01

Локализация и трансформация нелинейных возбуждений вблизи границы раздела сред с различными знаками нелинейности

© С.Е. Савотченко

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
308012 Белгород, Россия
e-mail: savotchenkose@mail.ru

(Поступило в Редакцию 24 мая 2017 г.)

Рассмотрены контактные состояния на границе нелинейных сред с разными знаками ангармонизмов. Сформулирована модель, которая представляет собой контрактную краевую задачу для нелинейного уравнения Шредингера. В рассматриваемой системе в зависимости от значения энергии получены несколько типов стационарных состояний, описывающих локальные состояния вблизи границы раздела сред, локализацию нелинейных волн при переходе через границу, а также их трансформацию. Получены дисперсионные соотношения, определяющие значения энергии таких состояний. В предельных случаях получены выражения для энергии стационарных состояний в явном виде.

DOI: 10.21883/JTF.2019.02.47063.2355

Введение

Происходящие вблизи контакта двух сред с различными физическими свойствами процессы имеют большое значение в различных технических приложениях квантовой твердотельной электроники и оптоэлектроники. Существенную роль в этом играют исследования показателей прозрачности границ раздела сред, определяемые различными явлениями локализации возбуждений в кристаллах с плоскими дефектами. Для разработки средств управления в сложных электронных и оптических системах может представлять интерес создание контролируемых барьеров посредством границ раздела сред с различными физическими характеристиками, в частности — с различными параметрами ангармонизма межатомного взаимодействия.

Можно отметить большое количество теоретических работ, в которых при формулировке математических моделей активно используется нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [1,2], в том числе и для описания локализованных вблизи дефектов малоамплитудных нелинейных колебаний в ангармонических кристаллах [3]. С помощью НУШ в ангармонических кристаллах с дефектами также описаны локализованные колебательные состояния с частотами вне зоны сплошного спектра, зависящими от амплитуды колебаний [4].

Динамика полей различной физической природы, таких как упругого, электрического и магнитного, описывается НУШ. К примеру, НУШ применялось для описания локализации электромагнитных волн вблизи границ раздела нелинейных сред [5]. Кроме того, известны различные обобщения НУШ, в частности, для среды с пространственной дисперсией использовано НУШ с производными четвертого порядка [6] и короткодействующим потенциалом с дельта-функцией Дирака, моделирующей взаимодействие возбуждения с дефектом. В [7] было получено решение НУШ с потенциалом, моделирующим взаимодействие возбуждения с дефектом, обладающим внутренней структурой, при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия.

Для теоретического исследования новых явлений, обусловленных локализацией возбуждений различной физической природы вблизи дефектов, целесообразно использовать НУШ, которому подчиняется волновая функция ψ, выступающая в роли огибающей комплексного поля компонент вектора намагниченности в легкоосном ферромагнетике, либо комплексной амплитуды упругого поля смещения сдвиговой волны в кубическом кристалле с плоским дефектом, либо комплексной функции из амплитуд компонент электрического поля в оптической нелинейной среде. Параметры в уравнениях, описывающих указанные виды полей, будут иметь вполне определенный физический смысл в рамках одной из трех таких моделей.

В настоящей работе предлагается описать различные виды стационарных состояний, которые возникают вблизи границы нелинейных сред, параметр ангармонизма в которых имеет противоположные знаки. Такие состояния являются различными видами решениями НУШ с короткодействующим потенциалом, связанные на границе раздела сред. Волновые функции в таких состояниях в зависимости от энергии возбуждений в полупространстве одной среды могут быть затухающими при удалении от границы раздела, а в другой среде с противоположным знаком ангармонизма они могут иметь форму кноидальных волн, соответствующих периодическим решениям НУШ. Комбинации различных типов решений НУШ, связанных граничными условиями на дефекте, приводят к многообразию различных типов стационарных состояний, описывающих явления локализации и трансформации нелинейных волн при переходе через границу раздела сред.

Формулировка математической модели

Рассмотрим контакт двух нелинейных сред с различными физическими характеристиками, ангармонизм в которых имеет противоположные знаки. Среды разделены плоской границей раздела, проходящей через начало координат, перпендикулярно оси Ox. Полупространство в области $x < 0$ занимает среда с одним знаком параметра ангармонического межатомного взаимодействия γ, а полупространство в области $x > 0$ занимает среда с противоположным знаком этого параметра.

