

Кинематические связи для сборки и раскрытия составных космических зеркал и аналогии из классической оптики

© В.И. Буякас

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119333 Москва, Россия
e-mail: bujakas@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 8 ноября 2017 г.)

Для решения задач экспериментальной физики Кельвином и Максвеллом были предложены приспособления, обеспечивающие высокую точность и повторяемость установки оптических элементов на оптической скамье. Эти удивительные простые устройства получили в англоязычной литературе название *kinematic couplings* и используются на протяжении многих лет в различных научных и прикладных исследованиях. Рассмотрена возможность создания на основе идеи, положенной в основу таких устройств, механических самоустанавливающихся замков для сборки и автоматического раскрытия твердотельных составных зеркал космических телескопов. Приведены результаты кинематического анализа и физического моделирования предлагаемых устройств.

DOI: 10.21883/JTF.2018.11.46633.2547

Введение

Во многих физических и технологических задачах необходимо добиться того, чтобы без дополнительного регулирования сложная механическая система после разборки и повторной сборки возвращалась в исходное состояние с высокой степенью точности в силу своих конструктивных свойств. Подобные задачи, в частности, постоянно возникают при разработке составных зеркал для космических телескопов. Однако аналогичные задачи возникают и в оптике при сборке и регулировании различных систем на оптической скамье, где они рассматривались еще Максвеллом и Кельвином. В этих классических работах [1] были предложены приспособления, обеспечивающие высокую точность и высокую повторяемость установки оптических элементов — линз, зеркал, призм, фотопластинок — на оптической скамье. Позднее этот метод объединения элементов конструкции получил в англоязычной литературе название *kinematic couplings* (см., например, в Википедии https://en.wikipedia.org/wiki/Kinematic_coupling). Приспособления модернизировались, дорабатывались и использовались для решения различных научных и прикладных задач. Последние десятилетия эти устройства нашли применение в нанотехнологиях. Здесь при высококачественном изготовлении элементов приспособления удается обеспечить микронный и субмикронный уровни точности и повторяемости сборки элементов конструкции [2–6].

Цель настоящей работы — показать, что эти конструкции лабораторной оптики (при некоторой естественной модификации) оказываются полезными для задач конструирования составных зеркал больших космических телескопов. Такая неочевидная связь классической оптики и механики космических конструкций кажется нам достойной обсуждения и изучения.

Мы будем называть такие соединения кинематическими связями и исследуем возможность создания на их основе механических самоустанавливающихся замков для космических приложений. Замки могут найти применение, например, для решения задач сборки или автоматического раскрытия больших составных зеркальных антенн [7–10] (см. также электронные ресурсы www.jwst.nasa.gov, <http://safir.jpl.nasa.gov>, <http://www.asc.rssi.ru/millimetron>).

Основу кинематической связи в версии Максвелла составляют три V-образных паза (рис. 1, *a*), размещаемых на одном из соединяемых элементов (основании) и три шаровых опоры, связанные с треногой — вторым соединяемым элементом (рис. 1, *b*). В рабочем состоянии шаровые опоры находятся на дне пазов и удерживаются в этом положении силой тяжести (рис. 1, *c, d*).

Три особенности приспособления обеспечивают ему важные механические свойства.

Во-первых, рабочее положение устройства является равновесным состоянием конструкции. При малых смещениях треноги возникает усилие, возвращающее устройство в равновесное рабочее состояние.

Во-вторых, состояние равновесия единственно, что обеспечивает высокую повторяемость установки треноги на основание.

Наконец, в-третьих, в равновесном состоянии конструкция оказывается статически определимой, что гарантирует ненапряженную сборку приспособления. Действительно, каждая шаровая опора, удерживаемая на дне V-образного паза, вносит в конструкцию два кинематических ограничения. В невырожденном случае общее число кинематических ограничений в конструкции равно шести, что гарантирует ее статическую определимость. Невырожденность системы достигается выбором направлений V-образных пазов.

