

## Фотонные кристаллы на основе сред с произвольной анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемостей

© Г.Ф. Глинский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“,  
197376 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: genaglinskii@mail.ru

(Поступило в Редакцию 14 июля 2018 г.)

Предложен общий подход к анализу собственных мод в анизотропных и гиротропных 3D фотонных кристаллах на основе диэлектрических и магнитных сред. В основе предлагаемого подхода лежит представление стационарных макроскопических уравнений Максвелла в операторной форме, соответствующей квантово-механическому уравнению для фотона, спин которого  $s = 1$ . Напряженностям электрического и магнитного полей в этих уравнениях сопоставлены векторы состояний в комплексном гильбертовом пространстве. Диэлектрическая и магнитная проницаемости выступают в роли операторов, действующих на эти векторы. Показано, что задача определения собственных мод фотонного кристалла сводится к поиску собственных векторов и собственных чисел эрмитова оператора, характеризующего спин-орбитальное взаимодействие фотона в исследуемой периодической анизотропной среде. В качестве базиса для представления операторных уравнений предлагается использовать состояния фотонов с определенным волновым вектором (определенным импульсом) и с определенной линейной или круговой спиновой поляризацией. В качестве примера рассмотрены одномерные фотонные кристаллы. Исследовано влияние анизотропии и гиротропии на дисперсию собственных мод в этих кристаллах. Проанализированы групповая скорость собственных мод, переносимый ими импульс, а также спиновый момент импульса в случае гиротропных сред.

DOI: 10.21883/JTF.2019.03.47163.273-18

### Введение

Фотонные кристаллы (ФК) как новый вид оптических сред появились благодаря пионерским работам Э. Яблоновича и С. Джона [1,2]. В настоящее время на их основе создан ряд новых оптических приборов и устройств таких как оптические фильтры, микрорезонаторы, волноводы, разветвители и др. В большинстве работ, посвященных теоретическому исследованию ФК, авторы, как правило, ограничивались анализом немагнитных сред с периодически изменяющейся в пространстве изотропной диэлектрической проницаемостью [3–6]. Однако одним из наиболее перспективных направлений в области применения ФК является разработка приборов с управляемыми характеристиками. Возможность управления модовой структурой ФК посредством внешних воздействий, например, внешнего электрического или магнитного поля, а также механической деформации, открывает широкие возможности их использования в различных оптоэлектронных устройствах в том числе в параметрических усилителях и преобразователях света. Любые внешние воздействия, приводящие к перестройке собственных мод ФК, так или иначе, связаны с изменением тензора диэлектрической или магнитной проницаемости среды. В частности, индуцируемая внешними полями анизотропия или гиротропия должны приводить к снятию поляризационного вырождения собственных мод изотропного ФК. В настоящее время в литературе отсутствует общий подход к анализу ФК на основе периодических сред с произвольной анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемостей. Отметим

лишь работы [7–14], в которых исследовались частные случаи анизотропных и гиротропных ФК.

В настоящей работе теория фотонных кристаллов обобщается на случай периодических диэлектрических и магнитных сред с произвольной анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемостей, а также сред, обладающих гиротропными свойствами. Предлагается простая операторная форма записи стационарных уравнений Максвелла, аналогичная квантово-механическому уравнению для фотона, спин которого  $s = 1$ . Показано, что задача определения собственных частот и собственных мод ФК сводится к расчету собственных однофотонных состояний, представляющих собой векторы в комплексном гильбертовом пространстве, а также собственных чисел эрмитова оператора, характеризующего спин-орбитальное взаимодействие фотона в исследуемой среде.

### 1. Операторная форма макроскопических уравнений Максвелла

Как известно, для описания электромагнитных волн в рамках макроскопической электродинамики в отсутствие источников поля достаточно рассмотреть следующие уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}\quad (1)$$

Стационарные, т.е. установившиеся и периодически изменяющиеся во времени решения этих уравнений, с учетом вещественности поля всегда можно представить в виде суммы двух независимых решений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= A[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}], \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= A[\mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}], \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= A[\mathbf{D}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{D}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}], \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= A[\mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}], \end{aligned} \quad (2)$$

Введенный здесь размерный нормировочный множитель  $A$  будем выбирать, исходя из условий, при которых усредненная по периоду  $T$  энергия электромагнитного поля в рассматриваемом конечном объеме  $V$  фиксирована и равна  $W_0$ , а отнесенные к  $A$  нормированные по энергии комплексные амплитуды, зависящие от координат, удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{1}{4} \int_V d\mathbf{x} [\mathbf{E}^*(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}^*(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + k.c.] = 1, \quad (3)$$

где  $d\mathbf{x} = dx dy dz$  — элемент объема. В соответствии с этими требованиями будем иметь

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_V d\mathbf{x} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \\ &= \frac{A^2}{8\pi} \int_V d\mathbf{x} [\mathbf{E}^*(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}^*(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + k.c.] = \frac{A^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $A = \sqrt{2\pi W_0}$ , а равенство (3) можно рассматривать как условие нормировки энергии электромагнитного поля, выраженной через нормированные поля, на единицу.

Согласно (1), нормированные условием (3) комплексные амплитуды полей удовлетворяют следующим стационарным уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\mathbf{x}), \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4)$$

В непоглощающей неоднородной анизотропной среде векторы индукции  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  связаны с напряженностями соответствующих полей  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  соотношениями

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{x}) &= \sum_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) E_j(\mathbf{x}), \\ B_i(\mathbf{x}) &= \sum_j \mu_{ij}(\mathbf{x}) H_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  и  $\mu_{ij}(\mathbf{x})$  зависящие от координат компоненты положительно определенных эрмитовых матриц — тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей соответственно.

Покажем, что уравнения (4) совместно с уравнениями связи (5) являются одним из возможных представлений более общих операторных уравнений

$$\begin{aligned} ic(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}})|H\rangle &= \omega \hat{\varepsilon}|E\rangle, \\ -ic(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}})|E\rangle &= \omega \hat{\mu}|H\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

которые будем рассматривать как одночастичные квантово-механические уравнения для фотона в анизотропной среде. В этих уравнениях  $\hat{\mathbf{s}}$  — оператор спина фотона;  $\hat{\mathbf{k}}$  — оператор волнового вектора с точностью до постоянной Планка, совпадающий с оператором импульса  $\hat{\mathbf{p}} = \hbar \hat{\mathbf{k}}$ ;  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  — соответственно операторы диэлектрической и магнитной проницаемостей. Все перечисленные операторы эрмитовы, т.е.  $\hat{\mathbf{s}}^+ = \hat{\mathbf{s}}$ ,  $\hat{\mathbf{k}}^+ = \hat{\mathbf{k}}$ ,  $\hat{\varepsilon}^+ = \hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mu}^+ = \hat{\mu}$ . В соответствии с общими принципами квантовой теории оператор  $(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}})$  следует интерпретировать как оператор спин-орбитального взаимодействия фотона. Напряженностям электрического и магнитного полей в этих уравнениях сопоставляются два вектора в комплексном гильбертовом пространстве  $|E\rangle$  и  $|H\rangle$ , характеризующие стационарные состояния фотона в неоднородной анизотропной среде.