Будем предполагать, что возмущение параметров сред создаваемой границей раздела как плоским дефектом сосредоточено на расстояниях, существенно меньших размеров изучаемых возбуждений, и поэтому считается локальным. Вследствие локальности возмущения параметров сред взаимодействие границы раздела с возбуждением можно описывать короткодействующим потенциалом $U(x) = U_0\delta(x)$, где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака, U_0 — интенсивность взаимодействия дефекта, расположенным в начале координат, с возбуждением, такая, что при $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ — притягивается.

Будем рассматривать процессы локализации и трансформации возбуждений на границе раздела линейной и нелинейной сред на основе НУШ.

Стационарные состояния НУШ с энергией E представимы виде: $\psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt)$. Тогда задача решения НУШ с указанным короткодействующим потенциалом сводится к решению стационарного одномерного НУШ на полуосях:

$$E\psi(x) = -\frac{1}{2m}\psi''(x) + \Omega(x)\psi(x) - \gamma(x)|\psi(x)|^2\psi(x) = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\psi(-0) = \psi(+0); \tag{2}$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2mU_0\psi(0). \tag{3}$$

Здесь m — эффективная масса возбуждений,

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1, & x < 0 \\ \Omega_2, & x > 0 \end{cases},$$

$\Omega_{1,2}$ — значения уровней дна энергетический зоны, $\gamma(x)$ — параметр нелинейности сред:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1, & x < 0 \\ -\gamma_2, & x > 0 \end{cases},$$

причем $\gamma_{1,2} > 0$.

В линейной среде без дефекта распространяются свободные волны с квадратичным законом дисперсии. В нелинейной среде без дефекта могут распространяться локализованные возбуждения — солитоны, и нелинейные волны, описываемые периодическими решениями НУШ, которые выражаются через эллиптические функции и называются кноидальными волнами [1,2]. В зависимости от знака нелинейности существуют различные типы нелинейных волн.

Локализованные состояния

В рассматриваемой модели существует несколько типов локализованных состояний в различных энергетических диапазонах. В области ниже дна зоны любой из ветвей спектра, когда энергия возбуждений находится в диапазоне $E < \min(\Omega_{1,2})$, уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), представимое в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1/\operatorname{ch} q_1(x - x_1), & x < 0 \\ A_2/\operatorname{sh} q_2(x - x_2), & x > 0 \end{cases}, \tag{4}$$

где $q_{1,2}^2 = 2m(\Omega_{1,2} - E)$, амплитуды $A_{1,2} = \pm q_{1,2}/(m\gamma_{1,2})^{1/2}$. Для ограниченности решения (4) должно выполняться требование $x_2 < 0$. Из граничных условий (2) и (3) получаются два соотношения, позволяющие определить энергию данного стационарного состояния, и один из параметров $x_{1,2}$. К примеру, можно выразить

$$x_2 = \frac{1}{q_2}\operatorname{Arsh}\left(\frac{q_2}{\eta q_1}\operatorname{ch} q_1 x_1\right), \tag{5}$$

где $\eta = (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2}$. Тогда значения энергии определяются из дисперсионного соотношения, полученного с учетом (5):

$$q_2 \operatorname{cth}(q_2 x_2) - q_1 \operatorname{th}(q_1 x_1) = 2mU_0. \tag{6}$$

Из соотношения (6) с учетом (5) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1)$, а соотношение (5) тогда определяет параметр x_2. Таким образом, решение (4) является однопараметрическим локализованным состоянием с одним свободным параметром, в качестве которого удобно было выбрать x_1.

В явном виде энергию из (6) можно получить для частного случая $x_1 = 0$:

$$E = \Omega_1 - (2mU_0)^2/(1 + \eta^2). \tag{7}$$

В диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$, что возможно при условии $\Omega_2 < \Omega_1$, уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), представимое в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1/\operatorname{ch} q_1(x - x_1), & x < 0 \\ A_t \operatorname{th} q_t(x - x_2), & x > 0 \end{cases}, \tag{8}$$

где параметры волновой функции в области $x < 0$ такие же, как для (4), а в области $x > 0$ $q_t^2 = m(E - \Omega_2)$, $A_t = \pm q_t/(m\gamma_2)^{1/2}$. Подстановка (8) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\operatorname{ch} q_1 x_1 \operatorname{th} q_t x_2 = \eta q_1/q_t, \tag{9}$$

$$q_t/\operatorname{sh} 2q_t x_2 + q_1 \operatorname{th} q_1 x_1 = -2mU_0. \tag{10}$$

Из соотношения (9) выражается параметр x_2, а из (10) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1)$. Поэтому волновая функция (8) описывает однопараметрическое локализованное состояние с одним свободным параметром, в качестве которого выбран x_1.

