

01
**Спектры собственных волн анизотропного цилиндрического
 твердотельного волновода**

© Ю.О. Аверков,^{1,2} Ю.В. Прокопенко,^{1,3} В. М. Яковенко¹

¹ Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,
 61085 Харьков, Украина

² Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
 61022 Харьков, Украина

³ Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
 61166 Харьков, Украина
 e-mail: yuriyaverkov@gmail.com; prokopen@ire.kharkov.ua

(Поступило в Редакцию 19 июля 2017 г.)

Теоретически исследованы дисперсионные свойства собственных волн анизотропного цилиндрического твердотельного волновода, компоненты тензора диэлектрической проницаемости которого обладают частотной дисперсией. Приведена классификация волн. Обнаружены собственные объемно-поверхностные волны *E*-типа, обладающие отрицательными групповыми скоростями. Определены условия их существования. Показано существование в волноводе собственных поверхностных волн *E*-типа и псевдоповерхностных волн *E*- и *H*-типов.

DOI: 10.21883/JTF.2019.01.46954.2438

Введение

В работе [1] было обнаружено излучение электромагнитных волн в миллиметровом диапазоне системой, в которой многоструйный цилиндрический поток электронов пролетает над изотропным диэлектрическим цилиндром. Неустойчивость трубчатого электронного пучка при взаимодействии с плазмоподобной средой исследована в работе [2]. В работе [3] развита теория неустойчивости нерелятивистского бесконечно тонкого трубчатого электронного пучка, движущегося в вакууме над диэлектрическим цилиндром. Для понимания природы возникновения неустойчивости при взаимодействии потока заряженных частиц с цилиндрическим твердотельным волноводом особое внимание заслуживают исследования возможности существования в нем собственных волн с отрицательными групповыми скоростями. Большой интерес представляют пучковые неустойчивости, которые возникают в электродинамических системах, содержащих анизотропные диспергирующие среды.

В настоящей работе теоретически исследуются свойства собственных волн анизотропного цилиндрического твердотельного волновода, компоненты тензора диэлектрической проницаемости которого обладают частотной дисперсией. Целью является определение условий существования собственных волн, обладающих аномальной дисперсией.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим немагнитный цилиндрический твердотельный волновод, который изготовлен из анизотропного одноосного монокристалла так, что его ось анизо-

тропии ориентирована параллельно продольной оси симметрии *Z* цилиндра. Волновод с радиусом ρ_0 расположен в вакууме. Электромагнитные свойства сред внутри и вне цилиндра описываются уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t),$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — напряженности магнитного и электрического полей соответственно. Вектор электрической индукции $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ связан с вектором $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ материальным уравнением [4,5]

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t') E_j(\mathbf{r}, t') dt',$$

где $\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t')$ — функция влияния, характеризующая эффективность передачи действия поля из момента времени t' в момент t [5], индексы i и j соответствуют одному из направлений вдоль осей координат ρ , φ и z , причем по индексу j производится суммирование с перебором всех направлений. В вакууме имеем $\varepsilon_{ij}(t-t') = \delta_{ij} \delta(t-t')$, где δ_{ij} — символ Кронекера и $\delta(t-t')$ — дельта-функция Дирака.

Векторы напряженностей электромагнитного поля собственных волн цилиндрического твердотельного волновода представим в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n(\rho, q_z, \omega) \times \exp[i(q_z z + n\varphi - \omega t)] dq_z d\omega,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n(\rho, q_z, \omega) \times \exp[i(q_z z + n\varphi - \omega t)] dq_z d\omega,$$

где q_z — продольное (аксиальное) волновое число, ω — частота парциальной волны, $|n|$ — азимутальный модовый индекс. Тогда имеем

$$D_i(\rho, q_z, \omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\rho, q_z, \omega),$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon_{ij}(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды при переборе индексов i и j .

Рассмотрим среду внутри цилиндра, состоящую из анизотропных осцилляторов, характеризуемых набором собственных частот ω_L , ω_r и ω_s . Такой среде соответствует кристалл, тензор диэлектрической проницаемости которого имеет диагональный вид с компонентами ε_\perp и ε_\parallel , где индексы „ \perp “ и „ \parallel “ указывают на свойства материала в перпендикулярном и параллельном направлениях к оптической оси кристалла соответственно. Будем полагать, что частотные зависимости $\varepsilon_\perp(\omega)$ и $\varepsilon_\parallel(\omega)$ имеют вид [6–9]

$$\varepsilon_\perp(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_r^2}, \quad \varepsilon_\parallel(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_s^2},$$

где ε_0 — фоновое значение диэлектрической проницаемости кристалла, определяемое как высокочастотный предел $\varepsilon_\perp(\omega)$ и $\varepsilon_\parallel(\omega)$. Очевидно, что существуют такие области частот, в которых $\varepsilon_\perp(\omega)$ и $\varepsilon_\parallel(\omega)$ имеют отрицательные значения.

