13):

$$k_1 = \frac{j(j-1)}{(2j-1)}, \quad k_2 = \frac{(j+1)(j-1)}{(2j+3)},$$

$$k_3 = \frac{j(j-1)(j-2)(2j^2+3j+7)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)},$$

$$k_4 = \frac{j(100j^5 + 116j^4 - 165j^3 - 205j^2 + 75j - 81)}{30(2j-1)^2(2j-3)(2j+3)},$$

$$k_5 = \frac{(j+1)(100j^5 + 756j^4 + 2159j^3 + 2591j^2 + 704j - 600)}{30(2j-1)(2j+3)^2(2j+5)},$$

$$k_6 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(2j^2 + 11j + 21)}{2(2j+3)(2j+5)(2j+7)},$$

$$p_1 = \frac{j(j+3)}{(2j-1)}, \quad p_2 = \frac{(j+1)(j+3)}{(2j+3)},$$

$$p_3 = -\frac{j(j-1)(j-2)(9j-1)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)},$$

$$p_4 = -\frac{j(40j^5 + 274j^4 - 265j^3 - 475j^2 + 375j - 9)}{30(2j-1)^2(2j-3)(2j+3)},$$

$$p_5 = \frac{(j+1)(135j^9 + 990j^8 + 2990j^7 + 4924j^6 + 6145j^5 + 8251j^4 + 7564j^3 + 1927j^2 - 886j - 360)}{30(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)^2(2j+5)},$$

$$p_6 = -\frac{j(j+1)(j+2)(j+3)(4j^2 + 7j - 5)}{2(2j+3)(2j+5)(2j+7)}.$$

- [19] Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Физматгиз, 1969. 910 с.
- [20] Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 6. С. 914–920.
- [21] Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 280 с.
- [22] Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.

## Список литературы

- [1] Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [2] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. Часть вторая. М.: Наука, 1996. 320 с.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 12. С. 129–134.
- [5] Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 62–76.
- [6] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [7] Стерлядкин В.В. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
- [8] Beard K.V., Tokay A. // Geophys. Res. Lett. 1991. Vol. 18. N 12. P. 2257–2260.
- [9] O'Konski C.J., Thacher H.C. // J. Phys. Chem. 1953. Vol. 57. P. 955–958.
- [10] Garton C.G., Krasucki Z. // Trans. Faraday Soc. 1964. Vol. 60. P. 211–226.
- [11] Ausman E.L., Brook M. // J. Geophys. Res. 1967. Vol. 72. N 24. P. 6131–6141.
- [12] Cheng K.J. // Phys. Lett. 1985. Vol. 112A. N 8. P. 392–396.
- [13] Incullet I.L., Floryan J.M., Haywood R.J. // IEEE Tr. Ind. Appl. 1992. Vol. 28. N 5. P. 1203–1209.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [15] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [16] Hendrics C.D., Schneider J.M. // J. Amer. Phys. 1963. Vol. 1. N 6. P. 450–453.
- [17] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [18] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.