В качестве базиса представления уравнений (6) рассмотрим полный ортонормированный набор состояний фотона с определенной координатой  $|\mathbf{x}\rangle$  и определенной линейной поляризацией вдоль вещественных ортов декартовой системы координат  $\mathbf{e}_i = |i\rangle$ ,  $\mathbf{e}_i = \langle i|$  ( $i = 1, 2, 3$  или  $x, y, z$ ). Набор векторов  $|\mathbf{x}, i\rangle = |\mathbf{x}\rangle \otimes |i\rangle$  в рассматриваемом гильбертовом пространстве образуют базис, удовлетворяющий соответственно следующим условиям ортонормированности и полноты:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, i | \mathbf{x}', j \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ij}, \\ \sum_i \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, i\rangle \langle \mathbf{x}, i| &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя этот базис, представим векторы  $|E\rangle$  и  $|H\rangle$ , а также сопряженные с ними векторы  $\langle E|$  и  $\langle H|$  в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} |E\rangle &= \sum_i \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, i\rangle \langle \mathbf{x}, i|E\rangle = \sum_i \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, i\rangle E_i(\mathbf{x}), \\ |H\rangle &= \sum_i \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, i\rangle \langle \mathbf{x}, i|H\rangle = \sum_i \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, i\rangle H_i(\mathbf{x}), \\ \langle E| &= \sum_i \int_V d\mathbf{x} \langle E|\mathbf{x}, i\rangle \langle \mathbf{x}, i| = \sum_i \int_V d\mathbf{x} E_i^*(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}, i|, \\ \langle H| &= \sum_i \int_V d\mathbf{x} \langle H|\mathbf{x}, i\rangle \langle \mathbf{x}, i| = \sum_i \int_V d\mathbf{x} H_i^*(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}, i|. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичным образом определим в рассматриваемом базисе вид всех операторов, входящих в уравнения (6):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, i | \hat{\mathbf{s}} | \mathbf{x}', j \rangle &= s_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \langle \mathbf{x}, i | \hat{\mathbf{k}} | \mathbf{x}', j \rangle &= -i [\nabla_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \delta_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, i | \hat{\varepsilon} | \mathbf{x}', j \rangle &= \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \langle \mathbf{x}, i | \hat{\mu} | \mathbf{x}', j \rangle &= \mu_{ij}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $s_{ij}$  — матричные элементы матриц спинового момента  $s = 1$  в декартовом базисе  $|i\rangle$  [15]:

$$s_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, s_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, s_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Из полученных соотношений (7)–(10) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_j \int_V d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x}, i | (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) | \mathbf{x}', j \rangle \langle \mathbf{x}', j | H \rangle &= [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x})]_i, \\ \sum_j \int_V d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x}, i | (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) | \mathbf{x}', j \rangle \langle \mathbf{x}', j | E \rangle &= [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x})]_i, \\ \sum_j \int_V d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x}, i | \hat{\varepsilon} | \mathbf{x}', j \rangle \langle \mathbf{x}', j | E \rangle &= \sum_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) E_j(\mathbf{x}), \\ \sum_j \int_V d\mathbf{x}' \langle \mathbf{x}, i | \hat{\mu} | \mathbf{x}', j \rangle \langle \mathbf{x}', j | H \rangle &= \sum_j \mu_{ij}(\mathbf{x}) H_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Тем самым доказывается эквивалентность операторных уравнений (6) в базисе  $|\mathbf{x}, i\rangle$  и максвелловских уравнений (4).

Представление оператора спина  $\hat{\mathbf{s}}$  в декартовом базисе  $|i\rangle$  (формула (10)) не является единственно возможным. В гиротропных диэлектрических или магнитных средах с осью гирации, направленной вдоль оси  $z$ , более удобно использовать так называемый сферический базис  $|m\rangle$  ( $m = +1, 0, -1$ ), определяющий для электромагнитной волны, волновой вектор которой  $\mathbf{k} \parallel z$ , две ортогональные круговые поляризации: правую ( $m = +1$ ) и левую ( $m = -1$ ). Оба базиса декартов  $|i\rangle$  и сферический  $|m\rangle$  связаны следующим унитарным преобразованием [15]:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \sum_m |m\rangle \langle m | i \rangle = \sum_m |m\rangle U_{mi}, \\ |m\rangle &= \sum_i |i\rangle \langle i | m \rangle = \sum_i |i\rangle U_{im}^+, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & i & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

— унитарная матрица, удовлетворяющая условиям:  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^+ \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  — единичная матрица). В частности, согласно (11) и (12):

$$\begin{aligned} | + 1 \rangle &= -\frac{|x\rangle + iy\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \langle + 1 | = -\frac{\langle x | - i \langle y |}{\sqrt{2}}, \\ | 0 \rangle &= |z\rangle, \quad \langle 0 | = \langle z |, \\ | - 1 \rangle &= \frac{|x\rangle - iy\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \langle - 1 | = \frac{\langle x | + i \langle y |}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Множество векторов  $|\mathbf{x}, m\rangle = |\mathbf{x}\rangle \otimes |m\rangle$  также образуют полный ортонормированный базис

$$\langle \mathbf{x}, m | \mathbf{x}', m' \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{mm'},$$

$$\sum_m \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, m\rangle \langle \mathbf{x}, m| = 1.$$

Операторы в этом представлении имеют вид, аналогичный (9):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, m | \hat{\mathbf{s}} | \mathbf{x}', m' \rangle &= s'_{mm'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \langle \mathbf{x}, m | \hat{\mathbf{k}} | \mathbf{x}', m' \rangle &= -i [\nabla_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \delta_{mm'}, \\ \langle \mathbf{x}, m | \hat{\varepsilon} | \mathbf{x}', m' \rangle &= \varepsilon'_{mm'}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \langle \mathbf{x}, m | \hat{\mu} | \mathbf{x}', m' \rangle &= \mu'_{mm'}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned}$$