Продольные (аксиальные) спектральные составляющие поля имеют вид [2,10,11]

$$E_{zn}(\rho, q_z, \omega) = \begin{cases} \begin{cases} A_n^E J_n(q_E \rho), & q_E^2 > 0 \\ A_n^E I_n(|q_E| \rho), & q_E^2 < 0 \end{cases} & \rho \leq \rho_0, \\ \begin{cases} B_n^E H_n(q\rho), & q^2 > 0, \\ B_n^E K_n(|q| \rho), & q^2 < 0, \end{cases} & \rho \geq \rho_0, \end{cases} \\ H_{zn}(\rho, q_z, \omega) = \begin{cases} \begin{cases} A_n^H J_n(q_H \rho), & q_H^2 > 0 \\ A_n^H I_n(|q_H| \rho), & q_H^2 < 0 \end{cases} & \rho \leq \rho_0, \\ \begin{cases} B_n^H H_n(q\rho), & q^2 > 0, \\ B_n^H K_n(|q| \rho), & q^2 < 0, \end{cases} & \rho \geq \rho_0, \end{cases} \quad (1)$$

в которых $J_n(u)$ и $H_n(u)$ — цилиндрические функции n -го порядка Бесселя и Ганкеля, а $I_n(u)$ и $K_n(u)$ — модифицированные функции Бесселя n -го порядка первого (функция Инфельда) и второго (функция Макдональда) рода соответственно [12]; $A_n^{E,H}$ и $B_n^{E,H}$ — произвольные постоянные; $q_H = \sqrt{\varepsilon_\perp \omega^2 / c^2 - q_z^2}$ и $q_E = q_H \sqrt{\varepsilon_\parallel / \varepsilon_\perp}$ — поперечные (радиальные) волновые числа H - и E -типов волн в цилиндре соответственно; c — скорость света в вакууме; $q = \sqrt{\omega^2 / c^2 - q_z^2}$ — поперечное волновое число в вакууме. Радиальные зависимости составляющих $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ и $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ обусловлены конечностью поля при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. На частотах

$\omega > 0$ функция $H_n(q\rho) \equiv H_n^{(1)}(q\rho)$, а на частотах $\omega < 0$ $H_n(q\rho) \equiv H_n^{(2)}(q\rho)$. Постоянные B_n^E и B_n^H выражаются соответственно через A_n^E и A_n^H из условий непрерывностей $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ и $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ составляющих на поверхности цилиндра $\rho = \rho_0$.

Поперечные компоненты электромагнитного поля собственных волн цилиндрического твердотельного волновода определяются через продольные $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ и $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$, выражения для которых приведены, например, в работах [10,11,13].

Удовлетворяя граничным условиям на поверхности цилиндра $\rho = \rho_0$, получим следующее дисперсионное уравнение для собственных волн твердотельного цилиндра [3,14,15]:

$$a_n^2 - \Delta_n^H \Delta_n^E = 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta_n^H = \frac{1}{q_H \rho_0} \frac{J'_n(q_H \rho_0)}{J_n(q_H \rho_0)} - \frac{1}{q \rho_0} \frac{H'_n(q \rho_0)}{H_n(q \rho_0)}, \\ \Delta_n^E = \frac{\varepsilon_\parallel}{q_E \rho_0} \frac{J'_n(q_E \rho_0)}{J_n(q_E \rho_0)} - \frac{1}{q \rho_0} \frac{H'_n(q \rho_0)}{H_n(q \rho_0)}, \\ a_n = \frac{\omega q_z n}{c q_H^2 q^2 \rho_0^2} (\varepsilon_\perp - 1).$$

Штрих у цилиндрических функций обозначает их производные по аргументу. Решения уравнения (2) определяют собственные частоты $\omega_{ns} = \omega'_{ns} - i\omega''_{ns}$, где $\omega''_{ns} \geq 0$, цилиндрического волновода с модами H - и E -типов. Функция $H_n(q\rho_0)$ при $\omega'_{ns} > 0$ является функцией Ганкеля первого рода $H_n^{(1)}(q\rho_0)$, а при $\omega'_{ns} < 0$ — функцией Ганкеля второго рода $H_n^{(2)}(q\rho_0)$. Азимутальный модовый индекс $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ соответствует половине количества вариаций поля по углу φ . Радиальный индекс s отображает количество вариаций поля вдоль радиальной координаты ρ . В случае симметричных азимутально-однородных ($n = 0$) волн и аксиально-однородных ($q_z = 0$) колебаний модовые индексы s соответствуют порядковым номерам корней однородных дисперсионных уравнений, на которые распадается уравнение (2).

