

Переменяющееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора

© О.И. Москаленко, А.А. Короновский, В.А. Ханадеев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия
e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

(Поступило в Редакцию 26 августа 2018 г.)

Исследованы механизмы возникновения и характеристики переменяющегося поведения, имеющего место на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной (двулистной) топологией хаотического аттрактора. Установлено, что возникновение переменяемости в данном случае обусловлено перескоком изображающей точки с одного листа хаотического аттрактора на другой, а распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра надкритичности подчиняются экспоненциальным законам.

DOI: 10.21883/JTF.2019.03.47165.325-18

Одним из наиболее интересных и наименее изученных типов синхронизации связанных хаотических систем является режим обобщенной синхронизации [1–5]. Изначально это явление было обнаружено для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [1–3]. Позднее концепция обобщенной синхронизации была расширена на взаимно связанные системы и сети связанных нелинейных элементов [4–6].

Режим обобщенной синхронизации подразумевает, что состояния взаимодействующих систем оказываются связанными между собой при помощи функционала [7], а диагностика этого режима может быть осуществлена при помощи расчета спектра показателей Ляпунова [2], метода ближайших соседей [1] или метода фазовых трубок [7], а для однонаправленно связанных систем — и при помощи метода вспомогательной системы [8].

Хорошо известно, что на границе обобщенной синхронизации однонаправленно связанных хаотических систем имеет место переменяющееся поведение — переменяемость типа *glqq on-off* [9,10], пронаблюдать которую можно в рамках метода вспомогательной системы при помощи сравнения состояний ведомой и вспомогательной систем в течение длительного интервала времени. Известно также, что применение метода вспомогательной системы к системам с взаимной связью приводит к некорректным результатам [11], что делает диагностику переменяющегося поведения, имеющего место на границе режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах и сетях, практически невозможной. В то же самое время режим обобщенной синхронизации может наблюдаться в системах с различной топологией хаотического аттрактора, причем характерные черты возникновения этого режима могут быть обусловлены особенностями строения аттрактора [2,9]. Так, например, в работах [4,6] было установлено наличие обобщенной синхронизации в системе двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца, характеризующихся двулистной структурой хаотического аттрактора, и выяв-

лены механизмы возникновения этого режима в данном случае.

В настоящей работе исследуются характеристики переменяющегося поведения, имеющего место на границе обобщенной синхронизации, в системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора (на примере двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца и систем Чена). Как будет показано ниже, и распределение длительностей ламинарных фаз, и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности в обоих случаях подчиняются экспоненциальным законам.

Начнем рассмотрение с системы двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца. Исследуемая система описывается следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= r_{1,2}x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= -bz_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ — векторы состояний взаимодействующих систем, $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r_1 = 40$ и $r_2 = 35$ — управляющие параметры, ε — параметр связи. Как было показано в работе [4], в данной системе режим обобщенной синхронизации возникает при $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 5.9$. Ниже границы обобщенной синхронизации наблюдается переменяющееся поведение, характеризующееся наличием коротких интервалов времени, в течение которых фазовые траектории взаимодействующих систем находятся на различных листах хаотического аттрактора, в то время как большую часть времени состояния взаимодействующих систем оказываются практически полностью синхронизованными. Моменты времени, соответствующие расхождению фазовых траекторий, относятся к турбулентным фазам поведения, а интервалы синхронного поведения — к ламинарным фазам. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 1, где

