

## Замедляющая система „двойная сдвинутая импедансная гребенка“

© М.В. Давидович

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 22 февраля 2018 г.)

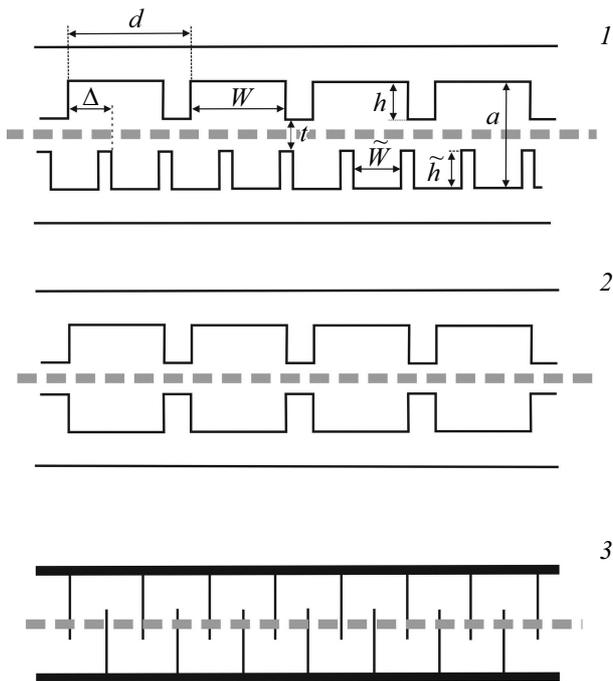
Методом частичных областей получены поверхностные интегральные уравнения для замедляющих систем типа „двойные сдвинутые гребенки“ с учетом диссипации на всех металлических поверхностях. Рассмотрен случай кратных периодов гребенок. В качестве дисперсионных уравнений предложены квадратичные функционалы. Для комплексных постоянных распространения из комплексных дисперсионных уравнений в виде функционалов предложен метод их решения совместными итерациями с интегральными уравнениями. Рассмотрено вычисление сопротивления связи. Приведены результаты расчета дисперсии с учетом диссипации в ряде рассмотренных структур.

DOI: 10.21883/0000000000

### Введение

В настоящее время в ряде стран ведутся работы по созданию источников излучения (ЛБВ, ЛОВ и ряда других) на принципах вакуумной микроэлектроники в миллиметровом, субмиллиметровом и терагерцевом диапазонах [1–13]. Спиральные замедляющие системы (ЗС) для ЛБВ становятся все более труднореализуемыми при уменьшении длины волны, поэтому продвижение вакуумных электронных приборов в THz диапазон требует использования ЗС типа гребенка, диафрагмированного прямоугольного волновода (ПВ), петляющего ПВ (рис. 1) и ряда других [1], для изготовления которых применимы MEMS технологии [1–13]. Перспективны ЗС со сдвинутыми двойными одинаковыми гребенками в прямоугольном экране, позволяющими расширить рабочую полосу ЛБВ из-за исчезновения запрещенной зоны при фазовом сдвиге  $\Psi = \pi$  и слияния в этой точке прямых низшей и высшей дисперсионных ветвей (ДВ), а также и обратных ДВ [2–13]. Слияние приводит к пересечению прямых и обратных ДВ, при этом запрещенная зона возникает при  $\Psi = 2\pi$ , что расширяет полосу. Сдвиг приводит к росту сопротивления связи  $R_c$ . Его отсутствие при возбуждении волной  $H_{01}$  ПВ симметричной ЗС означает наличие в центре электрической стенки, т. е. снижение  $R_c$ . Реально ЗС гребенка в экране представляет собой периодически диафрагмированный ПВ (рис. 1), а петляющий ПВ можно рассматривать как диафрагмированный ПВ с толстыми диафрагмами. Ранее такие ЗС рассчитывались приближенными методами [14,15], а также на основе методов частичных областей (ЧО) и интегральных уравнений (ИУ) [16,17]. Сейчас в основном используются коммерческие электродинамические пакеты программ, в частности HFSS [12,13,18]. Принципиально пакет HFSS позволяет учесть диссипацию, но требует значительных временных и вычислительных ресурсов, что затрудняет оптимизацию.

По-прежнему актуальным является исследование ЗС на основе метода частичных областей (ЧО) и интегральных уравнений (ИУ). Однако все такие исследования были выполнены для идеально проводящих структур [4–6,19–22]. В работах [4–6] применен метод поверхностных ИУ для расчета дисперсии и сопротивления связи двойной сдвинутой гребенки без учета диссипации. В [21,22] кроме металлических гребенок были рассмотрены двойные гребенки на диэлектрических гребенчатых структурах, не имеющие низкочастотной отсечки. В миллиметровом и тем более в THz диапазонах диссипация сильная, а ее учет очень важен. Кроме того, в THz и инфракрасном диапазонах существенны плазмонные эффекты, приводящие к дополнительному замедлению, которое также следует учитывать. Плазмонный эффект особенно сильно проявляется в области  $\omega_c < \omega < \omega_s$ , где  $\omega_c$  — частота столкновений,  $\omega_s = \omega_p / \sqrt{\epsilon_L + 1}$  — частота поверхностного плазмонного резонанса,  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\epsilon_L$  — величина, определяющая диэлектрическую проницаемость (ДП), связанную с кристаллической решеткой и межзонными переходами в металле. В области  $\omega_c \ll \omega \ll \omega_s$  возможны слабо замедленные поверхностные волны (плазмоны) с малой диссипацией, существенно меньшей, чем при  $\omega \sim \omega_c$ . Для повышения мощности необходимы релятивистские THz приборы с небольшими замедлениями порядка 2–4, поэтому поверхностные THz плазмоны с таким замедлением хорошо взаимодействуют с ленточным релятивистским пучком. Поскольку для чистых хорошо проводящих металлов  $\omega_c \sim 10^{13}$ , а  $\omega_p \sim 10^{16}$ , получение на частотах выше 1 THz замедлений  $n \sim 2–4$  плазмонов на атомарно гладких поверхностях для использования в ЛБВ микронных размеров требует снижения  $\omega_c$  и  $\omega_p$  по крайней мере на порядок. К увеличению замедления приводит и микрошероховатость поверхности, которая в THz диапазоне становится сравнимой с замедленной длиной волны. Но микрошероховатость ведет к росту потерь. Снижение частоты плазмонного резонанса



**Рис. 1.** ЗС типа гребенка (диафрагмированный ПВ): 1 — двойная сдвинутая гребенка с отношением периодов 2:1; 2 — симметричная гребенка; 3 — двойная сдвинутая гребенка с бесконечно тонкими диафрагмами и с перекрытием канала (петляющий ПВ).

возможно путем использования тонких (порядка nm) металлических пленок на диэлектрических подложках, тонких слоев узкозонных (типа InSb) сильно легированных полупроводников на подложках при низких температурах. Низкие температуры в основном нужны для снижения  $\omega_c$ , поскольку  $\omega_p$  полупроводников ниже, чем у металлов, и хорошо изменяется легированием. Также снизить частоты замедлений плазмонов можно, используя ЗС типа графеновые листы на подложке, периодически расположенные углеродные нанотрубки на металле. Для расчета поверхностных плазмонов удобен импедансный подход [23,24]. Получить эффективный импеданс и увеличить замедление в THz диапазоне можно, выполняя в гладкой проводящей пленке мелкие периодические отверстия с периодом, существенно меньшим замедленной длины волны. Диссипация в ЗС приводит к перекрытию (пересечению) дисперсионных ветвей в запрещенной зоне, т.е. к фактическому ее исчезновению [25]. В запрещенных зонах становится возможным распространение волн с большими потерями. Вблизи границ таких зон дисперсия искажается, что важно учитывать при работе прибора вблизи них.

В настоящей работе предложены ИУ с учетом диссипации, и рассмотрены ЗС типа импедансных гребенок. Импеданс может быть как естественным поверхностным импедансом материала (импеданс Леонтовича), так и эффективным импедансом искусственной структуриро-

ванной метаповерхности. Учет импеданса приводит к уменьшению высот ламелей, что упрощает технологию изготовления ЗС. Таким образом, учет поверхностного импеданса и диссипации важен и существенен, что является основной целью работы.

## Постановка задачи. Дисперсионное уравнение

Рассмотрим в общем случае двойную металлическую гребенку 1, рис. 1, с периодом  $d$  и ленточным электронным пучком (показан штриховой линией). Сначала предположим, что металл идеально проводящий, а затем введем его конечный поверхностный импеданс. Ось  $z$  направим вдоль электронного пучка по его центру. Ось  $y$  направим перпендикулярно рисунку. Поля зависят от времени как  $\exp(i\omega t)$ . Размер структуры  $b$  по оси  $y$  считаем большим, а пучок широким. В области пучка  $-t_0/2 < x < t_0/2$  ( $t_0$  — толщина пучка) его плотность считаем постоянной по  $x$  и резко обращаемой в нуль вне, а ее зависимость от координаты  $y$  зададим функцией  $\sin(k_y y)$ , где  $k_y = \pi y/b$ . Эту же зависимость от  $y$  имеют компоненты  $E_z$ ,  $E_x$  и  $H_y$ . В этом случае можно считать, что поля не зависят от  $y$ , а после решения задачи в результирующих формулах сделать замену  $k_0 \rightarrow k$ , где  $k = \sqrt{k_0^2 - k_y^2}$  [26], что при большом  $b$  дает слабый эффект. Однако указанное утверждение не совсем точное. Переход  $b \rightarrow \infty$  означает переход от прямоугольного волновода к плоскопараллельному, в котором могут распространяться Е-волны и имеет место основная Т-волна. Соответственно все получаемые импедансные и адмитансные величины нормированы на волновое сопротивление  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  Т-волны. Это, например, относится к проводимости емкостной диафрагмы (формула 3.115 из [26]) и к нормированной входной проводимости  $Y_{in} = (1 - R)/(1 + R)$  любой не зависящей от  $y$  неоднородности. В реальной структуре возникают LE-волны, при этом основной будет  $H_{01}$ -волна ПВ с волновым сопротивлением  $Z_0 k_0/k$ . Поэтому вместе с указанной заменой все получаемые нормированные иммитансы следует перенормировать: импедансы умножить на  $k/k_0$ , а адмитансы — на  $k_0/k$ . Для плоских неоднородностей диафрагм, описываемых однородными ИУ, происходит сокращение на указанные множители, и утверждение из [26] справедливо. Получение дисперсионных уравнений (ДУ) для недиссипативных структур путем приравнивания импедансных функций приводит к однородным поверхностным ИУ типа Фредгольма первого рода, в которых указанные множители также сокращаются. Учет диссипации, однако, требует знания точных адмитансов, как и определение параметров дифракции: коэффициента отражения  $R$  и коэффициента прохождения  $T$ . Как будет показано, учет диссипации приводит к ИУ второго рода, в которые входит реальная поверхностная проводимость. Далее будет удобно использовать концепцию Т-волны и Е-волн относительно оси  $z$  в бесконечной по  $y$

структуре, а также концепцию ЛЕ-волн. Задачу для ЛЕ-волн можно решить, вводя магнитный вектор Герца, направленный вдоль  $y$  [26]. Ось  $x$  будем отсчитывать от центра пучка вверх. Величина  $a$  означает максимальный размер структуры вдоль оси  $x$ , (размер узкой стенки ПВ) а  $t$  — размер канала (расстояние между торцами противоположных ламелей). Имеем высоту ламелей  $h = (a - t)/2$ . Величина  $w$  определяет размер полости верхней гребенки между соседними ламелями по оси  $z$ . Соответственно размер ламели по оси  $z$  будет  $s = d - w$ . На рис. 1 приведена конфигурация 1, где вторая гребенка имеет более мелкий период  $\tilde{d} = d/2$ . На низких частотах, соответствующих рабочей полосе верхней гребенки, нижнюю, более мелкую, можно считать импедансной поверхностью, изменяющей дисперсию и сопротивление связи верхней гребенки. С увеличением высоты гребней импеданс растет, что увеличивает  $R_c$ . На высоких частотах эта гребенка начинает работать как ЗС, а ее мода взаимодействует с высшей модой верхней гребенки. Это приводит к появлению запрещенной зоны при  $\Psi = \pi$  на периоде  $d$ . Будем рассматривать и случай 3 сдвинутых гребенок с одинаковым периодом. В общем случае считаем, что она сдвинута относительно верхней гребенки на величину  $\Delta$  вправо. Такой же сдвиг вводим и для случая одинаковых сдвинутых гребенок  $\tilde{d} = d$ . Случай 2 на рис. 1 соответствует нулевому сдвигу  $\Delta$ . Сдвиг на  $\Delta = \pm d/2$  для одинаковых гребенок приводит к расширению полосы синхронизма с электронным пучком [4–6]. В случае неодинаковых гребенок считаем  $\tilde{d} = d/2 = \tilde{w} + \tilde{s}$ , т.е. оставляем один дополнительный параметр, позволяющий оптимизировать структуру. Высоты ламелей  $h$  здесь считаем одинаковыми, что не принципиально. Учет различных высот увеличивает число независимых параметров, что важно для оптимизации, но значительно усложняет формулы.