Дисперсионные зависимости $\omega_{0s}(q_z)$ собственных симметричных H_{0s} - и E_{0s} -волн твердотельного цилиндра определяются решениями дисперсионных уравнений $\Delta_0^H = 0$ и $\Delta_0^E = 0$ соответственно. Решения уравнения (2) при $n \neq 0$ определяют дисперсионные зависимости $\omega_{ns}(q_z)$ собственных гибридных EH (H -типа) или HE (E -типа)-волн волновода. Однозначное соответствие решений уравнения (2) определенному типу волны (H или E) можно идентифицировать только после определения доминирующей продольной компоненты поля, т.е. сравнения максимальных значений модулей $|H_{zn}(\rho, q_z, \omega_{ns})|$ и $|E_{zn}(\rho, q_z, \omega_{ns})|$. В случае HE -волны постоянная A_n^H определяется через A_n^E , а в случае EH -волны — наоборот: A_n^E через A_n^H .

Мы сосредоточим внимание только на собственных волнах твердотельного цилиндра, которые в вакууме имеют поверхностный характер. Для этих волн

Виды собственных волн твердотельного цилиндра, расположенного в вакууме

Знак квадрата поперечного числа		Знак диэлектрической проницаемости		Виды волн	Ссылка
q_H^2	q_E^2	$\varepsilon_{\perp}(\omega)$	$\varepsilon_{\parallel}(\omega)$		
+	+	+	+	объемно-поверхностные	[16]
+	-	+	-	поверхностные и/или объемно-поверхностные симметричные; псевдоповерхностные гибридные	[16–18]
-	+	+	-	объемно-поверхностные	[16]
-	+	-	+	объемно-поверхностные	[16]
-	-	-	-	поверхностные	[17,18]
-	-	+	+	не существуют (запрещенная зона)	

выполняется условие $q^2 < 0$, что равносильно $q_z^2 > (\omega_{ns}/c)^2$. Именно такие волны возбуждаются потоком заряженных частиц при выполнении условия резонанса Вавилова–Черенкова [3]. В этом случае в уравнении (2) слагаемые $H'_n(q\rho_0)/q\rho_0 H_n(q\rho_0)$ в Δ_n^H и Δ_n^E приобретают вид $-K'_n(|q|\rho_0)/|q|\rho_0 K_n(|q|\rho_0)$, а радиальные распределения продольных спектральных составляющих поля в вакууме описываются функциями Макдональда. В случае собственных волн цилиндра с поперечными волновыми числами, для которых выполняются условия $q_H^2 < 0$ и $q_E^2 < 0$, слагаемые $J'_n(q_H\rho_0)/q_H\rho_0 J_n(q_H\rho_0)$ и $\varepsilon_{\parallel} J'_n(q_E\rho_0)/q_E\rho_0 J_n(q_E\rho_0)$ в Δ_n^H и Δ_n^E в уравнении (2) соответственно приобретают вид $-I'_n(|q_H|\rho_0)/|q_H|\rho_0 I_n(|q_H|\rho_0)$ и $-\varepsilon_{\parallel} I'_n(|q_E|\rho_0)/|q_E|\rho_0 I_n(|q_E|\rho_0)$.

В зависимости от знаков q_H^2 и q_E^2 собственные волны волновода имеют разные виды (см. таблицу). В таблице классификация волн приведена в соответствии с терминологиями работ [16–18].

Отметим, что собственные псевдоповерхностные аксиально-однородные ($q_z = 0$) колебания и псевдоповерхностные симметричные азимутально-однородные ($n = 0$) волны не существуют, так как они являются гибридными. Несуществование собственных волн структуры определяется отсутствием решений дисперсионного уравнения (2). В этом случае соответствующие области частот и волновых чисел формируют запрещенные зоны в спектрах собственных волн структуры.

Численный анализ дисперсионного уравнения

Отметим, что дисперсионное уравнение (2) приведено в безразмерном виде, что подчеркивает его универсальность. При этом безразмерность собственных частот волновода обеспечивается их нормированием на характеристическую частоту $\omega_0 = c/\rho_0$, учитывающую идентичность цилиндрической конфигурации волновода.

Нами был исследован цилиндрический твердотельный волновод с характеристической частотой $\omega_0 = 6 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, что соответствует радиусу $\rho_0 = 0.5 \text{ см}$. В качестве материала волновода были использованы искусственные среды с параметрами: $\varepsilon_0 = 2$, $\omega_L/\omega_0 = 3.5$, $\omega_r/\omega_0 = 4$, $\omega_s = 0$ или $\omega_s/\omega_0 = 6$.