где матрицы в сферическом базисе  $s'$ ,  $\varepsilon'(\mathbf{x})$ ,  $\mu'(\mathbf{x})$  связаны с соответствующими матрицами в декартовом базисе  $s$ ,  $\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $\mu(\mathbf{x})$  унитарным преобразованием вида  $\mathbf{c}' = \mathbf{U} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{U}^+$ . При этом матрицы спинового момента в результате этого преобразования приобретают вид

$$\begin{aligned} s'_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ s'_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а матрицы  $\varepsilon(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$  для сред, у которых  $\varepsilon_{11}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{22}(\mathbf{x})$  и  $\mu_{11}(\mathbf{x}) = \mu_{22}(\mathbf{x})$ , а ось гирации направлена вдоль оси  $z$ , становятся диагональными.

## 2. Переход к задаче определения собственных векторов и собственных чисел эрмитовых операторов

Наличие в правых частях уравнений (6) операторов  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$  приводит к необходимости решения обобщенной задачи нахождения собственных чисел  $\omega_l$  и собственных векторов  $|E_l\rangle$  и  $|H_l\rangle$ . Однако посредством преобразований, она может быть сведена к обычной задаче определения собственных чисел и собственных векторов эрмитова оператора. С этой целью введем новые векторы состояний

$$\begin{aligned} |\tilde{E}\rangle &= \hat{\varepsilon}^{1/2} |E\rangle, \\ |\tilde{H}\rangle &= \hat{\mu}^{1/2} |H\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

а также неэрмитов оператор частоты  $\hat{\Omega}$ , который определим как

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= ic \hat{\varepsilon}^{-1/2} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mu}^{-1/2}, \\ \hat{\Omega}^+ &= -ic \hat{\mu}^{-1/2} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\varepsilon}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Новые векторы состояний, согласно (6), (13) и (14), удовлетворяют следующей системе операторных уравнений:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}|\tilde{H}\rangle &= \omega|\tilde{E}\rangle, \\ \hat{\Omega}^+|\tilde{E}\rangle &= \omega|\tilde{H}\rangle,\end{aligned}\quad (15)$$

а также эквивалентным ей уравнениям:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}^+\hat{\Omega}|\tilde{H}\rangle &= \omega^2|\tilde{H}\rangle, \\ \hat{\Omega}\hat{\Omega}^+|\tilde{E}\rangle &= \omega^2|\tilde{E}\rangle.\end{aligned}\quad (16)$$

Каждое из уравнений (16) является уравнением для определения собственных чисел (квадратов частот)  $\omega_l^2$  и соответствующих им собственных векторов  $|\tilde{H}_l\rangle$  и  $|\tilde{E}_l\rangle$  эрмитовых операторов  $\hat{\Omega}^+\hat{\Omega}$  и  $\hat{\Omega}\hat{\Omega}^+$ . Однако состояния  $|\tilde{H}_l\rangle$  и  $|\tilde{E}_l\rangle$  не независимы, а связаны между собой соотношениями (15). Как собственные векторы эрмитовых операторов они по отдельности ортогональны друг другу, если  $l \neq l'$ , и могут быть нормированы на единицу

$$\begin{aligned}\langle\tilde{E}_l|\tilde{E}_{l'}\rangle &= \delta_{ll'}, \\ \langle\tilde{H}_l|\tilde{H}_{l'}\rangle &= \delta_{ll'}.\end{aligned}\quad (17)$$

Каждому собственному состоянию фотона  $|\tilde{H}_l\rangle$  и  $|\tilde{E}_l\rangle$  и в выбранном базисе будут соответствовать собственные нормированные по энергии электромагнитные моды. Так, например, в базисе  $|\mathbf{x}, i\rangle$  им соответствуют моды  $\tilde{H}_{i,l}(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}, i|\tilde{H}_l\rangle$  и  $\tilde{E}_{i,l}(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}, i|\tilde{E}_l\rangle$ .

Покажем, что условия нормировки (17) эквивалентны условию нормировки усредненной по периоду энергии электромагнитного поля, запасенной в  $l$ -й собственной моде, на единицу. Действительно, согласно (3), усредненная по периоду плотность энергии  $l$ -й моды  $w_l(\mathbf{x})$ , выраженная через нормированные поля, определяется соотношением

$$w_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}[\mathbf{E}_l^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}_l(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_l^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_l(\mathbf{x}) + k.c.].$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned}W_l &= \int_V d\mathbf{x} w_l(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_V d\mathbf{x} [E_{il}^*(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) E_{jl}(\mathbf{x}) + H_{il}^*(\mathbf{x}) \mu_{ij}(\mathbf{x}) H_{jl}(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} [\langle E_l | \hat{\varepsilon} | E_l \rangle + \langle H_l | \hat{\mu} | H_l \rangle] = \frac{1}{2} [\langle \tilde{E}_l | \tilde{E}_l \rangle + \langle \tilde{H}_l | \tilde{H}_l \rangle] = 1.\end{aligned}$$

При выводе этих соотношений мы воспользовались формулами (5), (8), (9), (13) и (17). Аналогичным образом для каждой  $l$ -й собственной моды определим усредненные по периоду плотность импульса электромагнитного поля  $\mathbf{S}_l(\mathbf{x})$ , которая пропорциональна вектору Пойнтинга, и плотность спинового момента  $\mathbf{M}_l(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}_l^*(\mathbf{x}) \times \mathbf{H}_l(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_l^*(\mathbf{x}) \times \mathbf{E}_l(\mathbf{x})], \\ \mathbf{M}_l(\mathbf{x}) &= \frac{-i}{2} [\tilde{\mathbf{E}}_l^*(\mathbf{x}) \times \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{H}}_l^*(\mathbf{x}) \times \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{x})].\end{aligned}$$

В соответствии с этим полный импульс  $\mathbf{S}_l$  и полный спиновый момент  $\mathbf{M}_l$  нормированной по энергии моды будут определяться следующими выражениями:

$$\mathbf{S}_l = \int_V d\mathbf{x} \mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} (\langle E_l | \hat{\mathbf{s}} | H_l \rangle - \langle H_l | \hat{\mathbf{s}} | E_l \rangle), \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_l = \int_V d\mathbf{x} \mathbf{M}_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\langle \tilde{E}_l | \hat{\mathbf{s}} | \tilde{E}_l \rangle + \langle \tilde{H}_l | \hat{\mathbf{s}} | \tilde{H}_l \rangle). \quad (19)$$

Как следует из этих формул, обе величины  $\mathbf{S}_l$  и  $\mathbf{M}_l$  являются безразмерными.