Метод сшивания основан на разложении полей по полным базисам Трэфтца в частичных областях (ЧО), удовлетворяющих однородному уравнению Гельмгольца [27]. При этом базисы удобно выбирать так, чтобы на границах стыков ЧО они образовывали полные ортогональные системы мембранных функций [27]. Тогда коэффициенты разложений можно выразить методом Фурье через интегралы от этих функций и распределения полей. Если используется адмитансный алгоритм, то все коэффициенты выражаются через касательные электрические поля на указанных апертурах. Сшивая магнитные поля, получаем адмитансное поверхностное ИУ и адмитансный алгоритм. В случае импедансного ИУ коэффициенты выражаются через поверхностные токи или магнитные поля. Для несимметричной ЗС (рис. 1) одной из ЧО удобно выбрать область канала. Тогда возникают еще три ЧО:  $0 < z < w, x > t/2; \Delta < z < \tilde{w} + \Delta, x < -t/2; \Delta + d/2 < z < \Delta + d/2 + \tilde{w}, x < -t/2$ . Обозначим их индексами 1, 2, 3. Если разбить период такой ЗС на ЧО плоскостями  $x = \text{const}$ , то возникнет шесть ЧО. Однако для симметричной структуры 2, рис. 1, их в

обоих случаях две. Структуру 3 целесообразно разбить на две ЧО плоскостями  $z = \text{const}$ . Вводя магнитный вектор Герца  $\mathbf{\Pi}^m = \mathbf{y}_0 k^{-2} \sin(k_y y) H_y(x, z)$  и опуская у компонент  $H_y, E_x, E_z$  множитель  $\sin(k_y y)$ , а у  $H_x$  и  $H_z$  множитель  $\cos(k_y y)$ , можно выразить поля в виде ЛЕ-мод [26]:

$$E_x(x, y) = \frac{ik_0 Z_0}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z},$$

$$E_z(x, y) = \frac{-ik_0 Z_0}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$H_x(x, y) = \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z},$$

$$H_z(x, y) = \frac{k_y}{k^2} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z}, \quad (2)$$

В случае  $b \rightarrow \infty$  поля перестают зависеть от  $y$ ,  $k_y \rightarrow 0$ , а компоненты (2) исчезают. В этом случае все компоненты можно выразить через одну компоненту  $E_z(x, y)$  в виде Е-волн. В регулярных ЧО в виде отрезка плоскопараллельного волновода следует ввести еще и Т-волну [26]. В результате решения такой задачи переход к исходной формулировке осуществляется заменой  $k_0 \rightarrow k$  и перенормировкой.

В представлении Е-волн выразим поля в канале  $|x| < t/2$  через компоненту  $E_z(x, z)$ :

$$E_z(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-ik_{zm}z) [\alpha_m \cos(k_{xm}x) + \beta \sin(k_{xm}x)]. \quad (3)$$

Компоненты полей найдем по формулам (10.54) работы [28]. В частности, для компоненты магнитного поля

$$H_y(x, z) = \frac{-ik_0}{Z_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{xm}^{-1} \exp(-ik_{zm}z) \times [\alpha_m \sin(k_{xm}x) - \beta_m \cos(k_{xm}x)]. \quad (4)$$

В первой области  $0 < z < w, x > t/2$  возьмем разложение

$$E_z^{(1)}(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^1 \cos(\bar{k}_{zm}z) \sin(\bar{k}_{xm}(x - a/2)). \quad (5)$$

Аналогично в областях 2 и 3 при  $x < -t/2$  имеем разложения ( $n = 2, 3$ ):

$$E_z^{(n)}(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^{(n)} \cos(\bar{k}_{zm}(z - z_n)) \sin(\bar{k}_{xm}(x + a/2)). \quad (6)$$

В соотношениях (3)–(6) введены обозначения  $k_{zm} = k_z + k_m, k_m = 2m\pi/d, k_{xm} = \sqrt{k_0^2 - k_{zm}^2}, \bar{k}_{zm} = m\pi/w, \bar{k}_{xm} = \sqrt{k_0^2 - \bar{k}_{zm}^2}, \tilde{k}_{zm} = 2m\pi/\tilde{w}, \tilde{k}_{xm} = \sqrt{k_0^2 - \tilde{k}_{zm}^2}$ , т.е. поля удовлетворяют уравнению Гельмгольца в вакууме. Кроме того, поля удовлетворяют условию Флоке с

фазовым сдвигом на период  $\Psi = k_z d$ . Компонента (3) удовлетворяет условию Флоке по определению. При переходе к другим ячейкам периодичности с номером  $p$  множитель Флоке  $\exp(-ip\Psi)$  в соотношения (5) и (6) следует вводить. Если диссипации нет и  $k_0^2 < k_{zm}^2$ , то  $k_{xm} = -i|k_{xm}|$ . В случае диссипации корень следует брать из условия  $\text{Im}(k_{xm}) < 0$ , которое означает затухание при распространении волны от центра канала в стороны  $x > 0$  и  $x < 0$ . Все сказанное относится и к величинам  $\bar{k}_{xm}$ ,  $\tilde{k}_{xm}$ . При затухании  $k_z = k'_z - ik''_z$ . Движение волны вдоль оси  $z$  означает  $k''_z > 0$ , а движение в противоположном направлении —  $k''_z < 0$ . Если  $k'_z k''_z > 0$ , то волна прямая, а если  $k'_z k''_z < 0$ , то обратная. Фаза обратной волны вдоль оси  $z$  ( $k''_z > 0$ ) движется в сторону отрицательных  $z$  ( $k'_z < 0$ ). Если берем волну с постоянной распространения —  $k_z = -k'_z + ik''_z$ , то она суть противоположная волне с постоянной  $k_z$ . В недиссипативной ЗС  $k''_z = 0$ , поэтому две взаимно противоположные волны неразличимы и являются взаимно обратными (с точностью до выбора направления оси). Диссипация, как и нарушение периодичности введением источника, выделяет направление движения энергии, которая движется в сторону затухания волны или от источника. Обратной будет та волна, у которой фаза движется в обратную сторону. Альтернативный путь — вычисление  $z$ -компоненты вектора Пойнтинга.

Обозначим  $E_z^\pm(z) = E_z(\pm t/2, z)$  и выполним сшивающие компонент  $E_z(x, z)$ . Для канала имеем

$$\alpha_m = \frac{\int_0^d [E_z^+(z) + E_z^-(z)] \exp(ik_{zm}z) dz}{2d \cos(k_{xm}t/2)},$$

$$\beta_m = \frac{\int_0^d [E_z^+(z) - E_z^-(z)] \exp(ik_{zm}z) dz}{2d \sin(k_{xm}t/2)}. \quad (7)$$

Аналогично сшиваются компоненты  $E_z(x, z)$  в областях между ламелями, например,

$$\beta_m^1 = -2(\delta_m w \sin(\bar{k}_{xm}h))^{-1} \int_0^w E_z^+(z) \cos(\bar{k}_{zm}z) dz.$$

Здесь  $\delta_m = 1 + \delta_{m0}$ . Сшивание магнитной компоненты при  $x = \pm t/2$  выполним так, что на торцах ламелей  $J_z = \mathbf{z}_0(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$ , где  $\mathbf{v}$  — внешняя нормаль. Соответственно  $J_z^+ = H_y(t/2+0) - H_y(t/2-0)$ ,  $J_z^- = H_y(-t/2+0) - H_y(-t/2-0)$ . Величины  $H_y(t/2-0)$  и  $H_y(-t/2+0)$  относятся к каналу, а оставшиеся части соответствует сопрягаемым с ним ЧО. На границе сопряжения (например, при  $0 < z < w$ ,  $x = t/2$ )  $J_z = 0$ , а на торцах ламелей  $J_z = \sigma E_z$ , где  $\sigma$  — поверхностная проводимость металла. ДП металла описываем функцией Друде–Лоренца  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L(\omega) - i\omega_p^2/(\omega^2 - i\omega\omega_c)$ . Считая, что скин-эффект нормальный, получаем  $\sigma(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}/Z_0$ . Для малых частот  $\omega \ll \omega_c$  можно пренебречь квадратом частоты и лоренцевым членом. Тогда получаем

импеданс Леонтовича  $Z(\omega) = 1/\sigma(\omega)$ . Он предполагает большую по модулю ДП металла и нормальное к границе движение волны в нем. В THz диапазоне можно считать член  $\varepsilon_L$  постоянным и действительным. При этом для рассматриваемой LE-волны введем нормальную компоненту волнового вектора в металле  $k_x = \sqrt{k_0^2 \varepsilon(\omega) - k_z^2 - k_y^2}$ . Тогда входной поверхностный импеданс металла для волны вдоль оси  $z$  с компонентой волнового вектора  $k_z$  есть  $Z_s = Z_0 k_x (\varepsilon(\omega) k_0)$ . Фактически это входной импеданс медленного поверхностного E-плазмона [23], структура поля которого в вакууме совпадает со структурой поля замедленной LE-волны. При большой по модулю ДП металла и при не слишком больших замедлениях это выражение мало отличается от импеданса Леонтовича. Полагая  $\sigma = Z_s^{-1}$ , получаем слабую зависимость поверхностной проводимости от искомым величины  $k_z$ . Этой зависимостью обычно можно пренебречь.

Таким образом, при  $x = \pm t/2$  имеем функциональные зависимости  $J_z^\pm(z) = \sigma E_z^\pm(z) = -Z_0^{-1} F^\pm(z, E_z^+, E_z^-)$ . Компоненты  $E_z^\pm(z)$  удобно рассматривать в областях  $d_1^\pm < z < d_2^\pm$ , которые соответствуют ячейкам периодичности при  $x = \pm t/2$ . В нашем случае  $d_1^+ = 0$ ,  $d_2^+ = d$ ,  $d_{1,2}^- = d_{1,2}^+ + \Delta$ . Умножая их на  $E_z^{\pm*}(z)$  и интегрируя, получаем два связанных функционала:

$$\Phi^\pm = \int_{d_1^\pm}^{d_2^\pm} [E_z^{\pm*}(z) J_z^\pm(z) dz + Z_0^{-1} E_z^{\pm*}(z) F^\pm(z, E_z^+, E_z^-)] = 0. \quad (8)$$

Их нулевые значения достигаются на точном решении задачи, т.е. на точных функциях  $E_z^\pm(z)$  и при точных связях  $k_0$  и  $k_z$ . Для получения решений необходимо находить экстремумы функционалов, что приводит к нахождению корней уравнения в виде равенства нулю определителя квадратичной формы, получаемой при аппроксимации функций  $E_z^\pm(z)$  линейными формами типа (3). Функциональные зависимости имеют вид

$$F^+(z, E_z^+, E_z^-) = \int_0^d [K_{11}(z, z') E_z^+(z') + K_{12}(z, z') E_z^-(z')] dz', \quad (9)$$

$$F^-(z, E_z^+, E_z^-) = \int_{\Delta}^{d+\Delta} [K_{21}(z, z') E_z^+(z') + K_{22}(z, z') E_z^-(z')] dz', \quad (10)$$

Поскольку  $E_z^\pm(z) = \exp(-ik_z z) E^\pm(z)$ , где обозначенные периодические функции  $E^\pm(z+d) = E^\pm(z)$ , интеграл (10) также можно привести к области  $(0, d)$ . Для получения явных выражений ядер в (9) и (10)

производить сшивание не обязательно: можно воспользоваться алгоритмом построения ядер импедансных и адмитансных ИУ, вводя адмитансы парциальных волн в ЧО [27]. Согласно этому, вводим нормированные на  $Z_0$  адмитансы при нормальном движении волны от границы сшивания, т. е. вдоль оси  $x$  в ЧО как отношение  $Z_0 H_{ym} / E_{zm}$ .