На рис. 1 приведены дисперсионные зависимости собственных симметричных ($n = 0$) и гибридных ($n \neq 0$) мод твердотельного цилиндра из искусственного материала, в котором собственная частота осцилляторов в продольном направлении $\omega_s = 0$, представляющие решения уравнения (2). Линии 1 соответствуют частотам и продольным волновым числам, при которых поперечные волновые числа q_H обращаются в нуль. Прямая 2 представляет световую линию в вакууме $\omega/\omega_0 = q_z\rho_0$, что соответствует $q = 0$. Для нас представляет интерес область частот и продольных волновых чисел собственных волн волновода, в которой $q^2 < 0$. Прямые 3 и 4 отображают частоты ω_{\parallel} и ω_{\perp} , на которых $\varepsilon_{\parallel}(\omega)$ и $\varepsilon_{\perp}(\omega)$ равны нулю соответственно. Прямая 5 соответствует нормированной собственной частоте осцилляторов ω_r/ω_0 искусственного материала в перпендикулярном направлении к оси симметрии цилиндра. Линии 6 и 7 представляют спектры собственных объемно-поверхностных волн E -типа, у которых квадраты поперечных волновых чисел $q_E^2 > 0$ и $q_H^2 < 0$: симметричных $E_{0\ 2-}$ и $E_{0\ 3-}$ (рис. 1, *a*) и гибридных $HE_{1\ 1-}$ и $HE_{1\ 2-}$ (рис. 1, *b*) волн соответственно. Отметим, что в диапазоне частот $\omega < \omega_{\parallel}$ частоты собственных мод волновода ω_{ns} с ростом радиального индекса уменьшаются. При $\omega_{ns} \rightarrow +0$ (сверху) плотность дисперсионных ветвей увеличивается. Штриховые дисперсионные ветви 8 соответствуют волнам E -типа: поверхностным симметричным E -волнам, у которых $q_E^2 < 0$ (рис. 1, *a*), и псевдоповерхностным гибридным $HE_{1\ 1-}$ -волнам, у которых $q_E^2 < 0$ и $q_H^2 > 0$ (рис. 1, *b*). При этом компоненты тензора диэлектрической проницаемости цилиндра $\varepsilon_{\parallel}(\omega) < 0$ и $\varepsilon_{\perp}(\omega) > 0$. Ветвь поверхностных E -волн непрерывно переходит в ветвь объемно-поверхностных $E_{0\ 1-}$ -волн, у которых $q_E^2 > 0$,

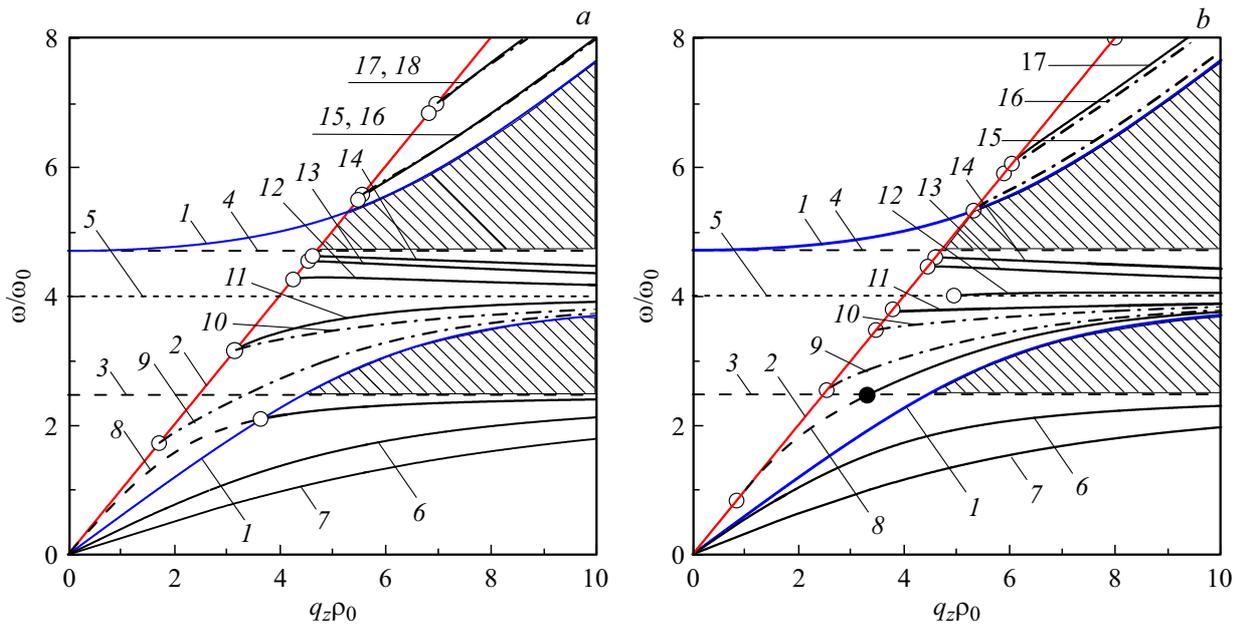


Рис. 1. Дисперсионные зависимости собственных симметричных (а) и гибридных (б) мод анизотропного твердотельного цилиндра, в котором частота собственных осцилляторов в продольном направлении $\omega_s = 0$.