С точки зрения механических свойств связей, естественно различать следующие случаи. Связка может

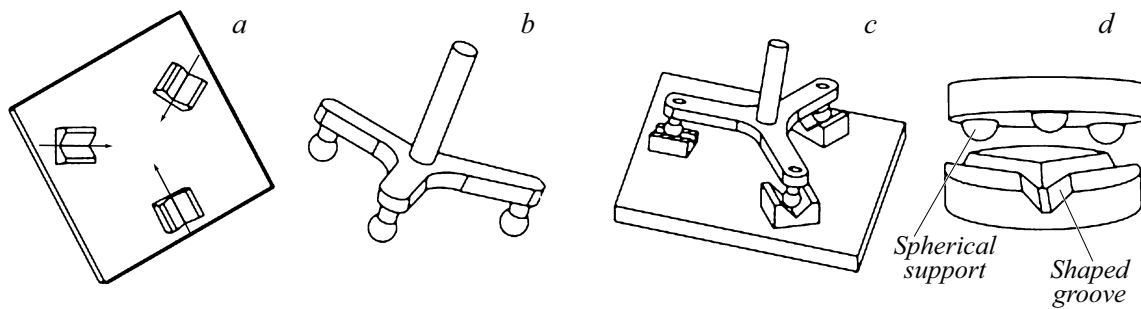


Рис. 1. Кинематическая связка: *a* — V-образные пазы на несущем основании, *b* — три шаровых опоры, связанные с треногой, *c* — кинематическая связка в сборе, *d* — современная кинематическая связка оптического качества.

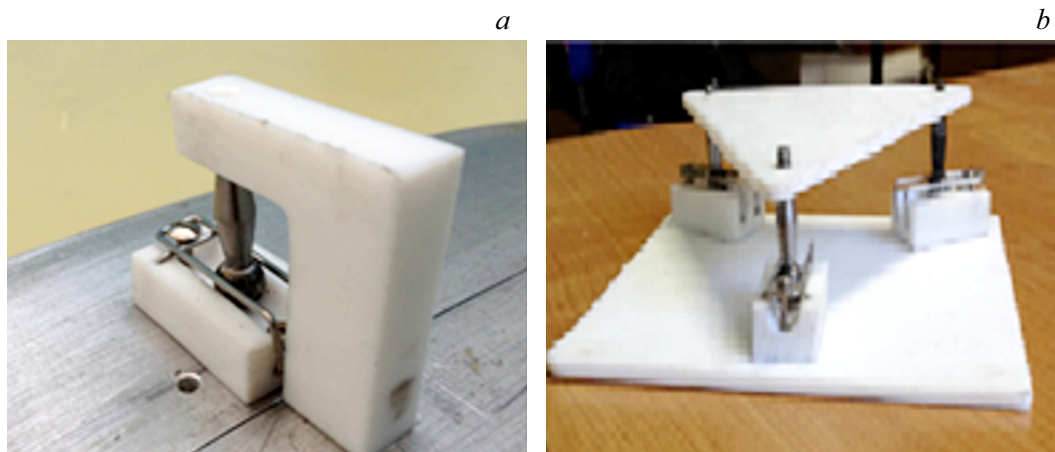


Рис. 2. Физическая модель 2D-кинематической связки: *a* — пружинный захват сферической опоры, *b* — кинематическая связка с пружинными захватами в сборе.

находиться в равновесном состоянии и в состоянии, смещенном относительно состояния равновесия (неравновесная связка). Если равновесное состояние единственно, то конструкция геометрически неизменяемая. Изменяемые связки могут быть мгновенно изменяемыми, т.е. допускающими бесконечно малые смещения относительно состояния равновесия, но могут допускать изменения не малые, а конечной величины. В последнем случае связка превращается в механизм.

С прикладной точки зрения наибольший интерес представляют неизменяемые связки, поскольку в этом случае связка обладает самоустанавливающимся свойством, т.е. самопроизвольно возвращается в положение равновесия, которое и является желательным при ее применении. Именно это свойство использовали Кельвин и Максвелл при конструировании и последующей юстировке оптических систем.

1. 2D-кинематические связки для работы в условиях невесомости

Исследование кинематических связок естественно начать с того случая, когда все V-образные пазы лежат

в одной плоскости. Мы будем называть такие связки двумерными (2D-связками).

1.1. Физическая модель 2D-связки

Для того чтобы использовать идею классической кинематической связки для сборки составных космических конструкций, необходимо преодолеть две трудности.

Во-первых, необходимо предложить способ удержания шаровых опор на дне V-образных пазов в условиях невесомости. В классической связке опоры удерживаются на дне пазов силой тяжести. В новых условиях нужно сохранить кинематику связей и направление удерживающих усилий в равновесном состоянии. С этой целью была предложена конструкция и изготовлена физическая модель пружинного захвата, представленного на рис. 2, *a*. Здесь с одной стороны сохранены четыре степени свободы во взаимном перемещении соединяемых элементов, с другой — удерживающее усилие направлено по нормали к основанию паза. На рис. 2, *b* представлена физическая модель 2D-кинематической связки с пружинными захватами для работы в условиях невесомости в сборе. Мы использовали физическую модель пружинного захвата, предложенную и изготовленную А.Ю. Тондриком (ФИАН).