Введем следующие обозначения безразмерных адмитансов:  $y_m^e = -ik_0 \cot(k_{xmt}/2) / k_{xm}$ ,  $y_m^h = ik_0 \tan(k_{xmt}/2) / k_{xm}$ ,  $\bar{y}_m^e = -ik_0 \cot(\bar{k}_{xm}h) / \bar{k}_{xm}$ ,  $\bar{y}_m^h = -ik_0 \cot(\bar{k}_{xm}h) / \bar{k}_{xm}$ . Здесь индекс „e“ соответствует наличию идеальной электрической стенки при  $x = 0$  для первого адмитанса, а индекс „h“ — наличию идеальной магнитной стенки при  $x = 0$  для второго адмитанса. Для остальных адмитансов с индексом „e“ имеет место электрическая стенка при  $x = \pm a/2$ . В случае симметричной гребенки 2, рис. 1, имеет место только электрическая или магнитная стенки при  $x = 0$ , соответствующие противофазному или синфазному возбуждениям. Первый случай соответствует также одиночной гребенке с идеальной электрической стенкой при  $x = 0$  [26]. Сопротивление связи такой гребенки существенно ниже, поэтому ее мы не рассматриваем. Удобно использовать суммирование по неотрицательным индексам  $m$ . Поскольку адмитансы зависят от  $k_z$  и индекса  $m$ , причем  $y_{-m}^{e,h}(k_z) = y_m^{e,h}(-k_z)$ , удобно ввести четные и нечетные функции по переменной  $k_z$  и индексу  $m$ :  $y_{me}^{e,h}(k_z) = y_m^{e,h}(k_z) + y_m^{e,h}(-k_z)$  и  $y_{mo}^{e,h}(k_z) = y_m^{e,h}(k_z) - y_m^{e,h}(-k_z)$ . При этом  $y_{0e}^{e,h}(k_z) = y_{0e}^{e,h}(k_z)$ . Здесь нижний индекс „e“ (even) означает четность:  $y_{me}^{e,h}(-k_z) = y_{me}^{e,h}(k_z)$  и  $y_{-me}^{e,h}(k_z) = y_{me}^{e,h}(k_z)$ , а индекс „o“ (odd) — нечетность:  $y_{mo}^{e,h}(-k_z) = y_{mo}^{e,h}(k_z)$ ,  $y_{-mo}^{e,h}(-k_z) = -y_{mo}^{e,h}(k_z)$ .

Для гребенки конечной ширины вблизи низкочастотной отсечки  $k_0 \approx \pi/b$  компонента  $E_z$  мала, волна в гребенке быстрая, но с ростом частоты она замедляется. При этом все введенные проводимости следует умножить на  $k_0/k$ . Для иллюстрации этого рассмотрим разложение по LE-волнам (1), (2) с представлением магнитной компоненты

$$H_y(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-ik_z m z) [a_m \sin(k_m x) + b_m \cos(k_m x)]. \quad (11)$$

Выражая  $E_z$  из (1) и коэффициенты через компоненту  $E_z$  при  $z = \pm t/2$ , имеем

$$a_m = \frac{ik^2}{k_0 Z_0} \frac{\int_0^d (E_z^+(z) + E_z^-(z)) \exp(ik_z m z) dz}{2dk_{xm} \cos(k_{xmt}/2)},$$

$$b_m = \frac{k^2}{ik_0 Z_0} \frac{\int_0^d (E_z^+(z) - E_z^-(z)) \exp(ik_z m z) dz}{2dk_{xm} \sin(k_{xmt}/2)}.$$

Подставляя их в (11), видим, что при  $x = \pm t/2$  возникают адмитансы  $[i \tan(k_{xmt}/2)]^{\mp 1} k^2 / (k_0 k_{xm} Z_0)$ , в ко-

торых  $k_{xm} = \sqrt{k^2 - k_{zm}^2}$ . Введенные выше нормированные адмитансы при замене  $k_0 \rightarrow k$  приобретают вид  $y_m^{e,h} = [i \tan(k_{xmt}/2)]^{\mp 1} k / k_{xm}$ . Для того чтобы они имели правильные значения, их надо умножить на  $(k/k_0)$ . Далее будем понимать под  $y_m^{e,h}$ ,  $\bar{y}_m^{e,h}$  и  $\tilde{y}_m^{e,h}$  именно такие значения, например,  $y_m^h = ik^2 \tan(k_{xmt}/2) / (k_0 k_m)$ .

Таким образом, введенные импедансы трансформируют адмитансы указанных стенок к плоскостям сшивания  $x = \pm t/2$ . В нашем случае адмитансного алгоритма имеем

$$K_{11}(z, z') = K(z, z') + \bar{K}_{11}(z, z')$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(z - z', k_z) (y_m^h + y_m^e) + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{y}_m^e \bar{g}_m(z, z'),$$

$$K_{12}(z, z') = K_{21}(z, z') = K(z, z')$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(z - z', k_z) (y_m^h + y_m^e), \quad (12)$$

$$K_{22}(z, z') = K(z, z') + \tilde{K}_{22}(z, z')$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(z - z', k_z) (y_m^h + y_m^e) + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{y}_m^e \tilde{g}_m(z, z').$$

Здесь введены следующие функции:

$$g_m(z - z', k_z) = \frac{\exp(-ik_{zm}(z - z'))}{2d}, \quad (13)$$

$$\bar{g}_m(z, z') = \frac{2 \cos(\bar{k}_{zm}z) \cos(\bar{k}_{zm}z')}{\delta_m w}, \quad 0 < z' < w, \quad (14)$$

$$\tilde{g}_m(z, z') = \frac{2}{\delta_m \tilde{w}}$$

$$\times \begin{cases} \cos(\bar{k}_{zm}(z - \Delta)) \\ \times \cos(\bar{k}_{zm}(z' - \Delta)), & 0 < z' - \Delta < \tilde{w}, \\ \cos(\bar{k}_{zm}(z - \Delta - d/2)) \\ \times \cos(\bar{k}_{zm}(z' - \Delta - d/2)), & 0 < z' - \Delta - d/2 < \tilde{w}. \end{cases} \quad (15)$$

Функции (14) и (15) тождественно равны нулю вне областей их определения. Приведенные соотношения переходят в соотношения для одинаковых сдвинутых гребенок, при этом  $\tilde{g}_m(z, z') = g_m(z - \Delta, z' - \Delta)$ . Если при этом  $\Delta = 0$ , то получаем симметричную двойную гребенку. Для нее  $E_z^+ = E_z^-$ ,  $J_z^+ = J_z^-$ ,  $K_{11} = K_{22}$ , поэтому соотношения (9) и (10) совпадают.

Рассмотрим преобразование первой суммы в (12). Пишем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(z - z', k_z) (y_m^h + y_m^e)$$

$$= \exp(-ik_z(z - z')) [C(z - z') - iS(z - z')], [$$

$$C(z - z') = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m^{-1} (y_{me}^h + y_{me}^e) \cos(k_m(z - z')),$$

$$S(z - z') = \sum_{m=0}^{\infty} (y_{mo}^h + y_{mo}^e) \sin((z - z')).$$

В ЗС без диссипации  $E^{\pm}(z)$  — периодические действительные функции, подлежащие определению. Функции  $C(z)$  и  $S(z)$  чисто мнимые. В недиссипативной ЗС величины  $J_z^{\pm}(z)E_z^{\pm}(z)$  должны быть мнимыми, поскольку их реальные части означают плотность диссипируемой мощности. Для этого следует положить  $S = 0$ . При больших  $m$   $y_m^e \approx y_m^h = ik_0/|k_{xm}|$  и  $y_{mo}^{(e,h)} \approx 0$ . На самом деле в недиссипативной ЗС  $g_m = d^{-1} \exp(-ik_{zm}z) \exp(ik_{zm}z')$ , поэтому умножение на  $E_z^{\pm}(z')$  и  $E_z^{\pm}(z)$  с интегрированием по обеим координатам всегда приводит к мнимым величинам в суммах, т.е. к результату  $S = 0$ . С другой стороны, для каждого члена суммы имеем  $g_m = d^{-1} \exp(-ik_z(z - z')) [\cos(k_m z) \cos(k_m z') + \sin(k_m z) \sin(k_m z')]$ , т.е. опять получаем  $S = 0$ .

Рассмотрим вывод соотношений, не используя разложение по комплексным экспонентам и приводящий для медленной волны в недиссипативной ЗС к чисто реактивной компоненте (3). Функцию  $E_z(x, z)$  представим в виде четной и нечетной частей  $E_z(x, z) = E_e(x, z) + E_o(x, z)$  относительно координаты  $z$ . Каждую из них разложим в ряды типа (3) по косинусам и синусам:

$$E_z(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\gamma_m(x) \cos(k_{zm}z) + \tilde{\gamma}_m(x) \sin(k_{zm}z)], \quad (16)$$

где  $\gamma_m(x) = \alpha_m \cos(k_{xm}x) + \beta_m \sin(k_{xm}x)$ ,  $\tilde{\gamma}_m(x) = \tilde{\alpha}_m \cos(k_{xm}x) + \tilde{\beta}_m \sin(k_{xm}x)$ . Суммирование по отрицательным индексам необходимо для учета всех пространственных гармоник. Определим все введенные коэффициенты. Разделим в (16) четные и нечетные части:

$$E_e(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m(x) \cos(k_{zm}z),$$

$$E_o(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_m(x) \sin(k_{zm}z). \quad (17)$$

Подставляя в (17) выражения  $\cos(k_{zm}z) = \cos(k_m z) \cos(k_z z) - \sin(k_m z) \sin(k_z z)$  и  $\sin(k_{zm}z) = \cos(k_m z) \sin(k_z z) + \sin(k_m z) \cos(k_z z)$ , полагая  $x = \pm t/2$ , выразим  $\gamma_m(\pm t/2) = \gamma_m^{\pm}$  и  $\tilde{\gamma}_m(\pm t/2) = \tilde{\gamma}_m^{\pm}$ . Для этого сделаем замену получающихся в (17) при  $x = \pm t/2$  функций: вместо  $E_e^{\pm}(z)$  и  $E_o^{\pm}(z)$  введем функции  $E_c^{\pm}(z)$ ,  $E_s^{\pm}(z)$  и  $\tilde{E}_c^{\pm}(z)$ ,  $\tilde{E}_s^{\pm}(z)$  по формулам:

$$E_e^{\pm}(z) = E_c^{\pm}(z) \cos(k_z z) - E_s^{\pm}(z) \sin(k_z z),$$

$$E_o^{\pm}(z) = \tilde{E}_c^{\pm}(z) \sin(k_z z) + \tilde{E}_s^{\pm}(z) \cos(k_z z), \quad (18)$$

где функции  $E_c^{\pm}(z)$  четные, а  $E_s^{\pm}(z)$  — нечетные. Обозначим их так:

$$E_c^{\pm}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m^{\pm}(x) \cos(k_m z) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{m0}^{\pm}(x) \cos(k_m z),$$

$$E_s^{\pm}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m^{\pm}(x) \sin(k_m z) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m0}^{\pm}(x) \sin(k_m z),$$

$$\tilde{E}_c^{\pm}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_m^{\pm}(x) \cos(k_m z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_{m0}^{\pm}(x) \cos(k_m z),$$

$$\tilde{E}_s^{\pm}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_m^{\pm}(x) \sin(k_m z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_{m0}^{\pm}(x) \sin(k_m z),$$

Отсюда имеем для всех  $m$

$$\gamma_m^{\pm} = \alpha_m \cos(k_{xmt}/2) \pm \beta_m \sin(k_{xmt}/2)$$

$$= \frac{1}{d} \int_0^d (E_c^{\pm}(z) \cos(k_m z) + E_s^{\pm}(z) \sin(k_m z)) dz, \quad (19)$$

$$\tilde{\gamma}_m^{\pm} = \tilde{\alpha}_m \cos(k_{xmt}/2) \pm \tilde{\beta}_m \sin(k_{xmt}/2)$$

$$= \frac{1}{d} \int_0^d (\tilde{E}_c^{\pm}(z) \cos(k_m z) + \tilde{E}_s^{\pm}(z) \sin(k_m z)) dz. \quad (20)$$

Складывая и вычитая (19) с разными знаками, получаем

$$\alpha_m = \frac{1}{2d \cos(k_{xmt}/2)} \int_0^d ((E_c^+(z) + E_c^-(z)) \cos(k_m z) + (E_s^+(z) + E_s^-(z)) \sin(k_m z)) dz, \quad (21)$$

$$\beta_m = \frac{1}{2d \sin(k_{xmt}/2)} \int_0^d ((E_c^+(z) + E_c^-(z)) \cos(k_m z) + (E_s^+(z) - E_s^-(z)) \sin(k_m z)) dz. \quad (22)$$