а ветвь псевдоповерхностных HE_{11} -волн — в ветвь объемно-поверхностных HE_{11} -волн, у которых $q_E^2 > 0$ и $q_H^2 > 0$, поскольку в соответствующей области частот $\varepsilon_{\parallel}(\omega) > 0$. Штрихпунктирные линии 9 и 10 отображают дисперсионные зависимости объемно-поверхностных волн H -типа: симметричных H_{01} и H_{02} соответственно на рис. 1,а и гибридных EH_{11} и EH_{12} на рис. 1,б. Сплошные линии 11 соответствуют объемно-поверхностным волнам E -типа: симметричным E_{01} на рис. 1,а и гибридным HE_{11} модам на рис. 1,б. Отметим, что в диапазоне частот $\omega_{\parallel} < \omega < \omega_r$ плотность дисперсионных зависимостей собственных мод H -типа с ростом радиального индекса s увеличивается при $\omega_{ns} \rightarrow \omega_r - 0$ (снизу). При этом волновое число q_H , входящее в аргумент функции Бесселя $J_0(q_H\rho)$ в дисперсионном уравнении $\Delta_0^H = 0$, изменяется от конечного значения q_H при $\omega = \omega_{\parallel}$ до $q_H \rightarrow \infty$ при $\omega = \omega_r$. В этом же частотном диапазоне число собственных мод E -типа остается конечным. Это связано с тем, что поперечное волновое число q_E , входящее в аргумент функции Бесселя $J_0(q_E\rho_0)$ в дисперсионном уравнении $\Delta_0^E = 0$, изменяется от $q_E = 0$ при $\omega = \omega_{\parallel}$ до $q_E = \omega_r \sqrt{\varepsilon_{\parallel}(\omega_r)}/c$ при $\omega = \omega_r$. Линии 12–14 представляют спектры объемно-поверхностных симметричных E_{0s} - (рис. 1,а) и гибридных HE_{1s} - (рис. 1,б) мод с $s = 1-3$ в диапазоне $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$. В этом частотном диапазоне плотность дисперсионных кривых волновода также увеличивается с ростом радиального индекса s собственных мод при приближении их частот ω_{ns} к частоте ω_{\perp} снизу. Кривые 15–18 на рис. 1,а отображают дисперсионные зависимости объемно-поверхностных E_{01} -, H_{01} -, E_{02} - и H_{02} -волн соответственно, причем сплошные линии для волн E -типа, а штрихпунктирные — для H -типа. На рис. 1,б дисперсионные зависимости 15–17

соответствуют объемно-поверхностным EH_{11} -, EH_{12} - и HE_{11} -волнам соответственно в порядке роста частот ω_{ns} . Пустыми кружками показаны точки начала (окончания) спектров соответствующих волн. Значения ω/ω_0 и $q_z\rho_0$ в этих точках, вообще говоря, не удовлетворяют дисперсионному уравнению (2).

Из рис. 1 видно, что в диапазоне частот $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$ собственные объемно-поверхностные волны E -типа твердотельного цилиндра (кривые 12–14) обладают аномальной дисперсией, а их дисперсионные зависимости при $q_z\rho_0 \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к прямой $\omega/\omega_0 = \omega_r/\omega_0 + 0$ (сверху). Отметим, что в частотных диапазонах $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$ и $\omega < \omega_{\parallel}$ в исследуемом волноводе не существуют собственные симметричные волны H -типа, поскольку уравнение $\Delta_0^H = 0$ не имеет решений. Собственные параметры волновода с симметричными E_{0s} -волнами определяются решениями дисперсионного уравнения $\Delta_0^E = 0$. Вне частотного диапазона $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$ собственные волны волновода обладают нормальной дисперсией. В диапазоне $\omega_{\parallel} < \omega < \omega_r$ при $q_z\rho_0 \rightarrow \infty$ дисперсионные кривые собственных объемно-поверхностных волн асимптотически приближаются к прямой $\omega/\omega_0 = \omega_r/\omega_0 - 0$ (снизу), а в диапазоне $\omega < \omega_{\parallel}$ — к прямой $\omega/\omega_0 = \omega_{\parallel}/\omega_0 - 0$ (снизу). Отметим, что в диапазоне $\omega < \omega_{\parallel}$ существуют поверхностные, псевдоповерхностные и объемно-поверхностные волны одной частоты, отличающиеся волновыми числами. Подобное существование поверхностных и объемно-поверхностных волн одной частоты было обнаружено ранее в левосторонних средах [19,20].

На рис. 2 приведены спектры собственных симметричных ($n = 0$) и гибридных ($n \neq 0$) мод цилиндра из искусственного материала, в котором нормированная