В частном случае при $x_1 = 0$ из (10) при учете (9) получается соотношение

$$q_t^2 + q_1^2\eta^2 = 2mU_0\eta q_1, \tag{11}$$

из которого можно получить энергию в явном виде

$$E = (b \pm D^{1/2})/(1-\eta^2)^2, \tag{12}$$

где $b = \Omega_2 - 2(\Omega_1 + 2mU_0^2)\eta^2$, $D = b^2 - (1-\eta^2)^2 \times \times\{(\Omega_2 - 2\Omega_1\eta^2)^2 - 8mU_0^2\eta^2\Omega_1\}$.

Знак „+“ в (12) выбирается для одних соотношений между параметрами системы, а „–“ — для других.

Локализация нелинейных волн

В рассматриваемой системе могут существовать состояния, описывающие локализацию нелинейных волн при переходе через границу раздела сред.

В диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$ уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), представимое в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1/\operatorname{ch} q_1(x - x_1), & x < 0 \\ A_s \operatorname{sn}\big(q_s(x - x_2), k\big), & x > 0 \end{cases}, \tag{13}$$

где параметры волновой функции в области $x < 0$ такие же, как для (4), а в области $x > 0$ $A_s = \pm q_s(m\gamma_2)^{-1/2}$, $q_s^2 = 2m(E - \Omega_2)/(1 + k^2)$, k — модуль эллиптической функции sn ($0 < k < 1$). Подстановка (13) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\operatorname{ch} q_1 x_1 \operatorname{sn}(q_s x_x, k) = \eta q_1/q_s, \tag{14}$$

$$q_s k_1 \operatorname{cn}(q_s x_2, k)/\operatorname{cn}\big(q_s x_2 + K(k), k\big) - q_1 \operatorname{th} q_1 x_1 = 2mU_0, \tag{15}$$

$k_1^2 = 1 - k^2$ — дополнительный модуль эллиптических функций, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [1].

Из (14) можно выразить x_1 и подставить в (15), в результате чего получится соотношение

$$q_1\big(q_s^2 \operatorname{sn}(q_s x_2, k) + \eta^2 q_1^2\big)^{1/2} = -q_s\{2mU_0 \operatorname{sn}(q_s x_2, k) + q_s \operatorname{cn}(q_s x_2, k)\operatorname{dn}(q_s x_2, k)\}. \tag{16}$$

Из соотношения (16) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_2, k)$, а соотношение (15) тогда определяет параметр x_1. Таким образом, волновая функция (13) является двухпараметрическим решением с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_2.

Рассмотрим предельный случай малых значений $q_s x_2 \ll 1$ и $x_1 = 0$. Тогда получается $x_2 = -1/2mU_0$. С учетом данного выражения в таком пределе можно определить энергию в явном виде

$$E = \alpha_s\{1 + [1 + \beta_s/\alpha_s^2]^{1/2}\}^2, \tag{17}$$

где $\alpha_s = \Omega_2 - mU_0^2\eta^2(1+k^2)^2$, $\beta_s = \Omega_2^2 - mU_0^2\eta^2(1+k^2)^2\Omega_1$.

Состояние (13) описывает эффект „запирания“ волны при переходе из правого полупространства ($x > 0$) в левое ($x < 0$). Кноидальная волна, распространяющаяся в полупространстве со средой, характеризуемой отрицательным ангармонизмом, при переходе через границу раздела в правом полупространстве со средой с отрицательным ангармонизмом, затухает, причем на больших расстояниях от нее $|\psi| \to 0$ при $x \to -\infty$.