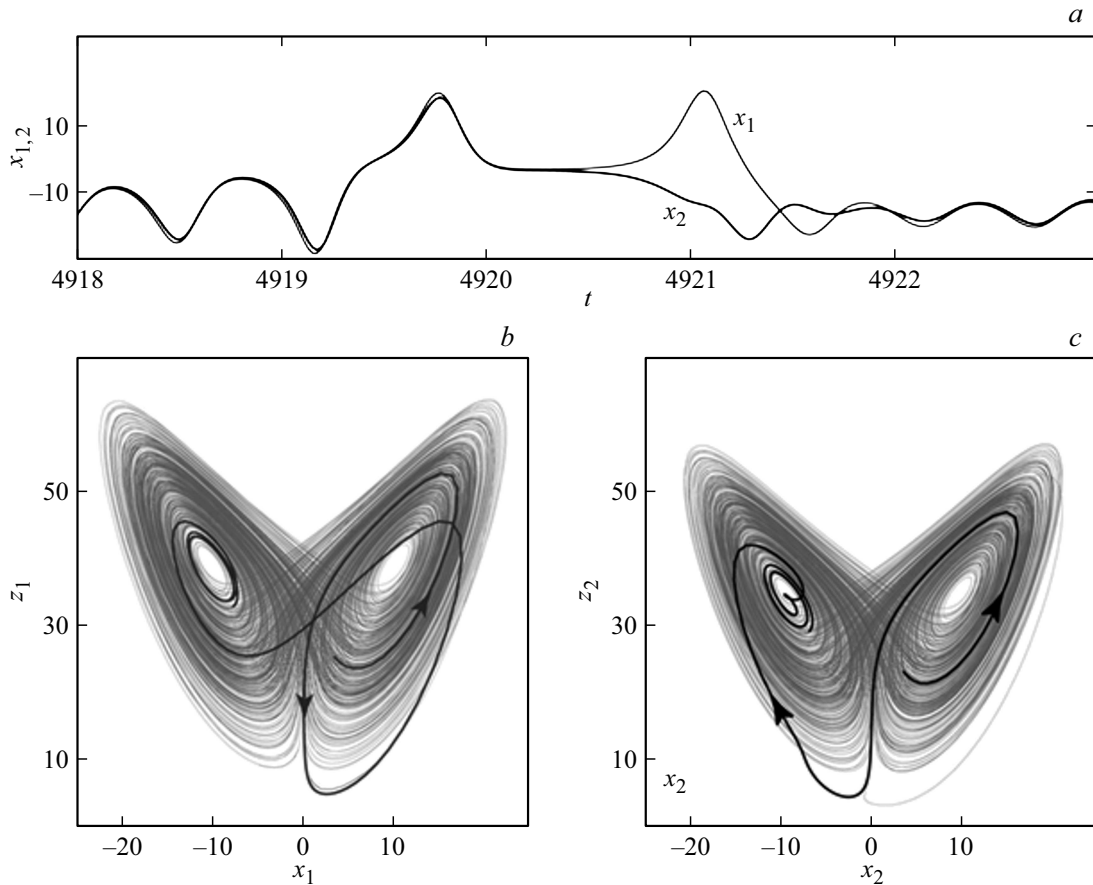


Рис. 1. Фрагменты временных реализаций двух взаимно связанных осцилляторов Лоренца (1), находящихся в режиме переключающейся обобщенной синхронизации, $\varepsilon = 5.7$ (a). Фазовые портреты первой (b) и второй (c) систем Лоренца и фазовые траектории, соответствующие временным интервалам (a).

приведены фрагменты временных реализаций взаимодействующих систем, содержащие моменты расхождения фазовых траекторий, а также сами фазовые траектории, расположенные на аттракторах взаимодействующих систем, при $\varepsilon = 5.7$.

Таким образом, возникновение переключаемости вблизи границы обобщенной синхронизации в системе (1) связано с асинхронным перескоком изображающих точек взаимодействующих систем на разные листы хаотических аттракторов связанных осцилляторов. Такое поведение аналогично динамике бистабильной системы, находящейся под внешним шумовым воздействием: наличие шума переводит бистабильную систему в метастабильную, в результате чего изображающая точка перемещается от одного состояния к другому, демонстрируя режим индуцированной шумом переключаемости [12].

В работе [13] было установлено, что в режиме индуцированной шумом переключаемости распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону

$$p(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad (2)$$

где T — средняя длительность ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров, а

зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности подчиняется экспоненциальной закономерности

$$T = K \exp(\alpha\varepsilon), \quad (3)$$

где ε — параметр надкритичности (в данном случае параметр связи), K и α — некоторые положительные константы. Можно предположить, что аналогичные закономерности будут иметь место вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе.