Аналогичные результаты имеем из (20) для величин с тильдами. Мы выразили все коэффициенты через функции, которые мы ввели и которых в два раза больше, чем исходных функций  $E_e^{\pm}(z)$  и  $E_o^{\pm}(z)$ . Сшивая магнитную компоненту на двух границах  $x = \pm t/2$ , можно получить интегральные соотношения. Для превращения их в ИУ надо использовать связи типа (17), приводящие к дополнительным соотношениям, например,

$$E_c^+(z) \cos(k_z z) - E_s^+(z) \sin(k_z z) = \frac{1}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(k_{zm}z)$$

$$\times \int_0^d (E_c^+(z') \cos(k_m z') + E_s^+(z') \sin(k_m z')) dz'.$$

Таких соотношений четыре. При сшивании  $H_y$  со стороны канала получаем соотношения  $H_y^\pm(z) = H_e^\pm(z) + H_o^\pm(z)$ , где четные и нечетные компоненты имеют вид:

$$H_e^+(z) = \int_0^d [K_{cc}^{++}(z, z')E_c^+(z') + K_{cs}^{++}(z, z')E_s^+(z') + K_{cc}^{+-}(z, z')E_c^-(z') + K_{cs}^{+-}(z, z')E_s^-(z')]dz',$$

$$H_e^-(z) = \int_0^d [K_{cc}^{-+}(z, z')E_c^+(z') + K_{cs}^{-+}(z, z')E_s^+(z') + K_{cc}^{--}(z, z')E_c^-(z') + K_{cs}^{--}(z, z')E_s^-(z')]dz',$$

$$H_o^+(z) = \int_0^d [K_{sc}^{++}(z, z')\tilde{E}_c^+(z') + K_{ss}^{++}(z, z')\tilde{E}_s^+(z') + K_{sc}^{+-}(z, z')\tilde{E}_c^-(z') + K_{ss}^{+-}(z, z')\tilde{E}_s^-(z')]dz',$$

$$H_o^-(z) = \int_0^d [K_{sc}^{-+}(z, z')\tilde{E}_c^+(z') + K_{ss}^{-+}(z, z')\tilde{E}_s^+(z') + K_{sc}^{--}(z, z')\tilde{E}_c^-(z') + K_{ss}^{--}(z, z')\tilde{E}_s^-(z')]dz',$$

Входящие в два первых уравнения ядра определены следующим образом:

$$K_{cc}^{++}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(y_m^e + y_m^h) \cos(k_z m z) \cos(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cs}^{++}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(y_m^e + y_m^h) \cos(k_z m z) \sin(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cc}^{+-}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(y_m^e - y_m^h) \cos(k_z m z) \cos(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cs}^{+-}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(y_m^e - y_m^h) \cos(k_z m z) \sin(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cc}^{-+}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-y_m^e + y_m^h) \cos(k_z m z) \cos(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cs}^{-+}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-y_m^e + y_m^h) \cos(k_z m z) \sin(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cc}^{--}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-y_m^e - y_m^h) \cos(k_z m z) \sin(k_m z')}{2d},$$

$$K_{cs}^{--}(z, z') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-y_m^e - y_m^h) \cos(k_z m z) \sin(k_m z')}{2d},$$

Аналогичные ядра двух вторых уравнений отличаются заменой первого индекса  $c \rightarrow s$  и косинуса  $\cos(k_z m z)$  на

синус  $\sin(k_z m z)$  в приведенных выше ядрах. При сшивании  $H_y$  с двух сторон на поверхностях  $x = \pm t/2$  имеем  $H_y(\pm t/2 \mp 0) = H_y^\pm$ , что позволяет формулировать ИУ относительно введенных функций. Такой альтернативный подход на основе представления (11) приводит к более сложным и громоздким представлениям полей и ДУ, чем подход на основе представления (3), который далее и будем использовать.

Удобно искать решение приведенных уравнений в виде  $E_z^\pm(z) = \exp(-ik_z z)E^\pm(z)$ ,  $E^\pm(z) = E_e^\pm(z) + E_o^\pm(z)$  с аппроксимациями

$$E_e^\pm(z) = \sum_{n=0}^N \gamma_n^\pm \cos(k_n z), \quad E_o^\pm(z) = \sum_{n=1}^N \tilde{\gamma}_n^\pm \sin(k_n z). \quad (23)$$

Всего неизвестных коэффициентов  $4N + 1$ . Если диссипация есть, то коэффициенты в представлении (23) комплексные. Тогда, например,

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) = & \sigma \int_w^d |E_z^+(z)|^2 dz + Z_0^{-1} \int_0^d \int_0^d E_z^{+*}(z) [K(z, z') + \bar{K}_{11}(z, z')] E_z^+(z') dz' dz \\ & + Z_0^{-1} \int_0^d \int_{\Delta}^{d+\Delta} E_z^{+*}(z) K(z, z') E_z^-(z') dz' dz. \end{aligned} \quad (24)$$

В случае идеально проводящей гребенки на торцах ламелей  $E_z^\pm = 0$ . Поэтому в функционалах (4) интегрирования лучше осуществлять только по апертурам, на которых  $J_z^\pm = 0$ , и использовать разложения по полному на них базисам. Нахождение экстремальных значений двух связанных функционалов (8) приводит к дисперсионному уравнению (ДУ) для действительной величины  $k_z = \varphi(k_0/d)$ , где функция  $\varphi(k_0)$  определяет фазовый сдвиг на период. Полный базис на верхней апертуре образуют функции  $\cos(n\pi z/w)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . На других апертурах можно использовать сдвинутые косинусы.

Рассмотрим простейшие аналитические модели. Модель с одной постоянной функцией на каждой апертуре для трех апертур (рис. 1) имеет три константы. Дифференцирование по ним квадратичных форм, получаемых из функционалов (8), приводит к ДУ в виде равенства нулю определителя системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) третьего порядка. Для одинаковых сдвинутых гребенок такой подход дает СЛАУ второго порядка. В силу однородности уравнений одну из констант можно взять произвольной, например, взять  $E_z^+ = 1$ . Тогда ДУ получается выражением оставшейся константы из одного уравнения и подстановкой ее в другое. В случае симметричной двойной гребенки имеем одну константу и одно уравнение. Этот простейший случай не позволяет произвести варьирование. Для получения достаточно точных результатов в случае

идеальных гребенок необходимо использовать более десятка базисных функций, что связано с медленной сходимостью из-за невыполнения условия на ребре [29]. Использование большого числа рассмотренных базисных функций можно заменить на 2–3 базисных функции с весом  $\rho(z) = [1 - (2z - w)^2/w^2]^{-1/4}$ . В этом случае получается ДУ в виде равенства нулю определителя порядка 10. Имеются ортогональные полиномы Гегенбауэра с этим весом, которые использованы в [4–6]. Однако применение ортогональных функций не дает выигрыша при построении алгоритма: с таким же успехом с весом  $\rho(z)$  можно использовать косинусы (ортогональные с весом единица). При этом в результате интегрирования в обоих случаях получаются функции Бесселя. При диссипации условие на ребре не имеет места, а использование косинусов с единичным весом приводит к более простым матричным элементам. Для симметричной гребенки имеем разделение на моды с электрической и магнитной стенками при  $x = 0$ .

## Учет диссипации

Введенные адмитансы с индексом „e“, относящиеся к областям между ламелями, являются входными в плоскостях сшивания для короткозамкнутых отрезков линий с постоянными распространения  $\tilde{k}_{xm}$ ,  $\tilde{k}_{ym}$ . Их нормированные волновые адмитансы суть  $\bar{y}_m = k^2/(k_0\tilde{k}_{xm})$  и  $\tilde{y}_m = k^2/(k_0\tilde{k}_{ym})$ . При учете диссипации входная проводимость металла при  $x = \pm a/2$  равна соответственно  $\bar{y}_{0m} = k_0\varepsilon(\omega)/\sqrt{k_0^2\varepsilon(\omega) - \bar{k}_{zm}^2 - k_y^2}$  и  $\tilde{y}_{0m} = k^2\varepsilon(\omega)/\left(k_0\sqrt{k_0^2\varepsilon(\omega) - \tilde{k}_{zm}^2 - k_y^2}\right)$ . Здесь мы допускаем небольшую ошибку, полагая  $k_y = \pi/b$ . На самом деле из-за потерь в стенках при  $y = 0$  и  $y = b$  следует положить  $k_y = \pi/b - i\delta$ , где  $\delta$  — малая поправка, связанная с такой диссипацией. Ее можно оценить, но при  $b \gg a$  особого смысла в этом нет, поскольку основные токи текут по широкой стенке и по гребенке. Теперь вместо имеющихся в (12)–(15) адмитансов следует использовать трансформированные величины

$$\bar{y}_m^e = \bar{y}_m \frac{\bar{y}_{0m} + i\tilde{y}_m \tan(\tilde{k}_{xm}h)}{\bar{y}_m + i\bar{y}_{0m} \tan(\tilde{k}_{xm}h)},$$

$$\tilde{y}_m^e = \tilde{y}_m \frac{\tilde{y}_{0m} + i\tilde{y}_m \tan(\tilde{k}_{ym}h)}{\tilde{y}_m + i\tilde{y}_{0m} \tan(\tilde{k}_{ym}h)},$$

Тем самым мы учли потери на металлических поверхностях при  $x = \pm a/2$ . Рассмотрим потери на боковых поверхностях ламелей. Они приводят к комплексным величинам  $\bar{k}_{xm} = \bar{k}'_{xm} - i\bar{k}''_{xm}$ . Для нахождения следует решать задачу о волнах соответствующих волноводов с импедансными стенками [30]. В первом приближении их реальные части не изменяются, а мнимые части определяются явно по методу возмущений [28]. В случае диссипации токи на торцах ламелей также создают мнимые добавки у  $k_z$ . Соответственно имеем функционалы

типа (24) с комплексной проводимостью  $\sigma$ . Их стационарные значения  $\Phi^\pm = 0$  с комплексными ядрами и определяют ДУ, позволяющие найти  $k_z = k'_z - ik''_z$ . Компонента  $E_z(z)$  удовлетворяет условию Флоке, поэтому  $E_z(z + d) = \exp(-ik_z d)E_z(z)$ , и двойной интеграл в (24) можно взять в пределах  $(0, d)$ . Искать стационарные значения функционалов удобно на базисных функциях  $\exp(-i2n\pi z/d)$  с весом  $\exp(-ik_z z)$ . Для достаточной точности такая аппроксимация должна содержать порядка десятков функций. Любая аппроксимация на всем периоде должна быть периодической с весом  $\exp(-ik_z z)$ . Более удобна кусочно-постоянная аппроксимация значениями  $E_{zn}^\pm$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  в центрах интервалов, приводящая к квадратурным формулам. При этом в силу периодичности  $E_{z1}^\pm = E_{zN}^\pm$ , что позволяет крайние интервалы уменьшить вдвое. Для двух одинаковых сдвинутых гребенок в целях уменьшения размерности задачи наложим условия  $E_{zn}^- = E_{zn}^+ \exp(-ik_z \Delta)$ , что вдвое сокращает число базисных функций. Далее будем использовать кусочно-постоянную аппроксимацию, что эквивалентно вычислению интегралов по квадратурным формулам метода средних.

## Сшивание в поперечных сечениях

Приведенные выше ДУ получены путем сшивания в продольных сечениях. Альтернативные алгоритмы получаются сшиванием в поперечных сечениях. Таких апертур обычно больше, поэтому сдвинутую гребенку (рис. 1, 1) с использованием шести апертур анализировать сложно. Один из возможных подходов — метод многомодовых матриц рассеяния для скачков в волноводе [27]. Однако для структур 2 и 3, рис. 1, таких апертур всего две. Рассмотрим случай 2 при Е-волне с магнитной стенкой, для которой все компоненты полей выражаются через компоненту

$$E_z(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(k_{xm}x) [\alpha_m \cos(k_{zm}z) + \beta_m \cos(k_{xm}(z - d))]. \quad (25)$$

Здесь  $k_{xm} = (2m - 1)\pi/a$ ,  $k_{zm} = \sqrt{k_0^2 - k_{xm}^2}$ . Из (25) следуют разложения

$$E_x(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{zm}}{k_{xm}} \sin(k_{xm}x) [\alpha_m \sin(k_{zm}z) + \beta_m \sin(k_{xm}(z - d))], \quad (26)$$

$$H_y(x, z) = \frac{ik_0}{Z_0} \sum_{m=1}^{\infty} k_{xm}^{-1} \sin(k_{xm}x) [\alpha_m \cos(k_{zm}z) + \beta_m \cos(k_{xm}(z - d))]. \quad (27)$$

Заметим, что в этом случае при  $k_{y=0}$  не возникает Т-волны. Она имеет место для моды с электрической

стенкой при  $x = 0$ . Для нее в (26), (27) следует взять суммирование от 0, заменить  $\sin(k_{xm}x)$  на  $\cos(k_{xm}x)$  и положить  $k_{xm} = 2m\pi/a$ . В случае несимметричной диафрагмы отсчет  $x$  удобно вести от нижней широкой стенки ПВ, при этом  $k_{xm} = m\pi/a$ . Вводим распределения  $E_1(x) = E_x(x, 0)$ ,  $E_2(x) = E_x(x, d)$ . Сшивая компоненту (26), имеем

$$\alpha_m = \frac{2k_{xm}}{ak_{zm} \sin(k_{zm}d)} \int_{-a/2}^{a/2} \sin(k_{xm}x) E_2(x) dx,$$

$$\beta_m = -\frac{2k_{xm}}{ak_{zm} \sin(k_{zm}d)} \int_{-a/2}^{a/2} \sin(k_{xm}x) E_1(x) dx.$$