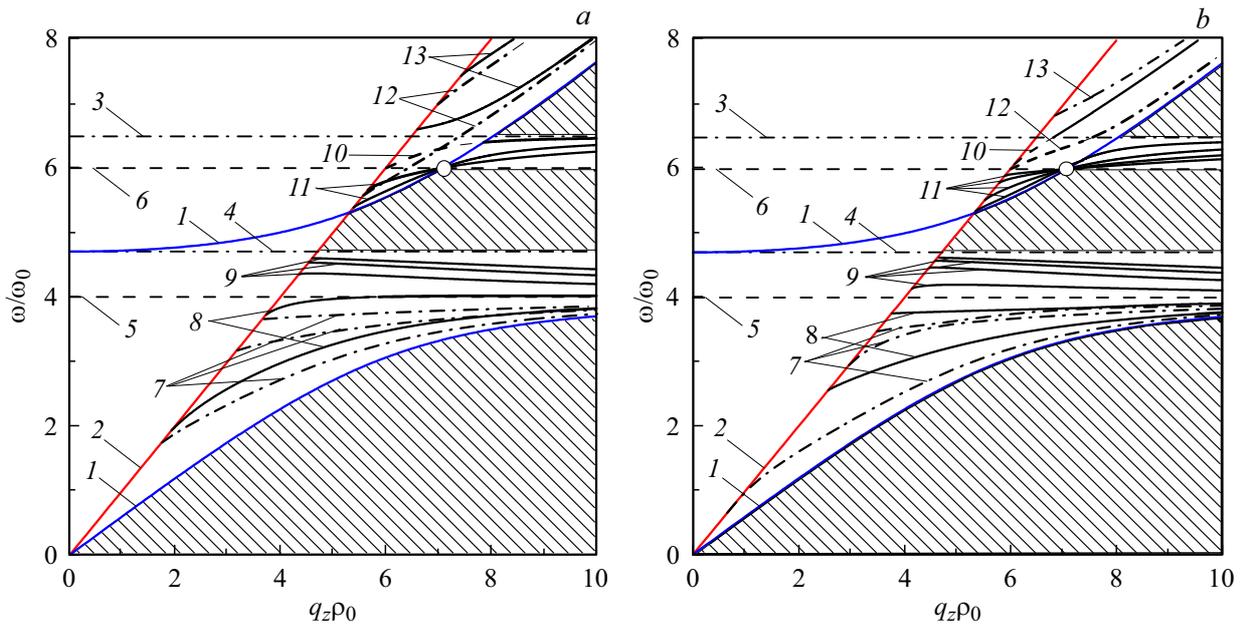


Рис. 2. Дисперсионные зависимости собственных симметричных (а) и гибридных (б) мод цилиндра из материала, в котором собственная частота осцилляторов $\omega_s = 6\omega_0$.

собственная частота осцилляторов в продольном направлении $\omega_s/\omega_0 = 6$. Линии 1–5 идентичны линиям на рис. 1. Как и ранее, сосредоточим внимание на области частот и продольных волновых чисел собственных волн волновода, в которой $q^2 < 0$. Прямая 6 соответствует нормированной собственной частоте осцилляторов ω_s/ω_0 искусственного материала вдоль оси симметрии цилиндра. Линии 7 и 8 представляют спектры объемно-поверхностных волн H - и E -типов, у которых квадраты поперечных волновых чисел $q_E^2 > 0$ и $q_H^2 > 0$: симметричных H_{01-} , E_{01-} , H_{02-} , H_{03-} и E_{02-} (рис. 2, а) и гибридных EH_{11-} , HE_{11-} , EH_{12-} , EH_{13-} и HE_{12-} (рис. 2, б) волн, соответственно расположенных в порядке роста частот ω_{ns} . Отметим, что в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_r$ плотность дисперсионных зависимостей собственных мод H -типа с ростом радиального индекса увеличивается при $\omega_{ns} \rightarrow \omega_r - 0$ (снизу). При этом волновое число q_H , входящее в аргумент функции Бесселя $J_0(q_H\rho_0)$ в дисперсионном уравнении $\Delta_0^H = 0$, изменяется от $q_H = 0$ при $\omega = 0$ и $q_z = 0$ до $q_H \rightarrow \infty$ при $\omega = \omega_r$. В этом же частотном диапазоне число собственных мод E -типа остается конечным. Это связано с тем, что поперечное волновое число q_E , входящее в аргумент функции Бесселя $J_0(q_E\rho_0)$ в дисперсионном уравнении $\Delta_0^E = 0$, изменяется от $q_E = 0$ при $\omega = 0$ и $q_z = 0$ до $q_E = \omega_r \sqrt{\varepsilon_{\parallel}(\omega_r)}/c$ при $\omega = \omega_r$. Кривые 9 отображают дисперсионные зависимости объемно-поверхностных симметричных E_{0s-} (рис. 2, а) и гибридных HE_{1s-} (рис. 2, б) мод с $s = 3-6$ в диапазоне $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$. При этом плотность дисперсионных кривых собственных мод волновода увеличивается с ростом s при приближении их частот ω_{ns} к частоте ω_{\perp} снизу. Штриховые участки дисперсионных ветвей 10 в частотном диапазоне $\omega_s < \omega < \omega_{\parallel}$ соответствуют по-