Для проверки сделанного предположения проанализированы статистические характеристики длительностей ламинарных фаз (распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров, зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи) системы (1), находящейся в режиме переключающейся обобщенной синхронизации. Полученные результаты сопоставлены с теоретическими закономерностями (2) и (3). На рис. 2, a приведены распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для системы (1) при различных значениях параметра связи, а также их теоретические аппроксимации закономерностью (2) (параметры аппроксимаций указаны в подрисуночной подписи). Вид-

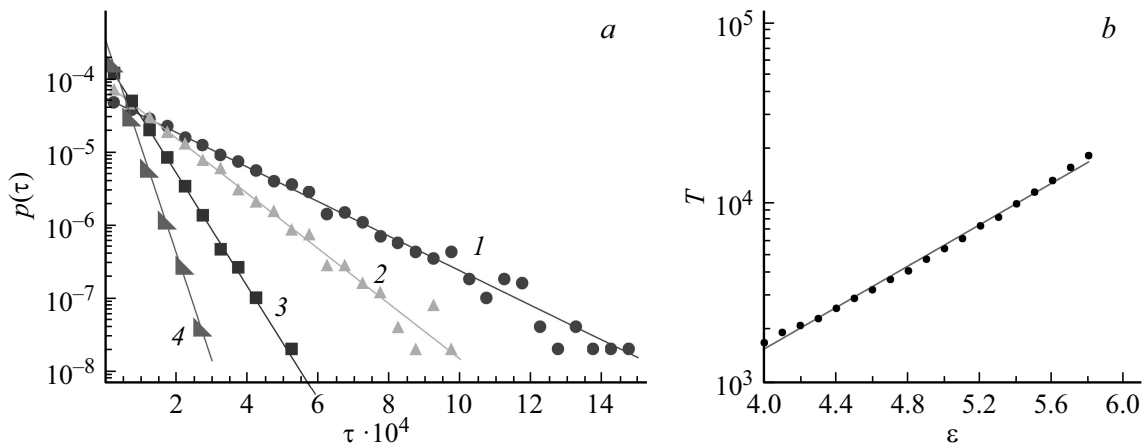


Рис. 2. Распределения длительностей ламинарных фаз (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз (b) от параметра связи ε , полученные численно для системы (1), и их аппроксимации закономерностями (2) и (3) соответственно. Параметры аппроксимации выбраны следующими: а — 1 — $\varepsilon = 5.8$, $T = 18357$; 2 — $\varepsilon = 5.5$, $T = 11519$; 3 — $\varepsilon = 5.0$, $T = 5612$; 4 — $\varepsilon = 4.5$, $T = 2973$; b — $K = 7.8$, $\alpha = 1.324$.

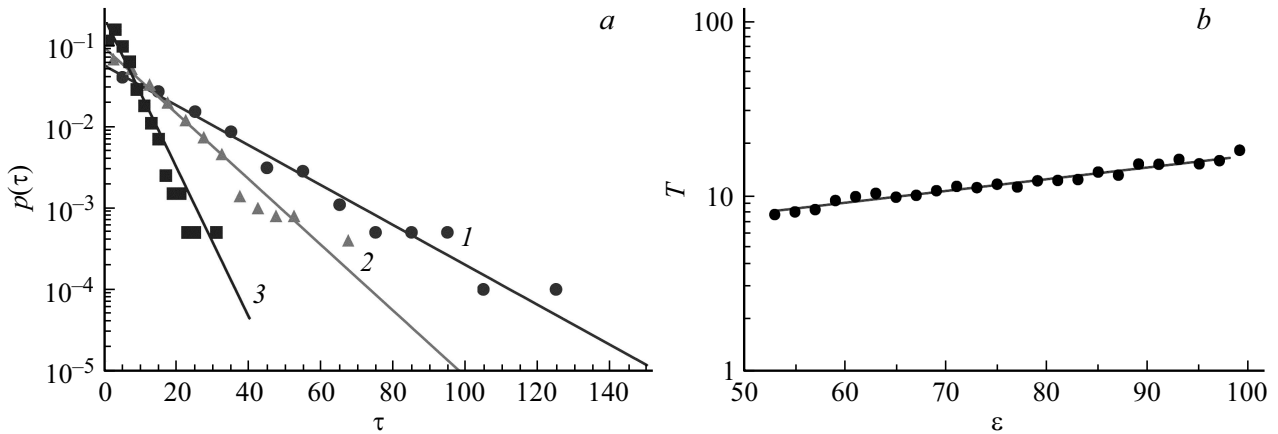


Рис. 3. Распределения длительностей ламинарных фаз (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз (b) от параметра связи ε , полученные численно для системы (4), и их аппроксимации закономерностями (2) и (3) соответственно. Параметры аппроксимации выбраны следующими: а — 1 — $\varepsilon = 100$, $T = 17.72$; 2 — $\varepsilon = 70$, $T = 10.75$; 3 — $\varepsilon = 50$, $T = 4.73$; b — $K = 3.68$, $\alpha = 0.0153$.