### 3. Собственные моды анизотропного 3D ФК

Рассмотрим общий случай анизотропного 3D ФК, прямая и обратная решетки которого определяются тремя, связанными друг с другом, основными (примитивными) векторами трансляции  $\mathbf{a}_{1,2,3}$  и  $\mathbf{b}_{1,2,3}$  соответственно. Произвольные векторы трансляции прямой  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  обратной решеток определим как

$$\mathbf{a} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{b} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3,$$

где  $n_i, m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Согласно свойствам ФК, все операторы в уравнениях (15) и (16) должны обладать трансляционной симметрией, в частности, операторы диэлектрической и магнитной проницаемостей в базисе  $|\mathbf{x}, i\rangle$  удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) &= \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}), \\ \mu_{ij}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) &= \mu_{ij}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (20)$$

В трансляционно-инвариантной системе в качестве базиса представления уравнений (15) и (16) удобно использовать состояния фотона с определенным волновым вектором, который запишем в виде суммы вектора обратной решетки  $\mathbf{b}$  и вектора  $\mathbf{k}$ , пробегающего для ограниченного кристалла дискретный ряд значений в зоне Бриллюэна ФК, и определенной, например, линейной поляризации  $|\mathbf{b} + \mathbf{k}, i\rangle$ . Этот базис связан с базисом  $|\mathbf{x}, i\rangle$  следующим унитарным преобразованием (преобразованием Фурье):

$$|\mathbf{b} + \mathbf{k}, i\rangle = \sum_j \int_V d\mathbf{x} |\mathbf{x}, j\rangle \langle \mathbf{x}, j | \mathbf{b} + \mathbf{k}, i \rangle, \quad (21)$$

где

$$\langle \mathbf{x}, j | \mathbf{b} + \mathbf{k}, i \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\mathbf{b} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \delta_{ji}, \quad (22)$$

$V = N\Omega_0$  — объем ФК,  $N$  — число элементарных ячеек в ФК,  $\Omega_0$  — объем элементарной ячейки. Базисные орты  $|\mathbf{b} + \mathbf{k}, i\rangle$  удовлетворяют соответственно следующим условиям ортонормированности и полноты:

$$\langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \mathbf{b}' + \mathbf{k}', j \rangle = \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ij},$$

$$\sum_{\mathbf{b}, \mathbf{k}, i} |\mathbf{b} + \mathbf{k}, i\rangle \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i| = 1. \quad (23)$$

Используя соотношения (20)–(23), определим вид всех интересующих нас операторов в этом базисе

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \hat{s} | \mathbf{b}' + \mathbf{k}', j \rangle &= s_{ij} \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \hat{\mathbf{k}} | \mathbf{b}' + \mathbf{k}', j \rangle &= (\mathbf{b} + \mathbf{k}) \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'} \delta_{ij} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \hat{\varepsilon} | \mathbf{b}' + \mathbf{k}', j \rangle &= \varepsilon_{ij} (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \hat{\mu} | \mathbf{b}' + \mathbf{k}', j \rangle &= \mu_{ij} (\mathbf{b} - \mathbf{b}') \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $s_{ij}$  определяются формулой (10), а

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{b} - \mathbf{b}') &= \frac{1}{\Omega_0} \int_{\Omega_0} d\mathbf{x} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\mathbf{x}}, \\ \mu_{ij}(\mathbf{b} - \mathbf{b}') &= \frac{1}{\Omega_0} \int_{\Omega_0} d\mathbf{x} \mu_{ij}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\mathbf{x}} \end{aligned}$$

— фурье-образы компонент диэлектрической и магнитной проницаемостей соответственно.

Как следует из (24), наличие трансляционной симметрии у ФК приводит к тому, что все операторы в рассматриваемом базисе диагональны по индексам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . В результате соответствующие этим операторам матрицы представления имеют блочно-диагональную структуру. Поэтому они сами и любые их произведения могут быть выражены через матрицы меньшей размерности, параметрически зависящие от волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Так, например

$$\langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \hat{\Omega} | \mathbf{b}' + \mathbf{k}', j \rangle = \Omega_{\mathbf{b}i, \mathbf{b}'j}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},$$

где  $\Omega_{\mathbf{b}i, \mathbf{b}'j}(\mathbf{k})$  — матричные элементы следующей матрицы (см. формулу (14)):

$$\Omega(\mathbf{k}) = ic\varepsilon^{-1/2}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{k})) \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1/2}. \quad (25)$$

Здесь и далее в этом разделе  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{K}(\mathbf{k})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  — матрицы, элементы которых, согласно (24), определены соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{b}i, \mathbf{b}'j} &= s_{ij} \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'}, \\ \mathbf{K}_{\mathbf{b}i, \mathbf{b}'j}(\mathbf{k}) &= (\mathbf{b} + \mathbf{k}) \delta_{\mathbf{b}\mathbf{b}'} \delta_{ij}, \\ \varepsilon_{\mathbf{b}i, \mathbf{b}'j} &= \varepsilon_{ij} (\mathbf{b} - \mathbf{b}'), \\ \mu_{\mathbf{b}i, \mathbf{b}'j} &= \mu_{ij} (\mathbf{b} - \mathbf{b}'). \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно вышеизложенному, собственные векторы  $|\tilde{H}_{l\mathbf{k}'}\rangle$  и  $|\tilde{E}_{l\mathbf{k}'}\rangle$ , являющиеся решениями уравнений (15) и (16) и описывающие собственные  $l\mathbf{k}'$ -е блоховские состояния фотона, в базисе  $|\mathbf{b} + \mathbf{k}, i\rangle$  также имеют вид блочно-диагональных матриц:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \tilde{H}_{l\mathbf{k}'} \rangle &= \tilde{H}_{l, i}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}, i | \tilde{E}_{l\mathbf{k}'} \rangle &= \tilde{E}_{l, i}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно, в этом базисе они будут характеризоваться параметрически зависящими от волнового вектора  $\mathbf{k}$  собственными столбцами  $\tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k})$  и  $\tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k})$ , компоненты которых соответственно равны  $\tilde{H}_{l, i}(\mathbf{k})$  и  $\tilde{E}_{l, i}(\mathbf{k})$ . В результате операторные уравнения (15) и (16) могут быть представлены соответственно в виде следующих параметрически зависящих от вектора  $\mathbf{k}$  матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}) &= \omega_l(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}), \\ \Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) &= \omega_l(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (28)$$