В рассматриваемом энергетическом диапазоне могут существовать два типа состояний, волновые функции которых описываются периодическими решениями НУШ в левом полупространстве со средой с положительным ангармонизмом, и решением в виде кинка в правом полупространстве со средой с отрицательным ангармонизмом. Волновая функция одного из таких состояний является решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2) и (3), представимым в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A_d \operatorname{dn}\big(q_d(x - x_1), k\big) & x < 0 \\ A_t \operatorname{th} q_t(x - x_2) & x > 0 \end{cases}, \tag{18}$$

где параметры волновой функции в области $x > 0$ такие же, как для (8), а $A_q = \pm q_d/(m\gamma_1)^{1/2}$, $q_d^2 = 2m(\Omega_1 - E)/(2 - k^2)$. Подстановка (18) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\eta \operatorname{cth} q_t x_2 \operatorname{dn}(q_d x_1, k) = q_t/q_d, \tag{19}$$

$$q_t/\operatorname{ch}^2 q_t x_2 + \operatorname{th} q_t x_2\{k^2 q_d \operatorname{sn}(q_d x_1, k) \times \operatorname{sn}\big(q_d x_1 + K(k), k\big) + 2mU_0\} = 0. \tag{20}$$

Из (19) можно выразить x_2 и подставить в (20), в результате чего получится соотношение

$$\eta q_d^2\{\eta \operatorname{dn}^2(q_d x_1, k) + k^2 \operatorname{sn}(q_d x_1, k)\operatorname{cn}(q_d x_1, k)\} + q_t^2 = 2mU_0\eta q_d \operatorname{dn}(q_d x_1, k). \tag{21}$$

Из соотношения (21) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$, а соотношение (19) тогда определяет параметр x_2. Волновая функция (18) является двухпараметрическим решением с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

В частном случае при $x_1 = 0$ из (21) при учете (19) получается соотношение

$$q_t^2 + q_d^2\eta^2 = 2mU_0 q_d, \tag{22}$$

из которого можно получить энергию в явном виде:

$$E = \Omega_1 - \varepsilon_d\{1 \pm [1 - \Omega_d/\varepsilon_d]^{1/2}\}^2. \quad (23)$$

где $\varepsilon_d = \eta U_0(2-k^2)/[2\eta^2-(2-k^2)]$, $\Omega_d = (\Omega_1 - \Omega_2)(2-k^2)/2mU_0\eta$. Знаки Ω_d и ε_d определяются только знаком параметра дефекта U_0 и поэтому $\Omega_d/\varepsilon_d > 0$. Должно выполняться требование $\Omega_d < \varepsilon_d$.

В рассматриваемом энергетическом диапазоне уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющим граничным условиям (2) и (3), представимое в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A_c \mathrm{cn}\big(q_c(x-x_1), k\big) & x<0 \\ A_t \mathrm{th}\big(q_t(x-x_2)\big), & x>0 \end{cases}, \quad (24)$$

где параметры волновой функции в области $x > 0$ такие же, как для (8), а $A_c = \pm k q_c/(m\gamma_1)^{1/2}$, $q_c^2 = 2m(\Omega_1 - E)/(2k^2-1)$. Подстановка (24) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\eta\,\mathrm{cth}\,q_t x_2 \mathrm{cn}(q_c x_1, k) = q_t/q_c, \quad (25)$$

$$q_t/\mathrm{ch}^2 q_t x_2 + \mathrm{th} q_t x_2\{q_c \mathrm{sn}(q_c x_1, k)/\mathrm{sn}\big(q_c x_1 + K(k), k\big) + 2mU_0\} = 0. \quad (26)$$

Из (25) можно выразить x_2 и подставить в (26), в результате чего получится соотношение

$$\eta q_c^2\{\eta \mathrm{cn}^2(q_c x_1, k) - k \mathrm{sn}(q_c x_1, k)\mathrm{dn}(q_c x_1, k)\} + q_t^2 = 2mU_0\eta q_c k \mathrm{cn}(q_c x_1, k). \quad (27)$$

Из соотношения (27) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$, а соотношение (25) тогда определяет параметр x_2. Волновая функция (24) является двухпараметрическим решением с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

В частном случае при $x_1 = 0$ из (27) при учете (25) получается соотношение

$$q_c^2\eta^2 + q_t^2 = 2mU_0\eta q_c, \quad (28)$$

из которого можно получить энергию в явном виде

$$E = \Omega_1 - \varepsilon_c\{1 \pm [1 - \Omega_c/\varepsilon_c]^{1/2}\}^2. \quad (29)$$

где $\varepsilon_c = 2m\eta^2 U_0^2(2k^2-1)/[(2\eta^2-(2k^2-1)]^2$, $\Omega_c = (\Omega_1 - \Omega_2)(2k^2-1)/[2\eta^2(2k^2-1)]$. Должно выполняться требование $\Omega_c < \varepsilon_c$.

Ниже границы сплошного спектра в диапазоне $E < \min(\Omega_{1,2})$ также существуют еще два вида состояний, описывающих локализацию кноидальных волн при переходе через границу раздела.

