

01

## Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора

© А.В. Псху, С.Ш. Рехвиашвили<sup>¶</sup>

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

<sup>¶</sup> E-mail: rsergo@mail.ru

Поступило в Редакцию 25 сентября 2018 г.

Рассмотрена модель вынужденных колебаний осциллятора, основанная на применении математического аппарата дробного интегро-дифференцирования. Показано, что данная модель вполне сопоставима с классической моделью вынужденных колебаний осциллятора с вязким демпфированием. Вычислены параметры частотной характеристики установившихся колебаний дробного осциллятора и определена связь между порядком дробной производной в дифференциальном уравнении колебаний и добротностью системы.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540

В [1–13] рассматривались различные вопросы теории так называемого дробного осциллятора (от англ. fractional oscillator). Под дробным осциллятором понимается физическая система, которая совершает колебания, описываемые дифференциальным уравнением движения дробного порядка. Применение дробных операторов в дифференциальных уравнениях математических моделей тех или иных физических процессов связано, как правило, с описанием диссипативных и эрдитарных процессов, обусловленных эффектом памяти [14,15]. По этой причине возникает вопрос о взаимосвязи параметров дробного осциллятора с такими экспериментально измеряемыми параметрами, как резонансная частота, добротность, декремент затухания и др. Несмотря на довольно большое число опубликованных работ, корректное количественное сравнение различных моделей дробного осциллятора с классической моделью затухающих колебаний и/или реальными экспериментальными данными до сих пор отсутствует.

В [9] сделан обзор работ, посвященных применению дробного исчисления к различным задачам динамики сплошных сред, включая дробно-осцилляционные модели. Среди выводов работы авторы указывают на отсутствие способов определения параметров дробно-дифференциальных моделей исходя из натурных данных и делают заключение о неперспективности применения для инженерной практики данного подхода, в частности понятия „дробной“ инерции. В настоящей работе этот пробел устраняется. Рассмотрены вынужденные колебания и проведен расчет параметров частотных характеристик дробного осциллятора. Показано, что порядок дробной производной в уравнении колебаний связан с добротностью, которая характеризует потери энергии осциллятора вследствие диссипации.

Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний дробного осциллятора в виде

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega_0^\alpha x(t) = \omega_0^\alpha a \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad 1 < \alpha < 2, \quad (1)$$

где

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}},$$

$a$ ,  $\Omega$  и  $\varphi_0$  — амплитуда, частота и начальная фаза внешней переменной силы,  $\omega_0$  — частота свободных незатухающих колебаний осциллятора при  $\alpha = 2$ . Дробное дифференцирование в (1) понимается в смысле Капуто [14,15]. Отметим, что при  $\alpha < 2$  уравнение (1) не является инвариантным относительно замены знака времени. Согласно принципам классической механики, это означает, что уравнение (1) должно описывать некоторый процесс с диссипацией энергии. Здесь наша цель — найти зависимость амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний, описываемых уравнением (1), от частоты внешней силы и определить резонансную частоту и максимальную амплитуду колебаний осциллятора. На основе этих расчетов в настоящей работе дается физическая интерпретация модели дробного осциллятора.

Общее решение уравнения (1) можно представить в виде [16, с. 17]:

$$x(t) = C_1 E_{\alpha,1}(-\omega_0^\alpha t^\alpha) + C_2 t E_{\alpha,2}(-\omega_0^\alpha t^\alpha) + \bar{x}(t), \quad (2)$$

где

$$\bar{x}(t) = \omega_0^\alpha a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \cos(\Omega(t-\tau) + \varphi_0) d\tau,$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

$E_{\alpha,\beta}(z)$  — функция Миттаг-Лэффлера,  $\bar{x}(t)$  — частное решение неоднородного уравнения. Из асимптотики функции Миттаг-Лэффлера следует, что первые два слагаемых в правой части (2) стремятся к нулю при неограниченном возрастании  $t$ , и поэтому на амплитуду установившихся колебаний они не влияют. Представим