верхностным симметричным волнам E -типа на рис. 2, а и псевдоповерхностным гибридным HE_{11} -волнам на рис. 2, б, у которых $q_E^2 < 0$ и $q_H^2 > 0$. При этом компоненты тензора диэлектрической проницаемости цилиндра $\varepsilon_{\parallel}(\omega) < 0$ и $\varepsilon_{\perp}(\omega) > 0$. Ветвь поверхностных волн переходит с разрывом на зависимости $q_H = 0$ в ветвь объемно-поверхностных E_{01} -волн, у которых $q_E^2 > 0$. В свою очередь, ветвь псевдоповерхностных HE_{11} -волн переходит непрерывно в ветвь объемно-поверхностных HE_{11} -волн в диапазоне $\omega > \omega_{\parallel}$. Линии 11 представляют спектры объемно-поверхностных симметричных E_{0s-} (рис. 2, а) и гибридных HE_{1s-} (рис. 2, б) мод. В диапазоне $\omega_{\perp} < \omega < \omega_s$ E_{01-} и HE_{11} -моды имеют наименьшие значения частот, а в диапазоне $\omega_s < \omega < \omega_{\parallel}$ E_{02-} и HE_{11} -моды — наибольшие. При этом в диапазоне $\omega_{\perp} < \omega < \omega_s$ плотность дисперсионных кривых собственных мод волновода увеличивается с ростом s при $\omega_{ns} \rightarrow \omega_s - 0$, когда $\varepsilon_{\parallel}(\omega) \rightarrow +\infty$, а в диапазоне $\omega_s < \omega < \omega_{\parallel}$ при $\omega_{ns} \rightarrow \omega_s + 0$, когда $\varepsilon_{\parallel}(\omega) \rightarrow -\infty$. Переход дисперсионных ветвей из одного частотного диапазона в другой осуществляется через нулевую запрещенную зону (точка пересечения ветвей и зависимости $q_H = 0$ на рис. 2) [21]. При переходе ветвей симметричных мод осуществляется трансформация радиальных индексов с увеличением на единицу в направлении роста частот ω_{0s} . Семейства дисперсионных кривых 12 на рис. 2, а отображают спектры собственных объемно-поверхностных симметричных H_{0s} -волн с $s = 1, 2$ в порядке роста частот ω_{0s} . Дисперсионная ветвь 12 на рис. 2, б в частотном диапазоне $\omega_s < \omega < \omega_{\parallel}$ соответствует псевдоповерхностным (штриховая линия), а в диапазоне $\omega > \omega_{\parallel}$ — объемно-поверхностным (штрихпунктирная линия) гибридным EH_{11} -волнам. Непрерывный переход ветви из одного частотного диапазона

в другой осуществляется с трансформацией псевдоповерхностных волн в объемно-поверхностные волны на частоте ω_{\parallel} , на которой $\varepsilon_{\parallel} = 0$. Линии 13 представляют дисперсионные зависимости объемно-поверхностных симметричных E_{0s} -волн ($s = 1, 2$ в порядке роста частот ω_{0s}) на рис. 2, а и гибридных EH_1 2-волн на рис. 2, б.

Из рис. 2 видно, что в диапазоне частот $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$ объемно-поверхностные волны E -типа (кривые 9) обладают отрицательными групповыми скоростями, а их дисперсионные зависимости при $q_z \rho_0 \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к прямой $\omega/\omega_0 = \omega_r/\omega_0 + 0$. В этом частотном диапазоне в цилиндре не существуют собственные H_{0s} -волны, поскольку уравнение $\Delta_0^H = 0$ не имеет решений. Частоты и продольные волновые числа симметричных E_{0s} -волн определяются решениями дисперсионного уравнения $\Delta_0^E = 0$. Вне диапазона $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$ собственные волны волновода обладают положительными групповыми скоростями. В диапазоне $\omega < \omega_r$ при $q_z \rho_0 \rightarrow \infty$ дисперсионные кривые собственных объемно-поверхностных волн асимптотически приближаются к прямой $\omega/\omega_0 = \omega_r/\omega_0 - 0$, а в диапазоне $\omega_s < \omega < \omega_{\parallel}$ — к прямой $\omega/\omega_0 = \omega_{\parallel}/\omega_0 - 0$. Отметим, что в диапазоне $\omega_s < \omega < \omega_{\parallel}$ существуют поверхностные, псевдоповерхностные и объемно-поверхностные волны одной частоты, отличающиеся волновыми числами.

Заштрихованные зоны на рис. 1 и 2 отображают области частот и волновых чисел, с которыми в исследуемых волноводах собственные волны не существуют (запрещенные зоны). В этих зонах соответствующие дисперсионные уравнения (2) не имеют решений.

Качественное поведение дисперсионных кривых анизотропного цилиндра с собственными модами, имеющими азимутальные индексы $n > 1$, аналогично дисперсионным зависимостям мод с $n = 1$.

Отметим, что на практике, когда материал цилиндра обладает потерями, в волноводе, как правило, проявляются собственные моды с радиальными индексами $s = 1, 2$, а остальные затухают [10,22]. В действительности слабое затухание собственных мод волновода обеспечивается сосредоточением их полей вблизи цилиндрической поверхности волновода. Такими свойствами обладают моды с азимутальными индексами $n \gg 1$, например, „шепчущей галереи“ в квазиоптических структурах [10].