и

$$\begin{aligned} \Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \Omega(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}) &= \omega_l^2(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}), \\ \Omega(\mathbf{k}) \cdot \Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) &= \omega_l^2(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, задача определения собственных нормированных по энергии блоховских мод ФК сводится к поиску собственных чисел  $\omega_l^2(\mathbf{k})$  и соответствующих им собственных столбцов  $\tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k})$  матричных уравнений (28) и (29). Для этого, как указывалось выше, из четырех уравнений (28) и (29) достаточно рассмотреть только два, например, следующие:

$$\begin{aligned} \Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \Omega(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}) &= \omega_l^2(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}), \\ \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\omega_l(\mathbf{k})} \Omega(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (30)$$

При этом продольные моды, у которых  $\omega_l(\mathbf{k}) = 0$ , должны быть исключены из рассмотрения. Необходимую для определения матрицы  $\Omega(\mathbf{k})$  процедуру извлечения корня квадратного из эрмитовых матриц  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  с элементами, определенными в (26), можно осуществить посредством предварительного перехода к базису, в котором эти матрицы диагональны, а после извлечения корня возвратиться к исходному базису. Собственные столбцы  $\tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k})$  и  $\tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k})$  удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{l'}(\mathbf{k}) &= \delta_{ll'}, \\ \tilde{\mathbf{E}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{l'}(\mathbf{k}) &= \delta_{ll'}, \end{aligned} \quad (31)$$

которые непосредственно следуют из условий ортонормированности собственных блоховских состояний фотона  $\langle \tilde{H}_{l\mathbf{k}} | \tilde{H}_{l'\mathbf{k}'} \rangle = \langle \tilde{E}_{l\mathbf{k}} | \tilde{E}_{l'\mathbf{k}'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  и соотношений (27):

$$\begin{aligned} \langle \tilde{H}_{l\mathbf{k}} | \tilde{H}_{l'\mathbf{k}'} \rangle &= \sum_{\mathbf{b}, \mathbf{k}'', i} \langle \tilde{H}_{l\mathbf{k}} | \mathbf{b} + \mathbf{k}'', i \rangle \langle \mathbf{b} + \mathbf{k}'', i | \tilde{H}_{l'\mathbf{k}'} \rangle \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{b}, i} \tilde{H}_{l, \mathbf{b}i}^+(\mathbf{k}) \tilde{H}_{l', i}(\mathbf{k}) \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{l'}(\mathbf{k}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ll'}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается и второе условие в (31).

Пространственное распределение проекций магнитного и электрического полей в  $l\mathbf{k}$ -й нормированной

по энергии блоховской моде  $H_{i,lk}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, i | H_{lk} \rangle$  и  $E_{i,lk}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, i | E_{lk} \rangle$  можно определить с помощью обратного преобразования Фурье:

$$H_{i,lk}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{b}+\mathbf{k})\mathbf{x}} H_{bi,l}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} H_{i,l}(\mathbf{x}; \mathbf{k}),$$

$$E_{i,lk}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{b}+\mathbf{k})\mathbf{x}} E_{bi,l}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} E_{i,l}(\mathbf{x}; \mathbf{k}).$$
(32)

Здесь

$$H_{i,l}(\mathbf{x}; \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}} \sum_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}\mathbf{x}} H_{bi,l}(\mathbf{k}),$$

$$E_{i,l}(\mathbf{x}; \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}} \sum_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}\mathbf{x}} E_{bi,l}(\mathbf{k})$$
(33)

— периодические части блоховских функций (32), фурье-компоненты которых  $H_{bi,l}(\mathbf{k})$  и  $E_{bi,l}(\mathbf{k})$  образуют соответственно столбцы  $\mathbf{H}_l(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{E}_l(\mathbf{k})$ , которые, согласно (13), связаны с собственными столбцами матричных уравнений (30)  $\tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k})$  и  $\tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k})$  соотношениями

$$\mathbf{H}_l(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mu}^{-1/2} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{E}_l(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1/2} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k})$$
(34)

где матрицы  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  определены в (26).

При вычислении полного импульса и полного спинового момента  $l$ -й нормированной по энергии блоховской моды достаточно воспользоваться формулами (18) и (19). Соответственно будем иметь

$$\mathbf{S}_l(\mathbf{k}) = \frac{i}{2} [\mathbf{E}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{H}_l(\mathbf{k}) - \mathbf{H}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{E}_l(\mathbf{k})],$$

$$\mathbf{M}_l(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{E}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k})],$$
(35)

где мы воспользовались матричным представлением оператора спина (формула (26)).

Покажем, что полный импульс  $l$ -й нормированной по энергии моды  $\mathbf{S}_l(\mathbf{k})$  совпадает с ее групповой скоростью  $\mathbf{v}_{g,l}(\mathbf{k}) = \partial\omega_l(\mathbf{k})/\partial\mathbf{k}$ , отнесенной к скорости света в вакууме. С этой целью в уравнениях (28) осуществим бесконечно малую вариацию волнового вектора  $\delta\mathbf{k}$  [16]. Будем иметь

$$\delta\Omega(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}) + \Omega(\mathbf{k}) \cdot \delta\tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}) = \delta\omega_l(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k})$$

$$+ \omega_l(\mathbf{k}) \delta\tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}),$$

$$\delta\Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) + \Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \delta\tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) = \delta\omega_l(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k})$$

$$+ \omega_l(\mathbf{k}) \delta\tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}),$$

Далее умножим слева первое из этих уравнений на  $\tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k})$ , а второе на  $\tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k})$  и воспользуемся уравнениями для эрмитово сопряженных столбцов

$$\tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \Omega^+(\mathbf{k}) = \omega_l(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}_l^+(\mathbf{k}),$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \Omega(\mathbf{k}) = \omega_l(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k}),$$

которые получаются посредством эрмитова сопряжения уравнений (28). Складывая левые и правые части полученных уравнений после сокращений подобных членов и учета условий нормировки (31), получим

$$\tilde{\mathbf{E}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \delta\Omega(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{H}}_l(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{H}}_l^+(\mathbf{k}) \cdot \delta\Omega^+(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_l(\mathbf{k}) = 2\delta\omega_l(\mathbf{k}).$$
(36)