Уравнение (1) в данном энергетическом диапазоне имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), представимое в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A_d \mathrm{dn}\big(q_d(x-x_1), k\big) & x<0 \\ A_2/\mathrm{sh} q_2(x-x_2), & x>0 \end{cases}, \quad (30)$$

где параметры волновой функции в области $x < 0$ такие же, как для (18), а в области $x > 0$ такие же, как для (4). Подстановка (30) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\eta \mathrm{sh} q_2 x_2 \mathrm{dn}(q_d x_1, k) = q_2/q_d. \quad (31)$$

$$q_2 \mathrm{th} q_2 x_2 + k^2 q_d \mathrm{sn}(q_d x_1, k)\mathrm{sn}\big(q_d x_1 + K(k), k\big) + 2mU_0 = 0. \quad (32)$$

Из (31) можно выразить x_2 и подставить в (32), тем самым исключив его из дисперсионного соотношения. Тогда из (32) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$, а (31) определяет параметр x_2. Поэтому волновая функция (30) является двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

В частном случае при $x_1 = 0$ из (32) при учете (31) можно получить энергию в явном виде

$$E = \Omega_1 - \mu_d(\Omega_2 - \Omega_1), \quad (33)$$

где $\mu_d = (4m^2U_0^2 - 1)(2-k^2)/[2-k^2-4m^2U_0^2(2-k^2-\eta^2)]$. Если $\Omega_1 > \Omega_2$, то должно быть $\mu_d < 0$, а если $\Omega_1 < \Omega_2$, то должно быть $\mu_d > 0$.

Уравнение (1) в рассматриваемом энергетическом диапазоне $E < \min(\Omega_{1,2})$ имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), представимое в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A_c \mathrm{cn}\big(q_c(x-x_1), k\big) & x<0 \\ A_2/\mathrm{sh}\big(q_2(x-x_2)\big), & x>0 \end{cases}, \quad (34)$$

где параметры волновой функции в области $x < 0$ такие же, как для (24), а в области $x > 0$ такие же, как для (4). Подстановка (34) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$k\eta \mathrm{sh} q_2 x_2 \mathrm{cn}(q_c x_1, k) = q_2/q_c, \quad (35)$$

$$q_2 \mathrm{cth} q_2 x_2 - q_c \mathrm{sn}(q_c x_1, k)/\mathrm{sn}\big(q_c x_1 + K(k), k\big) - 2mU_0 = 0. \quad (36)$$

Из (35) можно выразить x_2 и подставить в (36), тем самым исключив его из дисперсионного соотношения. Тогда из (36) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$, а (35) определяет параметр x_2. Поэтому волновая функция (34) является двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

В частном случае при $x_1 = 0$ из (36) при учете (35) можно получить энергию в явном виде

$$E = \Omega_1 - (\Omega_1 - \Omega_2 + 2mU_0^2)(2k^2-1)/[k^2(2+\eta^2)-1]. \quad (37)$$

Трансформация нелинейных волн

В рассматриваемой системе в диапазоне $\Omega_2 < E < \Omega_1$ могут существовать состояния, описывающие трансформацию нелинейных волн при переходе через границу раздела сред.

Уравнение (1) в данном энергетическом диапазоне имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), представимое в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A_d \mathrm{dn}\big(q_d(x - x_1), k\big) & x < 0 \\ A_s \mathrm{sn}\big(q_s(x - x_2), k\big), & x > 0 \end{cases}, \qquad (38)$$

где параметры волновой функции в области $x < 0$ такие же, как для (18), а в области $x > 0$ такие же, как для (13). Подстановка (30) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$\mathrm{sn}(q_s x_2, k)/\mathrm{dn}(q_d x_1, k) = \eta q_d/q_s, \qquad (39)$$

$$q_s k_1 \mathrm{cn}(q_s x_2, k)/\mathrm{cn}\big(q_s x_2 + K(k), k\big)$$
$$- k^2 q_d \mathrm{sn}(q_d x_1, k) \mathrm{sn}\big(q_d x_1 + K(k), k\big) = 2mU_0. \qquad (40)$$

Из (39) можно выразить, например x_2, и подставить в (40), тем самым исключив его из дисперсионного соотношения. Тогда из (40) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$, а (39) определяет параметр x_2. Поэтому волновая функция (38) является двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

В предельном случае малых значений $q_s x_2 \ll 1$ и $x_1 = 0$ из (40) при учете (39) можно получить энергию в явном виде

$$E = \Omega_2 + \varepsilon_{ds}\{[1 + 2(\Omega_1 - \Omega_2)/\varepsilon_{ds}]^{1/2} - 1\}, \qquad (41)$$

где $\varepsilon_{ds} = mU_0^2\eta^2(1 + k^2)^2/(2 - k^2) > 0$.