Собственные объемно-поверхностные волны E -типа исследуемых цилиндрических волноводов в диапазонах $\omega_r < \omega < \omega_{\perp}$ обладают отрицательными групповыми скоростями, что способствует возникновению абсолютной неустойчивости при их возбуждении цилиндрическим трубчатым электронным пучком [2]. Эти волны существуют в анизотропном волноводе с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{\parallel} > 0$ и $\varepsilon_{\perp} < 0$, что обеспечивает $q_E^2 > 0$ и $q_H^2 < 0$.

Заключение

В работе теоретически изучены свойства собственных волн анизотропного цилиндрического твердотельного

волновода, изготовленного из материала, у которого компоненты тензора диэлектрической проницаемости обладают частотной дисперсией. Приведена классификация собственных волн волновода, расположенного в вакууме. Определены спектры собственных симметричных и гибридных мод цилиндров из анизотропных искусственных материалов. Обнаружены объемно-поверхностные волны E -типа, которые в некотором частотном диапазоне обладают отрицательными групповыми скоростями. Показано, что существование таких волн обусловлено анизотропными свойствами волновода, у которого диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{\perp} < 0$ и $\varepsilon_{\parallel} > 0$, что однозначно обеспечивает $q_H^2 < 0$ и $q_E^2 > 0$. При возбуждении волн с отрицательными групповыми скоростями электронным потоком в системе возможно возникновение абсолютной неустойчивости [2]. Показано существование в цилиндрическом твердотельном волноводе собственных поверхностных симметричных волн E -типа и псевдоповерхностных гибридных волн E - и H -типов. Установлены области частот, в которых одновременно существуют поверхностные, псевдоповерхностные и объемно-поверхностные волны одной частоты, отличающиеся волновыми числами. Отмечены области частот и волновых чисел, в которых в исследуемых волноводах собственные волны не существуют (запрещенные зоны).

Список литературы

- [1] Дормидонтов А.В., Кириченко А.Я., Лонин Ю.Ф., Пономарев А.Г., Прокопенко Ю.В., Сотников Г.В., Уваров В.Т., Филиппов Ю.Ф. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 2. С. 65–73.
- [2] Аверков Ю.О., Прокопенко Ю.В., Яковенко В.М. // Радиоп физика и электроника. 2016. Т. 7 (21). Вып. 2. С. 28–35.
- [3] Аверков Ю.О., Прокопенко Ю.В., Яковенко В.М. // Радиоп физика и электроника. 2016. Т. 7 (21). Вып. 4. С. 68–76.
- [4] Силин Р.А., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М.: Госатомиздат, 1961. 244 с.
- [5] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
- [6] Пафолов В.Е. // Труды Физического ин-та им. Лебедева. 1961. Т. 16. С. 94–139.
- [7] Силин Р.А. // УФН. 2006. Т. 175. № 5. С. 562–565.
- [8] Дмитрук Н.Л., Литовченко В.Г., Стрижевский В.Л. Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках. Киев: Наук. думка, 1989. 376 с.
- [9] Коломенский А. // Доклады АН СССР. 1952. Т. 86. № 6. С. 1097–1099.
- [10] Кириченко А.Я., Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф., Черпак Н.Т. Квазиоптические твердотельные резонаторы. Киев: Наук. думка, 2008. 286 с.
- [11] Akay M.F., Prokopenko Yu., Kharkovsky S. // Microw. Optic. Technol. Lett. 2004. Vol. 40. N 2. P. 96–101.
- [12] Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и таблицами / Под. ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

- [13] Ильченко М.Е., Взятыйшев В.Ф., Гассанов Л.Г. и др. Диэлектрические резонаторы / Под ред. М.Е. Ильченко. М.: Радио и связь, 1989. 328 с.
- [14] Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 79–84.
- [15] Дормидонтов А.В., Прокопенко Ю.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56. Вып. 6. С. 428–442.
- [16] Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 544 с.
- [17] Бразис Р.С. // Литовский физический сборник. 1981. Т. 21. № 4. С. 73–117.
- [18] Белецкий Н.Н., Светличный В.М., Халамейда Д.Д., Яковенко В.М. Электромагнитные явления СВЧ в неоднородных полупроводниковых структурах. Киев: Наук. думка, 1991. 215 с.
- [19] Ruppin R. // J. Phys.: Conden. Matter. 2001. Vol. 13. N 9. P. 1811–1819.
- [20] Averkov Yu.O., Yakovenko V.M. // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 72. N 20. P. 205110.
- [21] Виноградов А.П., Дорофеев А.В., Мерзликин А.М., Лисянский А.А. // УФН. 2010. Т. 180. Вып. 3. С. 249–263.
- [22] Barannik A., Cherpak N., Kirichenko A., Prokopenko Yu., Vitusevich S., Yakovenko V. // Intern. J. Microw. Wireless Technol. 2017. Vol. 9. N 4. P. 781–796.