Согласно (25) и (26):

$$\delta\Omega(\mathbf{k}) = ic\boldsymbol{\varepsilon}^{-1/2} \cdot (\mathbf{s} \cdot \delta\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1/2},$$

$$\delta\Omega^+(\mathbf{k}) = -ic\boldsymbol{\mu}^{-1/2} \cdot (\mathbf{s} \cdot \delta\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1/2},$$
(37)

Подстановка (37) в (36) с учетом (34) и (35) приводит к искомому результату

$$\mathbf{S}_l(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_{g,l}(\mathbf{k})/c.$$
(38)

#### 4. Дисперсия собственных мод анизотропных и гиротропных 1D ФК (численный расчет)

Развитая выше теория была использована для расчета зонной структуры и пространственного распределения собственных мод 1D ФК на основе анизотропных и гиротропных диэлектрических и магнитных сред. Рассматривался наиболее общий случай среды, с периодически изменяющимися в направлении  $z$  компонентами тензоров диэлектрической  $\varepsilon_{ik}(z)$  и магнитной  $\mu_{ik}(z)$  проницаемостей. С этой целью были введены две периодические с периодом решетки ФК  $a_0$  ступенчатые функции

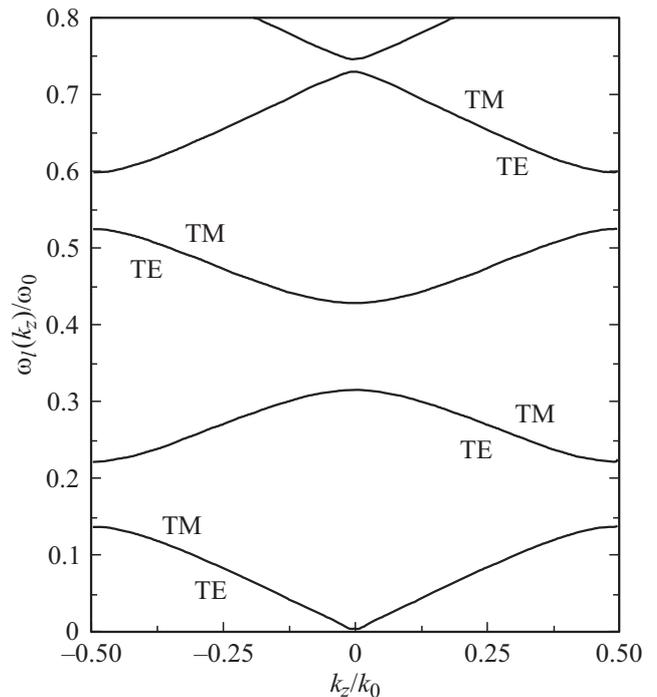
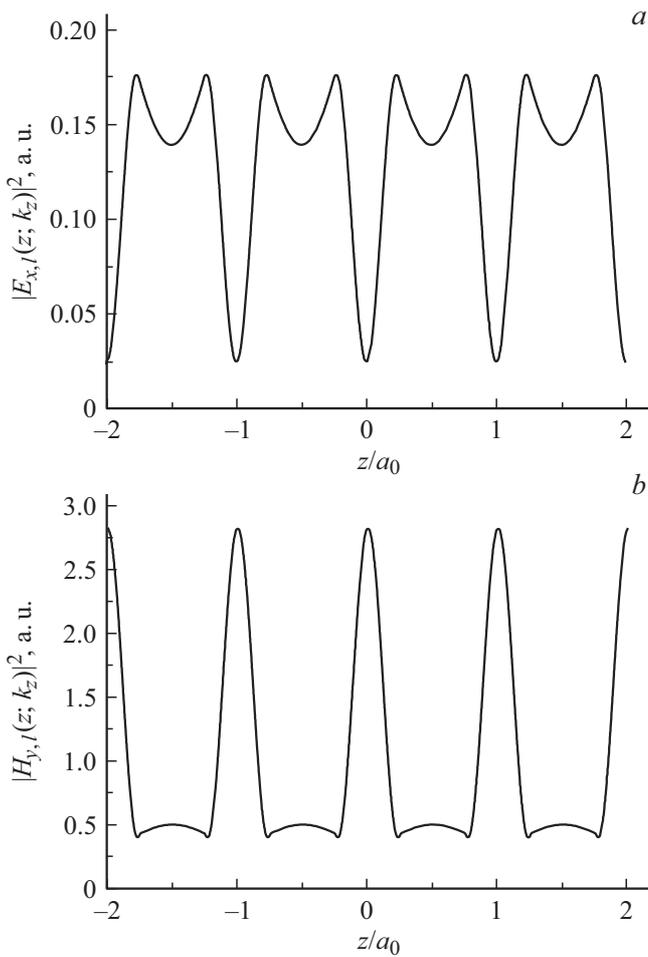


Рис. 1. Зонная структура изотропного 1D ФК. Параметры ФК:  $\Delta\varepsilon_{ik}^1 = 15\delta_{ik}$ ,  $\Delta\varepsilon_{ik}^2 = \delta_{ik}$ ,  $\Delta\mu_{ik}^{1,2} = 0$ ;  $\omega_0 = ck_0$ ,  $k_0 = 2\pi/a_0$ .



**Рис. 2.** Пространственное распределение электрического (а) и магнитного (б) полей в изотропном 1D ФК. ТМ-мода,  $l = 3$ ,  $k_z = 0.25k_0$ . Параметры ФК приведены в подписи к рис. 1.

$f_1(z)$  и  $f_2(z) = 1 - f_1(z)$ , осуществляющие послынную пространственную модуляцию как диэлектрической, так и магнитной проницаемостей. Первая из этих функций в пределах элементарной ячейки ФК, центрированной в точке  $z = 0$ , удовлетворяла следующим условиям:  $f_1(z) = 1$  в области  $|z| \leq a_0/4$  и  $f_1(z) = 0$  в остальной ее части. Координатная зависимость компонент тензоров определялась следующим образом:

$$\epsilon_{ik}(z) = \delta_{ik} + \Delta\epsilon_{ik}^1 f_1(z) + \Delta\epsilon_{ik}^2 f_2(z),$$