третье слагаемое в (2) в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \omega_0^\alpha a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \cos(\Omega(t-\tau) + \varphi_0) d\tau \\ &= \omega_0^\alpha a \left( \cos(\Omega t + \varphi_0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \cos(\Omega \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \sin(\Omega t + \varphi_0) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \sin(\Omega \tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Введем далее обозначения

$$\begin{aligned} A(t) &= f(t) - i g(t), \\ f(t) &= \omega_0^\alpha a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \cos(\Omega \tau) d\tau, \\ g(t) &= \omega_0^\alpha a \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \sin(\Omega \tau) d\tau. \end{aligned}$$

С учетом этих обозначений имеем

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \cos(\Omega t + \varphi_0) f(t) + \sin(\Omega t + \varphi_0) g(t) \\ &= |A(t)| \left[ \cos(\Omega t + \varphi_0) \frac{f(t)}{|A(t)|} + \sin(\Omega t + \varphi_0) \frac{g(t)}{|A(t)|} \right]. \end{aligned}$$

В силу определения функций  $f(t)$ ,  $g(t)$  и  $A(t)$  найдется такая функция  $\varphi(t)$ , что последнее выражение примет вид

$$\bar{x}(t) = |A(t)| [\cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \varphi(t) + \sin(\Omega t + \varphi_0) \sin \varphi(t)]$$

или окончательно

$$\bar{x}(t) = |A(t)| \cos(\Omega t + \varphi_0 - \varphi(t)). \quad (3)$$

Из (3) следует, что в общем случае амплитуда и фазовый сдвиг колебаний дробного осциллятора зависят от времени. Чтобы найти амплитуду и фазовый сдвиг установившихся колебаний, необходимо вычислить пределы:  $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$  и  $\varphi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ . В соответствии с введенными выше обозначениями имеем интеграл

$$\begin{aligned} A_\infty &= \omega_0^\alpha a \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) \exp(-i\Omega \tau) d\tau \\ &= a \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi^\alpha) \exp(-iy\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где  $y = \Omega/\omega_0$  — безразмерная частота внешней переменной силы. Данный интеграл можно вычислить, если

воспользоваться свойствами интегральных преобразований с функцией Райта в ядре [16, с. 72]. Для подынтегральных сомножителей имеем

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega_0^\alpha \tau^\alpha) &= \int_0^\infty \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\xi}{\tau^{\alpha/2}}\right) \sin \xi \frac{d\xi}{\tau} \\ &= A_\tau^{\alpha/2} \sin \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(-c\tau^{\alpha/2}) &= \int_0^\infty \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 0; -\frac{\tau}{\xi^{\alpha/2}}\right) \exp(-c\xi) \frac{d\xi}{\xi} \\ &= B_\tau^{\alpha/2} \exp(-c\tau), \end{aligned}$$

$$\phi(-\beta, 0; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k! \Gamma(-\beta k)}, \quad \frac{\pi}{2} \leq |\arg z| \leq \pi,$$

где  $\phi(-\beta, 0; z)$  — функция Райта,  $A_\tau^{\alpha/2}$  и  $B_\tau^{\alpha/2}$  — интегральные преобразования с функцией Райта в ядре. Пользуясь свойствами указанных преобразований (см. формулу (3.2.2) в [16]), можно написать

$$\begin{aligned} A_\infty &= a \int_0^\infty \exp(-iy\xi) A_\xi^{\alpha/2} \sin \xi d\xi \\ &= a \int_0^\infty \sin \xi B_\xi^{\alpha/2} \exp(-iy\xi) d\xi \\ &= a \int_0^\infty \exp(-(iy)^{\alpha/2} \xi) \sin \xi d\xi = \frac{a}{1 + (iy)^\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда находим модуль амплитуды установившихся колебаний

$$|A_\infty| = \frac{a}{|1 + (iy)^\alpha|} = \frac{a}{\sqrt{[1 + y^\alpha \cos(\frac{\alpha\pi}{2})]^2 + [y^\alpha \sin(\frac{\alpha\pi}{2})]^2}}. \quad (4)$$