Для дальнейшего сшивания накладываем условия Флоке:  $E_2(x) = E_1(x) \exp(-i\Psi)$ ,  $H_y(x, d) = H_y(x, 0) \exp(-i\Psi)$  и пишем компоненту (27) на аперттурах  $z = 0$  и  $z = d$ :

$$H_y(x, 0) = H_y(x, d) \exp(i\Psi)$$

$$= \frac{ik_0}{Z_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}x) [\alpha_m + \beta_m \cos(k_{zm}d)]}{k_{xm}}, \quad (28)$$

$$H_y(x, d) = \frac{ik_0}{Z_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}x) [\alpha_m \cos(k_{zm}d) + \beta_m]}{k_{xm}}, \quad (29)$$

Подставляя (29) и соотношение  $\alpha_m = -\beta_m \exp(-i\Psi)$  в (28), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} k_{xm}^{-1} \sin(k_{xm}x) \beta_m [\cos(k_{zm}d) - \cos(\Psi)] = 0.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\int_{-a/2}^{a/2} K(x, x') E_1(x') dx' = \cos(\Psi) \int_{-a/2}^{a/2} \tilde{K}(x, x') E_1(x') dx', \quad (30)$$

где введены действительные ядра

$$K(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}x) \sin(k_{xm}x')}{k_{zm} \tan(k_{zm}d)},$$

$$\tilde{K}(x, x') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{xm}x) \sin(k_{xm}x')}{k_{zm} \sin(k_{zm}d)}.$$

Если  $E_1(x)$  есть решение ИУ (28), то фазовый сдвиг определяется из соотношения

$$\cos(\Psi) = \int_{-a/2}^{a/2} E_1^*(x) K(x, x') E_1(x') dx' / \int_{-a/2}^{a/2} E_1^*(x) \times \tilde{K}(x, x') E_1(x') dx'. \quad (31)$$

Основной волной в этом случае является  $LE_{11}$ -мода с отсечкой при  $k_0 = \sqrt{\pi^2/a^2 + \pi^2/b^2}$ . Для заперделного волновода все постоянные распространения мнимые:  $k_{zm} = -i|k_{zm}|$ , при этом ядра — действительные на всех частотах, что говорит о возможности фазового сдвига (31) для заперделных блоховских волн [31]. Однако распространения энергии при этом нет (см. ниже). Далее будем рассматривать основную полосу  $\pi/a < k < 3\pi/a$ . Для нее сечение в области торцов при конечной ширине диафрагм  $s$  может оказаться заперделным, а волны — эванесцентными, но при этом движение энергии имеет место. ИУ (30) и функционал (31) в силу нечетности  $E_1(x)$  сводится к интегрированию в пределах  $(0, a/2)$ . Преобразовывая ИУ (30) к форме с параметром итерации  $\tau$

$$E_1(x) = E_1(x) - \tau(k_0/a) \left[ \int_0^{a/2} K(x, x') E_1(x') dx' - \cos(\Psi) \int_0^{a/2} \tilde{K}(x, x') E_1(x') dx' \right], \quad (32)$$

можно ее использовать для совместного итерационного решения с функционалом (31) [32]. Метод Галлеркина или вариационный метод, примененные к ИУ (30), дают ДУ в виде  $\det(K - \cos(\Psi)\tilde{K}) = 0$ , в котором матрицы обозначены так же, как соответствующие им ядра. Здесь удобно задать  $\Psi$  и найти  $k_0$ . Поскольку при идеально проводящих диафрагмах  $E_1(x)$  отлична от нуля только на апертуре  $(-t/2, t/2)$ , область интегрирования во всех интегралах может быть сведена к отрезку  $[0, t/2]$ . Заметим, что в силу однородности ИУ (30) нет необходимости в перенормировке импедансов. Достаточно положить  $k_0 = k$ .

Рассмотрим учет потерь. Пусть стенки волновода идеально проводящие, а на диафрагмах наложены импедансные условия  $J_x(x) = \sigma E_1(x) = H_y(x, -0) - H_y(x, +0) - H_y(x, +0)$ . В силу условия Флоке на диафрагме  $H_y(x, -0) = H_y(x, d) \exp(i\Psi)$ . Поэтому

$$J_x(x) = \sigma E_1(x) = \frac{8ik^2}{ak_0Z_0} \left[ \int_0^{a/2} K(x, x') E_1(x') dx' - \cos(\Psi) \int_0^{a/2} \tilde{K}(x, x') E_1(x') dx' \right]. \quad (33)$$

Здесь мы выполнили указанную перенормировку и использовали симметрию. Теперь вместо (31) имеем

следующий функционал:

$$\cos(\Psi) = \frac{\int_0^{a/2} \int_0^{a/2} E_1^*(x) K(x, x') E_1(x') dx' dx - \frac{\sigma Z_0 a k_0}{8ik^2} \int_0^{a/2} |E_1(x)|^2 dx}{\int_0^{a/2} \int_0^{a/2} E_1^*(x) \tilde{K}(x, x') E_1(x') dx' dx}. \quad (34)$$

Для учета потерь на стенках волновода следует воспользоваться теорией возмущений для Е-волн прямоугольного волновода [28]. В случае действительных  $k_{zm}$  к ним добавляется малая отрицательная мнимая часть. В общем случае больших  $m$  и мнимых  $k_{zm}$  к ним добавляются малые комплексные величины.

Для анализа ЗС (3, рис. 1) рассмотренным методом вводим три апертуры:  $z = 0$  в области верхней диафрагмы,  $z = d/2$  в области нижней диафрагмы,  $z = d$  в области следующей верхней диафрагмы. Рассмотренная ЗС в случае, когда диафрагмы не перекрывают канал, есть предельный (с бесконечно тонкими ламелями  $s = 0$ ) случай ЗС типа сдвинутая на  $d/2$  двойная гребенка, а в случае перекрытия канала — предельный случай ЗС типа „петляющий ПВ“. Между соседними изгибами он имеет бесконечно тонкие стенки (диафрагмы), в которых необходимо предусмотреть щель для ленточного пучка. Реально петляющий ПВ получается при конечной ширине  $s = d/4$  и высоте  $h = a - s$  диафрагм и имеет размер узкой стенки  $s$ . Его геометрическое замедление  $n_0 = (1 + 2a/d)k/k_0$ .

С точки зрения анализа структур различий нет. Однако для структуры 3 задача упрощается. Структура имеет скользящую плоскость симметрии. В силу этого в плоскости  $x = 0$  нет магнитной стенки. Поэтому удобно сместить начало отсчета координаты  $x$  на нижнюю стенку. Такую задачу проще решать в представлении LE-мод (1), (2). Тогда  $k_{xm} = m\pi/a$ ,  $k_{zm} = \sqrt{k_0^2 - k_{xm}^2 - k_y^2}$ . В области  $0 < z < d/2$  имеем:

$$H_y(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_{xm}x) [\alpha_m \cos(k_{zm}z) + \beta_m \cos(k_{zm}(z - d/2))], \quad (35)$$

$$E_x(x, z) = \frac{-ik_0 Z_0}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} k_{zm} \cos(k_{xm}x) [\alpha_m \sin(k_{zm}z) + \beta_m \sin(k_{xm}(z - d/2))], \quad (36)$$

Во второй области  $d/2 < z < d$  имеем

$$H_y(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_{xm}x) [\tilde{\alpha}_m \cos(k_{zm}(z - d/2)) + \tilde{\beta}_m \cos(k_{zm}(z - d))], \quad (37)$$

$$E_x(x, z) = \frac{-ik_0 Z_0}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} k_{zm} \cos(k_{xm}x) [\tilde{\alpha}_m \sin(k_{zm}(z - d/2)) + \tilde{\beta}_m \sin(k_{xm}(z - d))], \quad (38)$$

Кроме этого, имеем непрерывность  $E_x$  при  $z = 0$ ,  $z = d/2$  и  $z = d$ , непрерывность  $H_y$  на апертурах, а также соотношения  $E_x(x, 0) = E_1(x) = E_x(x, d) \exp(i\Psi)$ ,  $H_y(x, -0) = H_y(x, d - 0) \exp(i\Psi)$ . На диафрагмах компоненты  $H_y$  — разрывные и создают поверхностные токи  $J_{x1}(x)$  и  $J_{x2}(x)$ . Такая модель достаточно хорошо описывает тонкие ламели с толщинами на порядок и более меньшими, чем период. Щель для электронного пучка мы не учитываем. Эта емкостная щель пререзает линии тока и изменяет импеданс диафрагмы. Для тонкого и широкого пучка щель узкая и влияет не сильно. Однако адмитансный алгоритм описывает задачу лучше, поскольку тонкая щель слабо искажает перпендикулярное к ней электрическое поле. Все коэффициенты выражаем через поля  $E_1(x)$  и  $E_2(x) = E_x(x, d/2)$ . Пусть высота диафрагмы  $h$ , зазор между ней и другой стенкой волновода  $s = a - h$ . В результате имеем  $\alpha_m = -\tilde{\beta}_m$ ,  $\tilde{\alpha}_m = -\beta_m \exp(-i\Psi)$ ,

$$\beta_m = \frac{2k^2}{ik_{zm} \sin(k_{zm}(d/2)) a k_0 \delta_m} \int_0^a \cos(k_{xm}x) E_1(x) dx,$$

$$\alpha_m = \frac{-2k^2}{ik_{zm} \sin(k_{zm}(d/2)) a k_0 \delta_m} \int_0^a \cos(k_{xm}x) E_2(x) dx,$$

и связанные парные ИУ с симметричными ядрами  $K_{11} = -K_{22}$ ,  $K_{12} = -K_{21}$  вида

$$J_{x1}(x) = \sigma E_1(x) = \int_0^s K_{11}(x, x') E_1(x') dx' + (1 + \exp(i\Psi)) \int_h^a K_{12}(x, x') E_2(x') dx', \quad (39)$$

$$J_{x2}(x) = \sigma E_2(x) = (1 + \exp(-i\Psi)) \int_0^s K_{21}(x, x') E_1(x') dx' + \int_h^a K_{22}(x, x') E_2(x') dx', \quad (40)$$

Здесь мы заменили интегрирование по сечению интегрированием по апертурам, считая, что на диафрагмах поле мало, и обозначили ядра

$$K_{11}(x, x') = -K_{22}(x, x') = \frac{4k^2}{Z_0 k_0 a} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(k_{xm}x) \cos(k_{xm}x')}{ik_{zm} \tan(k_{zm}(d/2)) \delta_m},$$

$$K_{12}(x, x') = -K_{21}(x, x') = \frac{k^2}{Z_0 k_0 a} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(k_{xm}x) \cos(k_{xm}x')}{-ik_{zm} \sin(k_{zm}(d/2)) \delta_m},$$

В модели без диссипации проводимость на апертурах  $(0, s)$  и  $(h, a)$  равна нулю и соответственно  $J_{x1}(x) = 0$  и  $J_{x2}(x) = 0$ , поэтому соотношения (39) и (40) становятся связанными ИУ Фредгольма первого рода в указанных областях. На диафрагмах  $E_x = 0$ , поэтому областями интегрирования являются апертуры  $(0, s)$  и  $(h, a)$ . Метод Галеркина для ИУ (39), (40) приводит к блочной матрице с действительным определителем. Из равенства нулю этого определителя можно явно найти  $\cos(\Psi)$ . Действительно, обозначим матрицы в методе Галеркина так же, как и ядра в (39), (40), снабдив их шляпкой. Определитель блочной матрицы есть  $\det(\hat{K}_{11}) \det(\hat{K}_{22} - 2(1 + \cos(\Psi)) \hat{K}_{21} \hat{K}_{11}^{-1} \hat{K}_{12}) = 0$ . При использовании  $N$  функций для аппроксимации  $E_1$  и  $E_2$  это приводит к ДУ в виде полинома степени  $N$  относительно  $\cos(\Psi)$ . Его также можно записать как полином степени  $2N$  относительно  $\cos^2(\Psi/2)$ . Такое ДУ не очень удобно. Пусть функции  $E_1$  и  $E_2$  есть точные решения ИУ (39), (40). Тогда ДУ получается в виде функционала

$$\exp(i\Psi) = \frac{\int_0^s \int_0^s E_1^*(x) K_{11}(x, x') E_1(x') dx' dx \int_h^a \int_0^s E_2^*(x) K_{21}(x, x') E_1(x') dx' dx}{\int_h^a \int_h^a E_2^*(x) K_{22}(x, x') E_2(x') dx' dx \int_0^s \int_0^s E_1^*(x) K_{12}(x, x') E_1(x') dx' dx}, \quad (41)$$