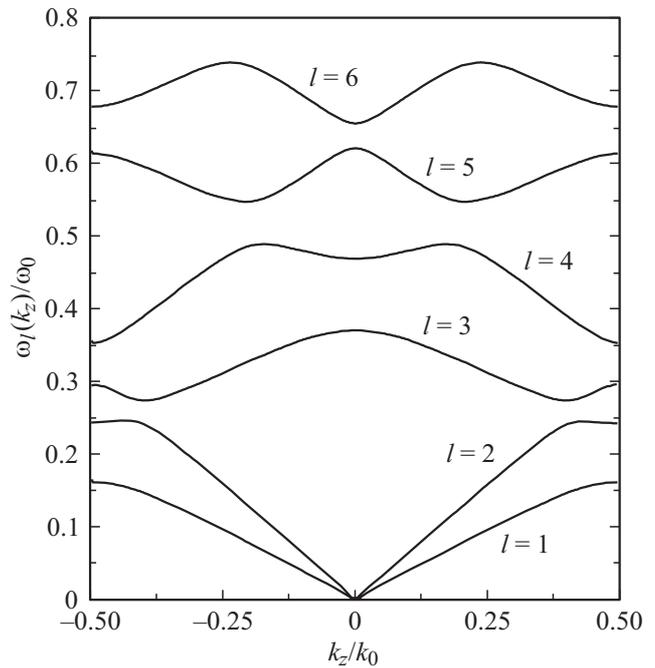
$$\mu_{ik}(z) = \delta_{ik} + \Delta\mu_{ik}^1 f_1(z) + \Delta\mu_{ik}^2 f_2(z).$$

Здесь  $\Delta\epsilon_{ik}^{1,2}$  и  $\Delta\mu_{ik}^{1,2}$  — постоянные, характеризующие изменения компонент тензоров относительно вакуума соответственно в слоях 1 и 2. Произвольный вектор обратной решетки, направленный вдоль оси  $z$ , определялся как  $b_m = (2\pi/a_0)m$ , где  $m = -N_b \dots 0 \dots N_b$  ( $N_b = 80$ ). Таким образом, матрица  $\Omega(\mathbf{k})$  имела размерность  $483 \times 483$ . Во всех расчетах рассматривались электромагнитные волны, у которых  $k_x = k_y = 0$ .

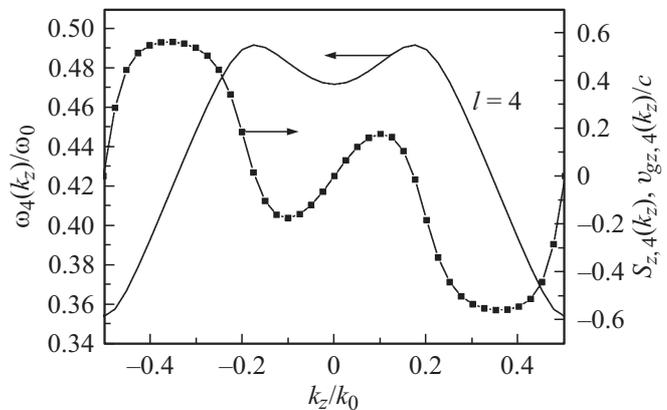
В качестве примера на рис. 1 представлены результаты расчета зонной структуры изотропного 1D ФК,

параметры которого указаны в подписи к рисунку. Как и следовало ожидать, собственные моды этого кристалла, соответствующие ТМ- и ТЕ-поляризациям вырождены. Пространственное распределение электромагнитного поля в этом кристалле рассчитывалось по формуле (33). Соответствующие результаты для квадрата модуля амплитуд поля ТМ-моды приведены на рис. 2.

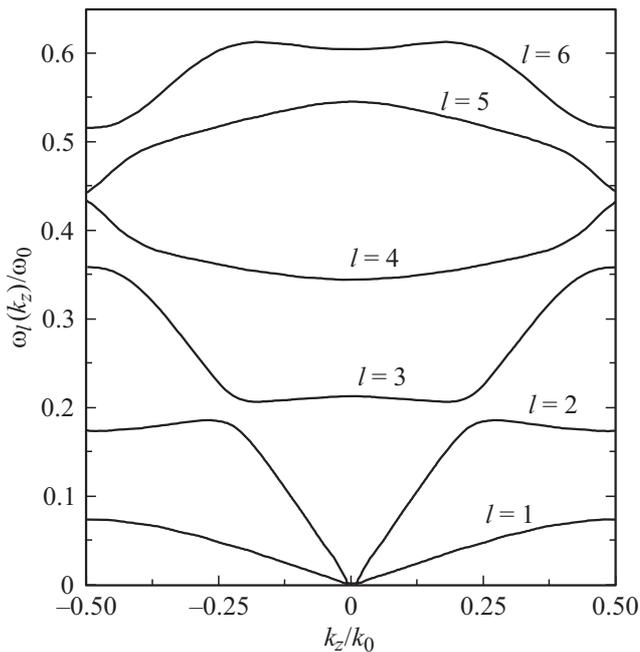
На рис. 3 представлены результаты расчета зонной структуры ФК с анизотропной диэлектрической проницаемостью в обоих слоях, но различной ориентацией в них осей анизотропии. Как видно из рисунка, наряду с расщеплением собственных мод, обусловлен-



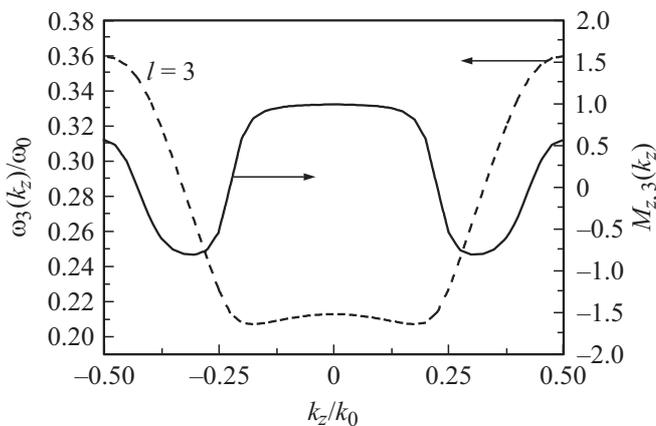
**Рис. 3.** Зонная структура анизотропного 1D ФК. Параметры ФК:  $\Delta\epsilon_{11}^1 = 10$ ,  $\Delta\epsilon_{22}^1 = \Delta\epsilon_{33}^1 = 2$ ,  $\Delta\epsilon_{ik}^1 = 0$  ( $i \neq k$ ),  $\Delta\epsilon_{11}^2 = \Delta\epsilon_{22}^2 = \Delta\epsilon_{33}^2 = \Delta\epsilon_{12}^2 = \Delta\epsilon_{21}^2 = 1$ ,  $\Delta\epsilon_{i3}^2 = \Delta\epsilon_{3i}^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Delta\mu_{ik}^{1,2} = 0$ .