но хорошее соответствие численно полученных данных и теоретических закономерностей.

Аналогичная ситуация наблюдается для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. Такая зависимость представлена на рис. 2, b, где результаты численного моделирования показаны точками, теоретическая аппроксимация закономерностью (3) — сплошной линией. Нетрудно заметить хорошее соответствие аналитически и численно полученных результатов во всем рассматриваемом диапазоне значений параметра связи.

Схожие закономерности наблюдаются для системы двух взаимно связанных осцилляторов Чена (модифицированных систем Лоренца с четырехмерным фазовым пространством), рассмотренных в работах [14,15]. Уравнения, описывающие динамику системы, записываются

в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= a(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon y_{1,2} z_{1,2}, \\ \dot{y}_{1,2} &= cx_{1,2} - dx_{1,2} z_{1,2} + y_{1,2} + u_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2} y_{1,2} - bz_{1,2}, \\ \dot{u}_{1,2} &= -k_{1,2} y_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}, u_{1,2})$ — векторы состояний взаимодействующих систем, $a = 35$, $b = 4.9$, $c = 25$, $d = 5$, $e = 35$, $k_1 = 110$, $k_2 = 190$ — управляющие параметры, ε — параметр связи. Значения управляющих параметров взаимодействующих систем выбраны таким образом, чтобы в автономном режиме одна из них находилась в хаотическом режиме с одним положительным показателем Ляпунова, а другая — в режиме гиперхаоса. Как было установлено в работе [15], режим

обобщенной синхронизации, диагностируемый по моменту перехода третьего показателя Ляпунова в область отрицательных значений, в данном случае возникает при $\varepsilon = 105$. На границе обобщенной синхронизации, как и в системах Лоренца, наблюдается переключающееся поведение, возникновение которого обусловлено перескоком изображающей точки на разные листы хаотических аттракторов взаимодействующих систем.

Как и для систем Лоренца, проанализированы статистические характеристики переключаемости для системы (4). На рис. 3, а приведены численно полученные распределения длительностей ламинарных фаз для трех различных значений параметра связи и их аналитические аппроксимации закономерностью (2), а на рис. 3, б — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи ε и ее аппроксимация закономерностью (3). Видно, что во всех рассмотренных случаях наблюдается хорошее соответствие данных теории и численного моделирования, что говорит о применимости теории индуцированной шумом переключаемости для широкого класса динамических систем, характеризующихся двулистной структурой хаотического аттрактора.

Таким образом, в настоящей работе исследованы характеристики переключающегося поведения, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах со сложной (двулистной) топологией хаотического аттрактора (осцилляторов Лоренца, систем Чена). Показано, что возникновение переключаемости в данном случае обусловлено асинхронным перескоком изображающих точек с одного листа хаотического аттрактора на другой, а распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра связи характеризуются экспоненциальным характером распределения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00224). Исследование взаимно связанных систем Чена осуществлялось при поддержке Совета по грантам президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (проект МК-531.2018.2).

Список литературы

- [1] Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. N 2. P. 980–994.
- [2] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. N 5. P. R4508–R4511.
- [3] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 2. С. 1–9.
- [4] Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S. // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86. N 3. P. 036216.
- [5] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 20. С. 21–29.
- [6] Zheng Z., Wang X., Cross M.C. // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. N 5. P. 056211.
- [7] Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84. N 3. P. 037201.
- [8] Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 5. P. 4528–4535.
- [9] Pyragas K. // Nonlinear Anal. Model. 1998. N 3. P. 101–129.
- [10] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Europhys. Lett. 2005. Vol. 70. N 2. P. 169–175.
- [11] Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E. // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. N 6. P. 064901.
- [12] Pisarchik A.N., Jaimés-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G. // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86. N 5. P. 056219.
- [13] Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26. № 1. С. 80–89.
- [14] Chen Z., Yang Y., Qi G., Yuan Z. // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 360. N 6. P. 696–701.
- [15] Москаленко О.И., Ханадеев В.А., Короновский А.А. // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 19. С. 87–95.