где  $\exp(i\Psi) = [1 + \exp(i\Psi)][1 + \exp(-i\Psi)]^{-1} + \Phi_{11} \Phi_{21} (\Phi_{22} \Phi_{12})^{-1}$ , а функционалы  $\Phi_{ij}$  соответствуют (41). Если  $E_1$  и  $E_2$  есть некие приближения, то варьировать (41) нельзя, необходимо варьировать два связанных функционала, получающихся из (39), (40) путем взятия скалярных произведений с функциями  $E_1$  и  $E_2$ :  $J_1(E_1, E_2) = \Phi_{11}(E_1) + (1 + \exp(i\Psi)) \Phi_{12}(E_1, E_2) = 0$ ,  $J_2(E_2, E_1) = (1 + \exp(-i\Psi)) \times \Phi_{21}(E_2, E_1) + \Phi_{22}(E_2) = 0$ . В этих выражениях  $\Phi_{ij}$  — квадратичные и билинейные функционалы, связанные с ядрами интегральных операторов  $K_{ij}$  и стоящие в виде двойных интегралов в (41). Поэтому (41) можно использовать для вычисления дисперсии, когда функции  $E_1$  и  $E_2$  определены достаточно точно. Для одиночных диафрагм весьма точные функций  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$  при  $h < x < a$  и  $0 < x < s$  известны [26]:

$$E_1(x, s) = \frac{\cos(\pi x / (2a))}{\sqrt{\cos(\pi x / a) - \cos(\pi s / a)}},$$

$$E_2(x, h) = \frac{\sin(\pi x / (2a))}{\sqrt{\cos(\pi h / a) - \cos(\pi x / a)}}. \quad (42)$$

В (42) еще необходимо ввести фазовый множитель:  $E_2(x, h) = C E_1(a - x, a - h) \exp(-i\varphi)$ . Модуль  $|C|$  не влияет на результат, поэтому  $C = \exp(-i\varphi)$ . Очевидно, (41) удовлетворяется, если  $\varphi = \Psi/2$ . Имеет место несколько других форм ДУ:

$$\cos(\Psi) = \frac{\Phi_{11} \Phi_{22}}{2\Phi_{12} \Phi_{21}} - 1,$$

$$\cos(\Psi/2) = -\frac{\Phi_{11}}{2\Phi_{12}} = -\frac{\Phi_{22}}{2\Phi_{21}}.$$

$$\exp(i\Psi) \Phi_{11} \Phi_{21} + \exp(i\Psi/2) \Phi_{12} \Phi_{21} + \Phi_{11} \Phi_{22} = 0. \quad (43)$$

Форма (43) не зависит от фазового сдвига  $C$ , а в остальных следует использовать  $\varphi = \Psi/2$ . Интегралы с функциями (42) представляются через цилиндрические функции.

Учет диссипации делает ядра комплексными, при этом  $E_x$  становится отличной от нуля на всем сечении, а плотность поверхностного тока  $J_x$  отлична от нуля только на диафрагмах  $s < x < a$  и  $0 < x < h$ . Соотношения (39), (40) приобретают форму двух связанных ИУ Фредгольма второго рода. Для их решения во всей области поперечного сечения удобны квадратичные функционалы

$$J_1(E_1, E_2) = \sigma \int_h^a \int_h^a |E_1(x)|^2 dx - \int_0^a \int_0^a E_1^*(x) K_{11}(x, x') \times E_1(x') dx' dx + (1 + \exp(i\Psi)) \times \int_0^a \int_0^a E_1^*(x) K_{12}(x, x') E_2(x') dx' dx, \quad (44)$$

$$J_2(E_1, E_2) = \sigma \int_0^s \int_0^s |E_2(x)|^2 dx + \int_0^a \int_0^a E_2^*(x) K_{11}(x, x') \times E_2(x') dx' dx - (1 + \exp(-i\Psi)) \times \int_0^a \int_0^a E_2^*(x) K_{12}(x, x') E_1(x') dx' dx, \quad (45)$$

имеющие нулевые стационарные значения. При большой по модулю проводимости (малом импедансе) компонента  $E_x$  мала на диафрагмах, поэтому области интегрирования в двойных интегралах в (44) и (45) приближенно можно взять по апертурам, т.е. так, как и в недиссипативном случае. Для получения комплексных ядер следует перейти к возмущенным комплексным постоянным распространения  $k_{zm} \rightarrow \tilde{k}_{zm}$ ,  $\tilde{k}_{zm} = \tilde{k}'_{zm} - i\tilde{k}''_{zm}$ . В случае нормального скин-эффекта и поверхностного импеданса Леонтовича  $Z_s = (1 + i)R_s$  в первом приближении теории возмущений имеем [28]:  $\tilde{k}'_{zm} = k_{zm}$ ,  $\tilde{k}''_{z0} = R_s k_0 (1 + 2ak_0 / (kb)) / (Z_0 ka)$ ,

$$\tilde{k}''_{zm} = \frac{2R_s k_0 (m^2 (b/a)^3 + 1)}{Z_0 b k_{zm} (m^2 (b/a)^2 + 1)}. \quad (46)$$

Поскольку в нашем случае  $b/a \gg 1$ , имеем  $\tilde{k}''_{z0} = R_s k_0 / (Z_0 k a)$ ,  $\tilde{k}''_{zm} = 2R_s k_0 / (Z_0 k_{zm} a)$ . Формула (46) справедлива для Е-мод для частот выше отсечки. Ниже отсечки следует взять  $\tilde{k}_{zm} = -i|k_{zm}| + \tilde{k}''_{zm}$ . Вблизи частоты отсечки постоянная распространения  $\tilde{k}'_{zm}$  мала, а константа затухания  $\tilde{k}''_{zm}$  — велика, и формула (46) неприменима. Для оценки затухания на частоте  $\omega = c\sqrt{k_{xm}^2 + k_y^2}$  проведем его вывод, согласно [28], заменив  $k_{zm}$  на  $\tilde{k}_{zm} = k_{zm} - i\tilde{k}''_{zm} \approx -i\tilde{k}''_{zm}$ . Тогда получаем  $\tilde{k}''_{zm} \approx \sqrt{2R_s k_0 / (Z_0 a)}$ .

### Импедансные алгоритмы

Рассмотренные модели строились на адмитансных алгоритмах, в которых коэффициенты разложений выражались через касательные электрические поля. Рассмотрим импедансный алгоритм, в котором эти коэффициенты выражены через поверхностный ток. Наиболее простые результаты, как и выше, имеют место для бесконечно тонких металлических диафрагм. Имеем

$$\beta_m = \frac{2Z_0 k_{xm}}{ik_0 a [\cos(\Psi) - \cos(k_{zm} d)]} \int_{t/2}^{a/2} J_x(z) \sin(k_{xm} x) dx, \quad (47)$$

$$E_1(0) = E_x(x, 0) = \int_{t/2}^{a/2} Z(x, x') J_x(x') dx', \quad (48)$$

$$Z(x, x') = -2iZ_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_{zm} \sin(k_{zm}(d)) \sin(k_{xm} x) \sin(k_{xm} x')}{k_0 a [\cos(k_{zm} d) - \cos(\Psi)]}. \quad (49)$$

ИУ из (48) получается из условия  $E_1(x) = 0$  или  $E_1(x) = Z_s J_x(x)$ . Во втором случае следует использовать перенормированную импедансную функцию  $Z'(x, x') = (k_0/k)Z(x, x')$ . Результаты легко распространяются на структуру 3. Для рассмотренных ЗС также получаются импедансные ИУ относительно распределения  $H(z) = H_y(t/2, z)$ . На торцах диафрагм (ламель) оно совпадает с  $J_z(z)$ . Вместо (11) пишем

$$H_y(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-ik_{zm} z) a_m \begin{pmatrix} \sin(k_{xm} x) \\ \cos(k_{xm} x) \end{pmatrix},$$

где верхняя функция соответствует магнитной, а нижняя — электрической стенкам. В области между ламелями пишем

$$H_y^1(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos(m\pi z/w) \cos(\bar{k}_{xm}(x - a/2)).$$

Выражая коэффициенты через  $H(z)$  и сшивая компоненты  $E_z(t/2, z)$ , имеем ИУ

$$\begin{aligned} \frac{k^2 E_z(t/2, z)}{k_0 Z_0} &= \int_0^d Z_1(z - z') H(z') dz' \\ &= - \int_0^d Z_2(z, z') H(z') dz'. \end{aligned}$$

Здесь возникают ядра

$$\begin{aligned} Z_1(z, z') &= \frac{1}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-ik_{zm}(z - z')) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -ik_{xm} \cot(k_{xm} t/2) \\ ik_{xm} \tan(k_{xm} t/2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2(z, z') &= \frac{2i}{w} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m^{-1} \bar{k}_{xm} \tan(\bar{k}_{xm} h) \cos(m\pi z/w) \\ &\quad \times \cos(m\pi z'/w). \end{aligned}$$

В области  $0 < z < w$  можно записать ИУ Фредгольма первого рода

$$\int_0^d [Z_1(z - z') + Z_2(z, z')] H(z') dz' = 0.$$

В области торца второе ядро тождественно равно нулю, поэтому имеем ИУ второго рода

$$\frac{k^2 Z_s H(z)}{k_0 Z_0} = \int_0^d Z_1(z - z') H(z') dz'.$$

Если поверхностный импеданс положить равным нулю, то оно переходит в ИУ первого рода.

### Итерационные методы решения

Диссипация приводит к необходимости решать комплексные ДУ и находить комплексные  $\Psi = \Psi' - i\Psi'' = k_z d$ . Величина  $\Psi'' = k_z'' d$  означает постоянную затухания на период. Задавая фазовый сдвиг  $\Psi'$ , величину  $\Psi''$ , мы должны определить из каких-то дополнительных соображений, чтобы из ДУ можно было найти  $k_0$ . Одним из таких уравнений может быть вычисление усредненной по сечению и по периоду компоненты вектора Пойнтинга  $\langle S_z \rangle$ . Однако ее следует искать совместно с решением ИУ и ДУ, т.е. при определенных полях и  $k_z$ . Такой подход достаточно сложен. Желательно находить комплексную постоянную распространения  $k_z$  непосредственно из комплексного ДУ, для чего удобны итерационные методы [32]. Поиск комплексных корней другими численными методами достаточно

сложен. Обычно для ЗС ищется низшая по частоте дисперсионная ветвь, что упрощает задачу. Частота, для которой  $k_z = 0$ , известна. Плавное изменение частоты и использование полученных предыдущих значений в качестве начальных для итераций позволяет двигаться по дисперсионной кривой. Для итерационных формул желательно иметь явные выражения для  $k_z$ , что имеет место для шивания в поперечных сечениях. При шивании на границах канала  $k_z$  входит в ДУ нелинейно и неявно в виде ДУ  $D(k_0, k_z) = 0$ . В принципе, можно использовать прямые итерации типа  $k_z^{(n+1)} = k_z^{(n) - \tau_n D(k_0, k_z)}$ , подбирая определенным образом параметр итерации  $\tau_n$ . Однако можно получить функционал, в котором величина  $k_z$  выделена. Именно, вместо получения функционала (24) умножением на  $E_z^{+*}(z)$  и интегрированием, можно просто проинтегрировать ИУ по  $z'$ . Тогда первый интеграл в (24) приобретает вид

$$\sigma \int_w^d \exp(-ik_z z) E^+(z) dz, \quad (50)$$

а во втором двойном следует сделать замену  $E_z^{+*}(z) \rightarrow 1$ . В него  $k_z$  входит неявно. При кусочно-постоянной или тригонометрической аппроксимации  $E^+(z)$  интеграл (47) вычисляется аналитически и из результата можно выразить  $k_z$ . В этом случае получаем итерационную форму  $k_z = \Phi(k_0, k_z)$ . Итерационное решение следует осуществлять совместно с решением ИУ.