**Рис. 4.** Дисперсия частоты, полного импульса и групповой скорости моды  $l = 4$  анизотропного 1D ФК. Параметры ФК приведены в подписи к рис. 3. Точками показана дисперсия групповой скорости.



**Рис. 5.** Зонная структура гиротропного 1D ФК. Параметры ФК:  $\Delta\epsilon_{ik}^1 = 0$ ,  $\Delta\epsilon_{11}^2 = \Delta\epsilon_{22}^2 = \Delta\epsilon_{33}^2 = \Delta\epsilon_{12}^2 = \Delta\epsilon_{21}^2 = 1$ ,  $\Delta\epsilon_{i3}^2 = \Delta\epsilon_{3i}^2 = 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Delta\mu_{11}^1 = \Delta\mu_{22}^1 = \Delta\mu_{33}^1 = 15$ ,  $\Delta\mu_{12}^1 = -\Delta\mu_{21}^1 = 15i$ ,  $\Delta\mu_{i3}^1 = \Delta\mu_{3i}^1 = 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Delta\mu_{ik}^2 = 0$ .



**Рис. 6.** Дисперсия частоты и полного момента моды  $l = 3$  гиротропного 1D ФК. Параметры ФК приведены в подписи к рис. 5. Дисперсия частоты показана штриховой линией.

ным анизотропией диэлектрических проницаемостей, в этом случае дополнительно наблюдаются эффекты антипересечения дисперсионных ветвей. Рассчитанная по формуле (35) зависимость проекции полного импульса электромагнитного поля на ось  $z$   $S_{z,l}(k_z)$  от волнового вектора  $k_z$  моды с номером  $l = 4$  представлена на рис. 4. Для сравнения на этом же рисунке приведены закон дисперсии этой моды  $\omega_4(k_z)$  и рассчитанная с его помощью дисперсия ее групповой скорости  $v_{gz,4}(k_z)$ . Как видно, дисперсионные зависимости полного импульса и групповой скорости, отнесенной к скорости света в вакууме, совпадают, что находится в полном согласии

с представленными выше теоретическими результатами (формула (38)).

Дисперсия собственных мод ФК при наличии магнитной гиротропии одного из его слоев и диэлектрической анизотропии другого слоя, ось анизотропии которого не совпадает с осью гирации, приведена на рис. 5. Здесь, как и в случае анизотропного ФК (рис. 3), наблюдается снятие вырождения собственных мод и антипересечение дисперсионных ветвей. В качестве примера на рис. 6 представлен результат расчета зависимости проекции полного спинового момента на ось  $z$   $M_{z,l}(k_z)$  моды с номером  $l = 3$  (формула (35)). Здесь же для сравнения приведен ее закон дисперсии  $\omega_3(k_z)$ . Из рисунка следует, что спиновый момент переносимый этой модой зависит от  $k_z$  и в наших безразмерных единицах изменяется в пределах зоны Бриллюэна от  $-1$ , что соответствует волнам с левой круговой поляризацией, до  $+1$ , что характерно для волн с правой круговой поляризацией.

## Заключение

В работе продемонстрирована эквивалентность стационарных уравнений Максвелла для комплексных амплитуд электромагнитного поля и одночастичных квантовомеханических операторных уравнений для фотона. Переход к операторным уравнениям существенно упростил и максимально формализовал задачу определения зонной структуры и собственных мод ФК. Кроме того, данный подход позволил с единых позиций анализировать ФК на основе периодических сред с произвольной анизотропией и гиротропией их диэлектрических и магнитных свойств. Эффективность предлагаемого метода продемонстрирована на примере анализа зонной структуры и характеристик собственных мод анизотропных и гиротропных 1D ФК.

Автор признателен чл.-корр. РАН Ивченко Е.Л. и Глазову М.М. за интерес к настоящей работе и обсуждение ее результатов. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проектная часть 16.1750.2017/4.6).

## Список литературы

- [1] *Yablonovitch E.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 2059–2062.
- [2] *John S.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 2486–2489.
- [3] *Sukhoivanov I.A., Guryev I.V.* Photonic Crystals. Springer, 2009. 242 p.
- [4] *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals. Springer, 2005. 253 p.
- [5] *Спицын А.С., Глинский Г.Ф.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 5. С. 71–77. [*Spitsyn A.S., Glinskii G.F.* // Techn. Phys. 2008. Vol. 53. N 5. P. 602–608. DOI: 10.1134/S1063784208050125]
- [6] *Спицын А.С., Глинский Г.Ф.* // ФТП. 2008. Т. 42. Вып. 10. С. 1261–1267. [*Spitsyn A.S., Glinskii G.F.* // Semiconductors. 2008. Vol. 42. N 10. P. 1237–1243. DOI: 10.1134/S1063782608100175]

- [7] *Li Z-Y, Wang J, Gu D-Y* // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 58. P. 3721–3729.
- [8] *Belotelov V.I., Zvezdin A.K.* // J. Opt. Soc. Am. B. 2005. Vol. 22. N 1. P. 286–292.
- [9] *Alagappan G., Sun X.W., Shum P., Yu M.B., Doan M.T.* // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. Vol. 23. N 1. P. 159–167.
- [10] *Alagappan G., Sun X.W., Sun H.D.* // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 77. P. 195117. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.195117
- [11] *Khromova I.A., Melnikov L.A.* // Opt. Commun. 2008. Vol. 281. P. 5458–5466. DOI: 10.1016/j.optcom.2008.07.059
- [12] *Panah M.B., Abrishamian M.S., Mirtaheri S.A.* // J. Opt. 2011. Vol. 13. P. 015103. DOI: 10.1088/2040-8978/13/1/015103
- [13] *Ignatov A.I., Merzlikin A.M., Levy M., Vinogradov A.P.* // Materials. 2012. Vol. 5. P. 1055–1083. DOI: 10.3390/ma5061055
- [14] *Zhang H-F, Liu S-B, Kong X-K.* // Phys. Plasmas. 2013. Vol. 20. P. 092105.
- [15] *Глинский Г.Ф.* Методы теории групп в квантовой механике. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2012. 200 с. (<http://www.twirpx.com/file/1014645/>)
- [16] *Глинский Г.Ф.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 1. С. 90–95.