Резонансная частота является решением уравнения  $d|A_\infty|/dy = 0$ . Решая это уравнение с учетом (4), получаем

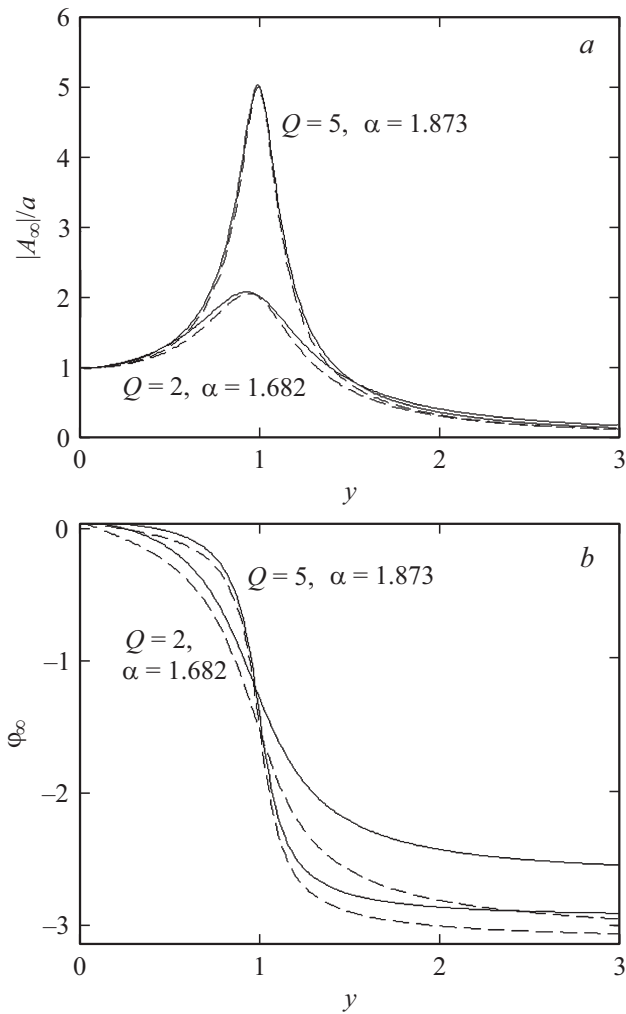
$$y_R = \left[ -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^{1/\alpha}. \quad (5)$$

Соответствующее максимальное значение модуля амплитуды есть

$$|A_R| = \frac{a}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}. \quad (6)$$

Найдем также фазовый сдвиг установившихся колебаний. В соответствии с решением (3) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{f(t)}{g(t)} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Re} A_\infty}{\operatorname{Im} A_\infty} \right) \\ &= -\operatorname{arctg} \left( \frac{1 + y^\alpha \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{y^\alpha \sin(\frac{\alpha\pi}{2})} \right). \end{aligned} \quad (7)$$



Амплитудно-частотные (а) и фазочастотные (б) характеристики. Сплошные кривые — дробный осциллятор, штриховые — классический осциллятор с вязким демпфированием.

Формулы (4) и (7) определяют амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную характеристики (ФЧХ) для установившегося режима колебаний дробного осциллятора.