Уравнение (1) в данном энергетическом диапазоне имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), другого типа, которое представимо в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} A_c \mathrm{cn}\big(q_c(x - x_1), k\big) & x < 0 \\ A_s \mathrm{sn}\big(q_s(x - x_2), k\big), & x > 0 \end{cases}, \qquad (42)$$

где параметры волновой функции в области $x < 0$ такие же, как для (24), а в области $x > 0$ такие же, как для (13). Подстановка (42) в граничные условия (2) и (3) приводит к соотношениям

$$k\mathrm{cn}(q_c x_1, k)/\mathrm{sn}(q_s x_2, k) = \eta q_s/q_c, \qquad (43)$$

$$q_s k_1 \mathrm{cn}(q_s x_2, k)/\mathrm{cn}\big(q_s x_2 + K(k), k\big)$$
$$- q_c \mathrm{sn}(q_c x_1, k)/\mathrm{sn}\big(q_c x_1 + K(k), k\big) = 2mU_0. \qquad (44)$$

Из (43) можно выразить, например, x_2 и подставить в (44), тем самым исключив его из дисперсионного соотношения. Тогда из (44) находится энергия как функция параметров $E = E(m, U_0, \eta, \Omega_{1,2}, x_1, k)$, а (43) определяет параметр x_2. Поэтому волновая функция (42) является двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

В предельном случае малых значений $q_s x_2 \ll 1$ и $x_1 = 0$ из (40) при учете (39) можно получить энергию в явном виде

$$E = \Omega_2 + \varepsilon_{cs}\{[1 + 2(\Omega_1 - \Omega_2)/\varepsilon_{cs}]^{1/2} - 1\},$$

где $\varepsilon_{cs} = mU_0^2\eta^2k^2(1 + k^2)^2/k_1^2(2k^2 - 1) > 0$.

Волновые функции (38) и (42) описывают трансформацию кноидальных волн при переходе через границу раздела нелинейных сред с различными знаками ангармонизма в диапазоне энергий $\Omega_2 < E < \Omega_1$.

Заключение

В работе на основе модели контакта двух нелинейных сред, возбуждения в которой описываются НУШ, рассмотрены вопросы существования различных видов стационарных состояний в широком интервале энергетического спектра.

Получены новые решения сформулированной контактной краевой задачи для НУШ, описывающие взаимодействие возбуждений на границе раздела нелинейных сред с противоположными знаками параметра ангармонизма. Показано, что в зависимости от соотношения энергии возбуждения и значений краев зоны сплошного спектра собственных стационарных состояний возникают локализованные по обе стороны от границы раздела сред состояния. Установлено, что в рассматриваемой системе, помимо солитонных, возможны периодические решения НУШ, описывающие трансформацию кноидальных волн при переходе через границу раздела нелинейных сред с противоположными знаками параметра ангармонизма.

Особый интерес представляют такие решения контактной краевой задачи для НУШ, которые описывают локализацию кноидальных волн при переходе через границу раздела. В этом случае волновая функция в одном полупространстве представляет собой кноидальную волну, описываемую периодическим решением НУШ в виде определенной эллиптической функции, а другом полупространстве — затухающую при удалении от границы раздела функцию, описываемую солитонным решением НУШ. В частных предельных случаях получены выражения для энергии стационарных состояний в явном виде.

Список литературы

[1] *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984. 288 с.
[2] *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989. 304 с.
[3] *Герасимчук И.В., Ковалев А.С.* // ФНТ. 2000. Т. 26. № 8. С. 799–809.
[4] *Богдан М.М., Герасимчук И.В., Ковалев А.С.* // ФНТ. 1997. Т. 23. № 2. С. 197–207.

[5] *Abdullaev F.Kh., Baizakov B.B., Umarov B.A.* // Opt. Commun. 1998. Vol. 156. P. 341–346.
[6] *Савотченко С.Е.* // Известия вуз. Физика. 2004. Т. 47. № 5. С. 79–84.
[7] *Савотченко С.Е.* // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. 2016. № 4. С. 51–59.