### Сопrotивление связи

Сопrotивление связи определяем согласно [33] в виде

$$R_c = \langle |E_z|^2 \rangle / (2k_z^2 \langle P_z \rangle). \quad (51)$$

Здесь величина

$$\langle |E_z|^2 \rangle = \frac{1}{tbd} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^b \int_0^d E_z(x, y, z) E_z^*(x, y, z) dx dy dz \quad (52)$$

есть средний квадрат амплитуды компоненты электрического поля волны, взаимодействующей с электронным потоком и усредненный по его сечению и ячейке периодичности ЗС, а  $\langle P_z \rangle$  — полная усредненная по периоду  $d$  мощность, переносимая через поперечное сечение периодического волновода

$$\langle P_z \rangle = d^{-1} \int_V S_z dx dy dz \quad (53)$$

и определяемая через среднее за период  $2\pi/\omega$  значение  $z$ -компоненты вектора Пойнтинга  $S_z = \text{Re}(\langle E_x H_y^* \rangle) / 2$ . Формула (52) применима, когда пучок однородный и занимает весь пролетный канал. Если считать, что ширина пучка  $w_0$ , толщина  $t_0$ , а плотность тока в нем  $J$  меняется

в поперечном сечении, то следует усреднить по функции распределения плотности пучка [34] и записать

$$\langle |E_z|^2 \rangle = \frac{1}{Id} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \int_{-w_0/2}^{w_0/2} \int_0^d Jz(x, y') E_z(x, y', z) \times E_z^*(x, y', z) dx dy' dz, \quad (54)$$

где  $I$  — полный ток пучка (т.е. интеграл от  $J$  по сечению). Здесь координата  $y' = y - b/2$  отсчитывается от центра пучка. В нашем случае  $J(x, y) = J_0 \sin(\pi y/b)$ ,  $I = 4J_0 b t_0 / \pi$ ,  $E_z(x, y, z) = E_z(x, z) \sin(\pi y/b)$ ,  $w_0 = b$ . Поэтому

$$\langle |E_z|^2 \rangle = \frac{1}{3t_0 d} \int_{-t_0}^{t_0} \int_0^d E_z(x, z) E_z^*(x, z) dx dz. \quad (55)$$

Если  $w < b$  или зависимость плотности пучка отличается от  $\sin(\pi y/b)$  и не симметричная, он в общем случае возбуждает все  $LE_{mn}$ -моды. Однако амплитуды высших мод малы, что и определяет применимость ДУ. Для переносимой усредненной мощности следует интегрировать по всему объему периодической ячейки. Если пренебречь колеблющейся мощностью между ламелями, то для переносимой мощности получим

$$\langle P_z \rangle = \frac{1}{4td} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^d \text{Re}(E_x(x, z) H_y^*(x, z)) dx dz. \quad (56)$$

На самом деле соотношение (55) точное. Действительно, в области  $I$  компонента  $H_y$  разлагается по функциям  $\cos(\bar{k}_{zm} z)$ , а компонента  $E_x$  — по сдвинутым на  $-\pi/2$  и ортогональным им функциям  $\sin(\bar{k}_{zm} z)$ . Поэтому интегрирование в области  $0 < z < w$  дает нуль, поле вдоль  $z$  носит колебательный характер, а обмен энергией между ЧО осуществляется с помощью компоненты  $S_x$ . При диссипации из-за наличия в (54) и (56) множителя  $\exp(-2k_z'' z)$ , функции  $\exp(-ik_m z)$  перестают быть ортогональными и возникают двойные ряды, анализ которых весьма сложен. Мы используем приближение ортогональности этих функций, вытаскив медленно меняющийся множитель из-под интеграла от осциллирующих функций и взяв результат интегрирования в виде  $d \exp(-k_z'' d) \delta_{mm'}$ , тем самым заменив двойные ряды на однократные. Вычисляя интегралы, имеем

$$\begin{aligned} \langle P_z \rangle &\approx \frac{k_0 Z_0 \exp(-k_z'' d)}{8(k'^2 + k''^2)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [k'_{zm}(k'^2 - k''^2) + 2k' k'' k'_z] c_m, \\ \langle |E_z|^2 \rangle &\approx \left( \frac{k_0 Z_0}{|k|^2} \right)^2 \frac{\exp(-k_z'' d)}{6} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |k_{zm}|^2 c_m, \\ c_m(k_z) &= |a_m|^2 \left( \frac{\sinh(k''_{xm} t)}{k''_{xm} t} - \frac{\sinh(k'_{xm} t)}{k'_{xm} t} \right) \\ &\quad + |b_m|^2 \left( \frac{\sinh(k''_{xm} t)}{k''_{xm} t} + \frac{\sinh(k'_{xm} t)}{k'_{xm} t} \right). \end{aligned}$$

Здесь в обоих членах мы штрихом обозначили реальные части  $k'_{zm} = k_m + k'_z$ , двойным штрихом — отрицательные мнимые части:  $k''_{zm} = k''_z$ . Если затухание слабое, то функции  $\text{sinh}(k''t)/(k''t)$  можно заменить единицами. Воспользуемся тем, что  $a_{-m} = a_m$ ,  $b_{-m} = -b_m$ ,  $b_0 = 0$ ,  $c_{-m}(k_z) = c_m(-k_z)$ ,  $c_m \geq 0$  и преобразуем ряды к суммированию по положительным индексам. Все коэффициенты зависят от  $k_z$  и распределения полей, определяемых из решения ДУ. Член ряда для  $\langle P_z \rangle$  имеет вид

$$p_m = \delta_m^{-1} \left[ k_m (c_m(k_z) - c_m(-k_z)) + (k'_z(k'^2 - k''^2) + 2k'k''k''_z) (c_m(k_z) + c_m(-k_z)) \right].$$

В отсутствие диссипации при  $k'' = k''_z = 0$  он может быть любого знака, а поток мощности может менять знак и обращаться в нуль в зависимости от решения ДУ  $k_z = k_z(k_0)$ . В случае отсутствия диссипации можно использовать получаемую из ДУ групповую скорость, а интеграл  $\langle P_z \rangle$  вычислять через плотность электромагнитной энергии, что упрощает результат. Однако в этом случае следует учитывать энергию, запасенную в областях 1–3. В случае достаточно сильной диссипации  $\langle P_z \rangle$  не обращается в нуль на дисперсионной кривой. Пересечение дисперсионной кривой электронного потока с дисперсионной кривой конкретной моды определяет рабочую точку, т.е. величины  $k_0$  и  $k_z = k_z(k_0)$ .

Рассмотрим сопротивление связи для ДУ (31). В этом случае  $\langle |E_z|^2 \rangle$  довольно громоздко вычисляется через двойные ряды, а для  $\langle P_z \rangle$  в силу ортогональности поперечных функций имеем

$$\langle P_z \rangle = \frac{k^2}{4k_0 d Z_0} \text{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-i k_{zm} \beta_m^2 \gamma_m}{k_{xm}^2},$$

$$\beta_m = \frac{-4k_{xm}}{a \sin(k_{zm}d) k_{zm}} \int_0^{a/2} \sin(k_{xm}x) E_1(x) dx,$$

$$\gamma_m = \int_0^d f_m(z, \Psi)(z, \Psi) dz,$$

$$f_m(z, \Psi) = \sin(2k_{zm}z) + \sin(2k_{zm}(z - d)) - 2 \sin(2k_{zm}z - k_{zm}d) \cos(\Psi) + 2i \sin(k_{zm}d) \sin(\Psi).$$

Функции  $f_m$  легко интегрируются. Ниже отсечки  $\text{Im}(\gamma_m) = 0$ , и потока мощности нет. В области  $\pi/a < k_0 < 3\pi/a$  имеем  $\text{Im}(\gamma_m) = 2\delta_{m1}d \sin(k_{z1}d) \sin(\Psi)$ , поэтому запрещенная зона возникает при  $\Psi = \pi$ .

### Численные результаты

Численные результаты получены на основе функционалов (43) для диафрагм нулевой толщины и функционалов типа (43) при учете толщин. На рис. 2 и 3

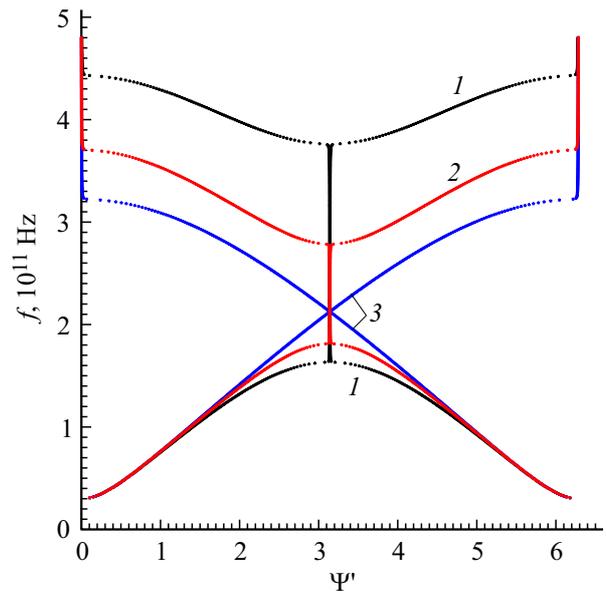


Рис. 2. Дисперсия (нормированная частота) в зависимости от фазового сдвига для диафрагмированного ПВ при  $b = 10a = 5 \text{ mm}$ ,  $d = 0.4 \text{ mm}$ ,  $h = 0.8a$  для разных сдвигов диафрагм:  $\Delta = 0$  (кривая 1),  $\Delta = d/4$  (кривая 2),  $\Delta = d/2$  (кривая 3).

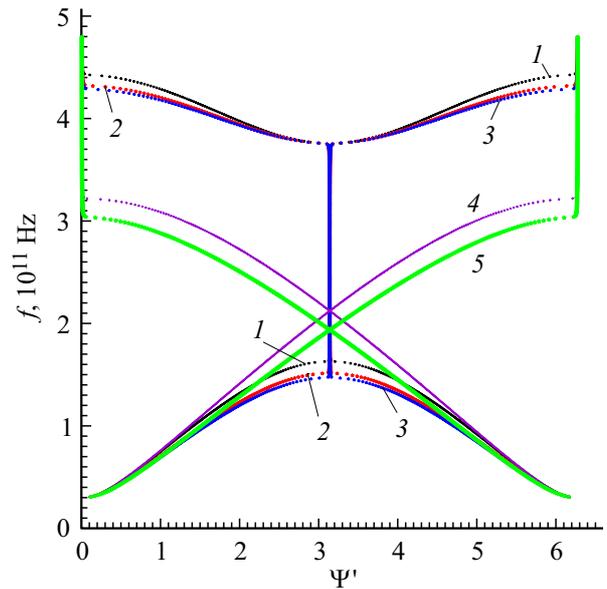
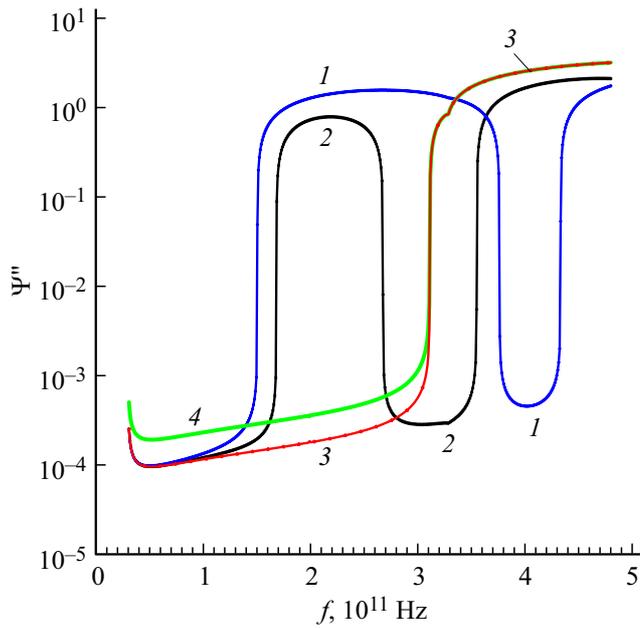


Рис. 3. Дисперсия в зависимости от фазового сдвига для диафрагмированного ПВ при  $b = 10a = 5 \text{ mm}$ ,  $d = 0.4 \text{ mm}$ ,  $h = 0.8a$  для сдвига  $\Delta = 0$  (кривые 1–3) и  $\Delta = d/2$  (кривые 4, 5) при равной толщине диафрагм:  $\delta = 0$  (кривые 1, 4);  $\delta = 0.1d$  (кривая 2);  $\delta = 0.15d$  (кривые 3, 5).

приведены результаты расчета дисперсии  $\Psi' = k'_z d$  как зависимость частоты от фазового сдвига. На рис. 4 приведена диссипация  $\Psi'' = k''_z d$  в зависимости от частоты, а на рис. 5 дана частотная зависимость  $R_c$ . Полученные ИУ определяют связь амплитуд  $H_1(x) = H_y(x, 0)$  и



**Рис. 4.** Потери в зависимости от частоты для диафрагмированного ПВ при  $b = 10a = 5 \text{ mm}$ ,  $d = 0.4 \text{ mm}$ ,  $h = 0.8a$  для сдвига  $\Delta = 0$  (кривая 1),  $\Delta = d/4$  (2),  $\Delta = d/2$  (кривые 3, 4) при  $\omega_p = 2.8 \cdot 10^{16}$ ,  $\omega_c = 1.4 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$ . Кривая 4 построена для коэффициента 2 увеличения  $R_s$  за счет шероховатости поверхности.