В целях интерпретации модели дробного осциллятора сравним эти формулы с аналогичными формулами для классического осциллятора с вязким демпфированием, который находит широкое применение в различных физических приложениях. В наших обозначениях формулы для АЧХ и ФЧХ классического осциллятора записываются в виде

$$|A_{\infty}| = \frac{a}{\sqrt{(1-y^2)^2 + (y/Q)^2}},$$

$$\varphi_{\infty} = -\operatorname{arctg}\left(\frac{(1-y^2)Q}{y}\right), \quad (8)$$

$$y_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}, \quad (9)$$

где  $Q$  — добротность. Приравнявая (5) и (9), получаем формулу, которая связывает добротность с порядком дробной производной

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2 - 2[-\cos(\frac{\alpha\pi}{2})]^{2/\alpha}}}. \quad (10)$$

При больших значениях добротности (например, при  $Q > 5$ ) и значениях  $\alpha$ , близких к 2, классическая и дробно-дифференциальная модели осциллятора дают похожие результаты, и вместо (10) можно использовать упрощенную формулу

$$\alpha \approx 2 \left(1 - \frac{1}{\pi Q}\right). \quad (11)$$

На рисунке приведены графики АЧХ и ФЧХ, построенные по формулам (4), (7) и (8) при выполнении соотношения (11). Для классического осциллятора получается, что при  $y \rightarrow \infty$  его смещение запаздывает по фазе от внешней силы на предельную величину  $-\pi$  и не зависит от величины демпфирования. В случае дробного осциллятора фазовый сдвиг при  $y \rightarrow \infty$  равен  $-\alpha\pi/2$ , т.е. зависит от физических свойств системы. Из рисунка можно видеть, что различие между результатами расчетов в рамках двух моделей быстро уменьшается с ростом добротности. При  $Q \geq 10$  это различие уже настолько мало, что, скорее всего, не будет заметным на фоне статистического разброса данных, полученных с помощью каких-либо экспериментальных методов. Отсюда следует, что экспериментальную проверку модели дробного осциллятора достаточно провести для сильно демпфированных колебательных систем.

Таким образом, можно сделать следующие выводы. Модель вынужденных колебаний, основанная на уравнении (1), учитывает диссипацию энергии колебаний за счет введения дробной производной порядка  $\alpha < 2$  и не требует учета дополнительной динамической силы трения. Порядок дробной производной в уравнении (1) характеризует резонансные свойства осциллятора и может быть выражен через добротность. При выполнении соотношения (11) и больших значениях добротности результаты расчета в рамках классической и дробной моделей осциллятора практически неразличимы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-51-45005.

## Список литературы

- [1] Mainardi F. // Chaos Solitons Fractals. 1996. V. 7. N 9. P. 1461–1477.
- [2] Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Enck T., Clarke T. // Physica A. 2001. V. 297. N 3–4. P. 361–367.
- [3] Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Clarke T. // Physica A. 2002. V. 309. N 3–4. P. 275–288.
- [4] Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Clarke T. // Physica A. 2004. V. 339. N 3–4. P. 311–319.

- [5] Мейланов Р.П., Янполов М.С. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 1. С. 67–73.
- [6] Tofghi A. // Physica A. 2003. V. 329. N 1–2. P. 29–34.
- [7] Stanislavsky A.A. // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. N 5. P. 051103.
- [8] Al-rabtah A., Ertürk V.S., Momani S. // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. N 3. P. 1356–1362.
- [9] Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. // Appl. Mech. Rev. 2010. V. 63. N 1. P. 010801 (1–52).
- [10] Tarasov V.E. // Cent. Eur. J. Phys. 2012. V. 10. N 2. P. 382–389.
- [11] Blaszczyk T. // Rom. Rep. Phys. 2015. V. 67. N 2. P. 350–358.
- [12] Паровик Р.И. // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 5. С. 1001–1021.
- [13] Berman M., Cederbaum L.S. // Physica A. 2018. V. 505. P. 744–762.
- [14] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с. [Uchaikin V.V. Fractional derivatives for physicists and engineers. Springer, 2013. V. 1, 2.].
- [15] Tarasov V.E. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.–Ижевск: РХД, 2011. 568 с. [Tarasov V.E. Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Springer, 2010.].
- [16] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.