$H_2(x) = H_y(x, d/2)$  с функциями  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$  как четырехполюсник проводимости [27]. Рассмотрим способ учета толщины диафрагм. Строгий учет толщины в два раза увеличивает количество ЧО и ИУ. Однако в случае очень малых зазоров  $s$  в канале между диафрагмой и стенкой достаточно рассмотреть только основную моду с постоянной распространения  $k$ , поскольку высшие моды в рабочей полосе сильно затухают. Обозначим тильдой смещенные на  $\delta$  вправо значения распределений полей на апертурах. Удобно их связать с несмещенными величинами матрицей передачи

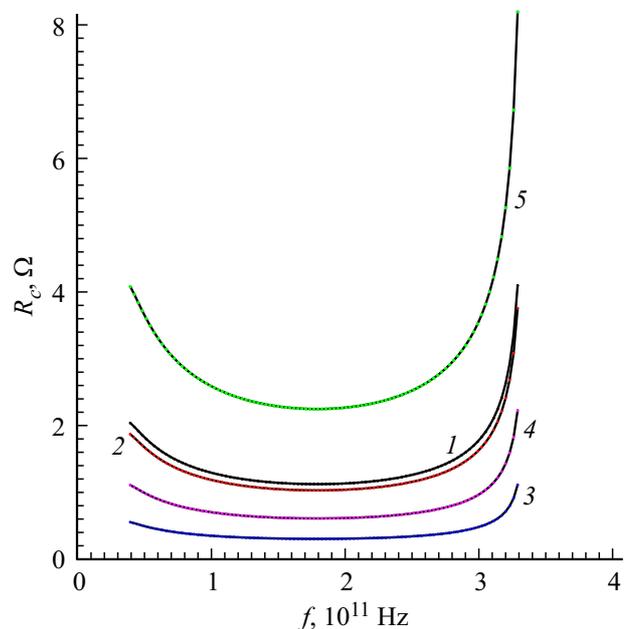
$$\begin{pmatrix} E_1(x) \\ H_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k\delta) & i\rho \sin(k\delta) \\ -i\rho^{-1} \sin(k\delta) & \cos(k\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(x) \\ \tilde{H}_1(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho = k_0/k$ ,  $l = 1/2$ . Для тонкой диафрагмы  $E_l(x) \approx \tilde{E}_l(x) + i\delta\tilde{H}_l(x)k^2/k_0$ ,  $H_l(x) \approx \tilde{H}_l(x) + i\delta k_0\tilde{E}_l(x)$ . Теперь в соотношениях (35)–(38) следует сделать замену  $z \rightarrow z - \delta$  в первых синусах и косинусах, при этом все коэффициенты выражаются через распределения электрических полей с тильдой. Следует потребовать выполнения условий непрерывности:  $\tilde{H}_1(x) = H_y(x, \delta/2)$ ,  $H_2(x) = H_y(x, d/2)$ ,  $\tilde{H}_2(x) = H_y(x, d/2 + \delta)$ ,  $H_1(x) = H_y(x, d) \exp(-i\Psi)$ . Получаются следующие соотноше-

ния:

$$\begin{aligned} & \exp(-i\Psi) \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_{xm}x) \left[ \tilde{\alpha}_m \cos(k_{zm}(d/2 - \delta)) + \tilde{\beta}_m \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_{xm}x) \left[ \alpha_m + \beta_m \cos(k_{zm}(d/2 - \delta)) \right] \\ &+ i\delta k_0 \tilde{E}_1(x), \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_{xm}x) \left[ \alpha_m \cos(k_{zm}(d/2 - \delta)) + \beta_m \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos(k_{xm}x) \left[ \tilde{\alpha}_m + \tilde{\beta}_m \cos(k_{zm}(d/2 - \delta)) \right] + i\delta k_0 \tilde{E}_2(x), \end{aligned}$$

в которых коэффициенты выражаются через интегралы от распределений полей:  $\beta_m$  через  $\tilde{E}_1(x)$ ,  $\alpha_m$  через  $E_2(x)$ ,  $\tilde{\beta}_m$  через  $E_1(x) \exp(-i\Psi)$  и  $\tilde{\alpha}_m$  через  $\tilde{E}_2(x)$ . Использование соотношений  $E_l(x) = \tilde{E}_l(x) + i\delta\tilde{H}_l(x)k^2/k_0$  приводит к системе четырех ИУ, поскольку  $\tilde{H}_l(x)$  зависят от электрических полей. В нулевом приближении  $E_l(x) = \tilde{E}_l(x)$ , в первом приближении  $E_1(x) = \tilde{E}_1(x) + i\delta(\alpha_0 + \beta_0)k^2/k_0$ ,  $E_2(x) = \tilde{E}_2(x) + i\delta(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0)k^2/k_0$ . В последнем случае учтен один первый член в рядах, определяющих  $\tilde{H}_l(x)$ . В нулевом приближении сразу получаем ИУ относительно



**Рис. 5.** Частотная зависимость сопротивления связи диафрагмированного ПВ со сдвинутыми диафрагмами при различных их толщинах  $\delta$ , а также толщинах  $t_0$  и ширинах  $w$  пучка:  $\delta = 0.1d$ ,  $t_0 = 0.2a$ ,  $w = 0.8b$  (кривая 1);  $\delta = 0.2d$ ,  $t_0 = 0.1a$ ,  $w = 0.8b$  (кривая 2);  $\delta = 0.3d$ ,  $t_0 = 0.1a$ ,  $w = 0.5b$  (кривая 3);  $\delta = 0.2d$ ,  $t_0 = 0.2a$ ,  $w = 0.5b$  (кривая 4);  $\delta = 0$ ,  $t_0 = 0.2a$ ,  $w = 0.8b$  (кривая 5). Параметры ЗС:  $d = 0.4 \text{ mm}$ ,  $a = 0.5 \text{ mm}$ ,  $b/a = 10$ .

но  $\tilde{E}_l(x)$ . В первом приближении имеем

$$\alpha_m = -C_m \left[ A_m \tilde{\alpha}_0 + B_m \tilde{\beta}_0 + \int_h^a \cos(k_{xm}x) \tilde{E}_2(x) dx \right],$$

$$\tilde{\alpha}_m = -C_m \left[ A_m \alpha_0 + B_m \beta_0 + \int_h^s \cos(k_{xm}x) \tilde{E}_1(x) dx \right],$$
(57)

$$\beta_m = C_m \int_0^s \cos(k_{xm}x) \tilde{E}_1(x) dx,$$

$$\tilde{\beta}_m = C_m \int_h^a \cos(k_{xm}x) \tilde{E}_2(x) dx,$$

$$A_m = i\delta k^2 \sin(k_{xm}s) / (k_{xm}k_0),$$

$$B_m = i\delta k^2 \sin(k_{xm}s) \cos(k_{z0}(d/2 - \delta)) / (k_{xm}k_0),$$

$$C_m = \frac{2k^2}{ik_{zm} \sin(k_{zm}(d/2 - \delta)) a k_0 \delta_m}.$$

Входящие с малыми множителями  $A_m$  и  $B_m$  коэффициенты следует определять через нулевые приближения. Используя соотношения (57), приходим к двум ИУ относительно распределения полей  $\tilde{E}_l$ . В качестве таких распределений берем соотношения (42), в которых квадратные корни заменены на кубические. Такие функции удовлетворяют условию на ребре для выступа с прямоугольным ребром.

## Заключение

На основе двух подходов — импедансного и адмитансного — получены поверхностные ИУ и ДУ для ЗС типа „двойная гребенка“ в прямоугольном экране в форме функционалов с учетом диссипации на поверхности. Задача решена двумя способами: разбиением на ЧО продольными и поперечными плоскостями. Для продольного разбиения рассмотрены алгоритмы с комплексными и действительными представлениями полей. Алгоритм с комплексным представлением полей более прост. Показана возможность увеличения рабочей полосы для ЗС типа „сдвинутые на полпериода гребенки“ или „сдвинутые диафрагмы в ПВ“. Рассмотренная ЗС из двух сдвинутых гребенок с отношением периодов 2:1 обладает меньшей широкополосностью. К увеличению полосы также приводит увеличение широкой стенки ПВ. Приведено влияние диссипации в металле на дисперсию и потери. Диссипация и микрошероховатость поверхности увеличивают замедление,  $E_z$  и  $R_c$  за счет плазмонного эффекта, что позволяют уменьшить высоту гребней. Эффект хорошо проявляется в высокочастотной части THz и в инфракрасном диапазоне. Уменьшение гребней в свою очередь уменьшает  $R_c$  и погонные потери, но требует изготовления более длинного прибора. Вопрос

о возможности использования замедленных на ровной поверхности плазмонов в ЛБВ THz диапазона открыт: необходимо снижение  $\omega_c$  на 2–3 порядка и использование материалов с пониженной плазменной частотой  $\omega_p \sim 10^{14}$  и менее. Более реально использовать микроструктурированные плоские проводящие пленки.

## Список литературы

- [1] *Алехин Ю.В., Апин М.П., Бурцев А.А., Бушуев Н.А., Воронков О.В., Григорьев Ю.А., Давидович М.В., Данилов А.Б., Исаев В.М., Кабанов И.Н., Кудряшов В.П., Куцько П.П., Мещанов В.П., Насенков И.Г., Рафалович А.Д., Роговин В.И., Рожнев А.Г., Шестеркин В.И.* Сверхширокополосные лампы бегущей волны. Исследование в СВЧ-, КВЧ- и ТГЧ-диапазонах. Внедрение в производство / Под ред. Н.А. Бушуева. М.: Радиотехника, 2016. 480 с.
- [2] *Carlsten B.E.* // *Phys. Plasma.* 2002. Vol. 9. N 12. P. 5088–5096.
- [3] *Carlsten B.E., Russell S.J., Earley L.M., Krawczyk F.L., Potter J.M., Ferguson P., Humphries S.* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2005. Vol. 33. N 1. P. 8593.
- [4] *Рожнёв А.Г., Рыскин Н.М., Каретникова Т.А., Торгашов Г.В., Симицын Н.И., Шалаев П.Д., Бурцев А.А.* // *Известия вузов. Радиофизика.* 2013. Т. 56. № 8–9. С. 601–613.
- [5] *Каретникова Т.А., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М., Торгашов Г.В., Торгашов И.Г., Симицын Н.И.* // *Радиотехника.* 2014. № 10. С. 46–51.
- [6] *Каретникова Т.А., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М., Торгашов Г.В., Симицын Н.И., Григорьев Ю.А., Бурцев А.А., Шалаев П.Д.* // *Радиотехника и электроника.* 2016. Т. 61. № 1. С. 54–60.
- [7] *Shin Y.-M., Barnett L.R., Luhmann N.C.* // *Appl. Phys. Lett.* 2008. Vol. 93. N 22. P. 221504.
- [8] *Shin Y.-M., Barnett L.R., Luhmann N.C.* // *IEEE Trans. Electron Devices.* 2009. Vol. 56. N 5. P. 706–712.
- [9] *Shin Y.-M., Baig A., Barnett L.R., Luhmann N.C., Pasour J., Larsen P.* // *IEEE Trans. Electron Devices.* 2011. Vol. 58. N 9. P. 3213–3219.
- [10] *Shin Y.-M., Baig A., Barnett L.R., Tsai W.-C., Luhmann N.C.* // *IEEE Trans. Electron Devices.* 2012. Vol. 59. N 1. P. 234–240.
- [11] *Shin Y.-M., Zhao J., Barnett L.R., Luhmann N.C.* // *Phys. Plasma.* 2010. Vol. 17. N 12. P. 123105.
- [12] *Deng G., Chen P., Yang J., Yin Z., Ruan J.* // *J. Comput. Electron.* 2015. Vol. 15. N 2. P. 634–638.
- [13] *Deng G., Huang X., Yang J., Yin Z., Ruan J.* // *Plasma Fusion Research.* 2015. Vol. 10. N 1. P. 1406078.
- [14] *Силин Р.А., Сазонов В.П.* Замедляющие системы. М.: Советское радио, 1966. 317 с.
- [15] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [16] *Белуга И.Ш.* // *Радиотехника и электроника.* 1961. Т. 6. № 3. С. 459–468.
- [17] *Цимринг Ш.Е.* // *Радиотехника и электроника.* 1957. Т. 2. № 1. С. 3–4; Т. 2. № 8. С. 969–988.
- [18] High Frequency Structure Simulator (HFSS) of ANSYS. Available: <http://www.ansys.com/Products/Electronics/ANSYS-HFSS>

- [19] Самохин Г.С., Силин Р.А. // Электронная техника. Сер. 1 Электроника СВЧ. 1978. Вып. 5. С. 3–11. Вып. 6. С. 11–19.
- [20] Накрап И.А., Самохин Г.С., Силин Р.А., Стриженко В.С. // Электронная техника. Электроника СВЧ. 1973. № 12. С. 36–44.
- [21] Бушуев Н.А., Давидович М.В., Шиловский П.А. // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Физика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 64–75.
- [22] Давидович М.В., Бушуев Н.А. // Антенны. 2014. № 8. С. 49–57.
- [23] Давидович М.В. // Квантовая электроника. 2017. Т. 47. № 6. С. 567–579.
- [24] Давидович М.В. // ЖЭТФ. 2016. Т. 160. Вып. 6. С. 1069–1083.
- [25] Давидович М.В. // Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 2. С. 150–163.
- [26] Левин Л. Современная теория волноводов. М.: ИЛ, 1954. 216 с.
- [27] Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
- [28] Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 664 с.
- [29] Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 7. С. 1465–1476.
- [30] Давидович М.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2017. № 2. С. 38–47.
- [31] Альтиулер Е.Ю., Нефедов И.С. // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 1. С. 67–69.
- [32] Давидович М.В. Итерационные методы решения задач электродинамики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. 240 с.
- [33] Альтиулер Ю.Г., Татаренко А.С. Лампы малой мощности с обратной волной. М.: Сов. радио, 1963. 296 с.
- [34] Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электродинамике. М.: Советское радио, 1973. 400 с.