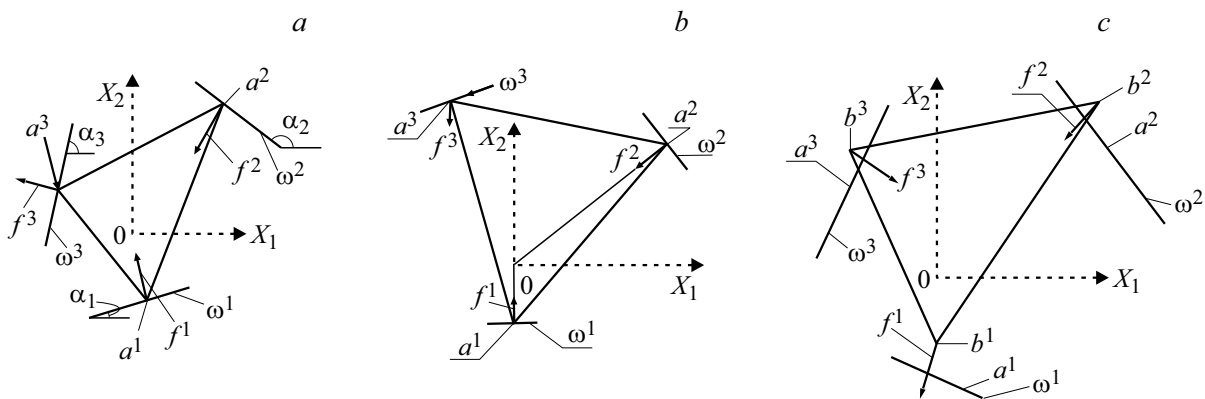


Рис. 3. Равновесные (a, b) и неравновесное (c) положения 2D-кинематических связей.

Во-вторых, необходимо выяснить при каких взаимных положениях пазов конструкция сохраняет самоустанавливающиеся свойства. В классической кинематической связке, использующей схему Максвелла, V-образные пазы расположены на плоскости симметрично относительно центра связки. Наша цель — соединить между собой твердотельные зеркала с помощью кинематических связей, сохранив свойство повторяемости сборки. При произвольной форме соединяемых зеркал сохранить классическое положение V-образных пазов кинематической связке не удастся, пазы и шаровые опоры приходится размещать по боковым сторонам соединяемых элементов на значительном расстоянии друг от друга. Возникает вопрос, при каком взаимном положении пазов сохраняются самоустанавливающиеся свойства конструкции. Для ответа на этот вопрос построим математическую модель, описывающую работу 2D-связки при произвольном расположении V-образных пазов.

1.2. Математическая модель равновесного состояния 2D-связки

Рассмотрим на плоскости OX_1X_2 три отрезка $\omega^1, \omega^2, \omega^3$, взаимное положение которых совпадает с взаимным положением оснований V-образных пазов 2D-связки (рис. 3, a). Назовем эти отрезки направляющими. Треугольник $a^1a^2a^3$ моделирует положение треноги связки, его вершины в равновесном состоянии удерживаются механическими связями на направляющих.

Пусть α_i — угол между направляющей ω^i и осью OX_1 , n — вектор нормали к ω^i , f^i — вектор реакции связей (направлен по нормали к ω^i), f_i — численное значение реакции связей. Тогда

$$f^i = (-f_i \sin \alpha_i, f_i \cos \alpha_i) = f_i n^i, \\ n^i = (-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Условия равновесия — сумма проекций сил на оси OX_1, OX_2 и сумма моментов сил относительно начала координат — имеют вид

$$-f_1 \sin \alpha_1 - f_2 \sin \alpha_2 - f_3 \sin \alpha_3 = F_1,$$

$$f_1 \cos \alpha_1 + f_2 \cos \alpha_2 + f_3 \cos \alpha_3 = F_2, \quad (1) \\ [a^1 \cdot f^1] + [a^2 \cdot f^2] + [a^3 \cdot f^3] \\ = f_1 [a^1 \cdot n^1] + f_2 [a^2 \cdot n^2] + f_3 [a^3 \cdot n^3] = M.$$

Здесь векторные произведения определяют моменты сил реакций связей f^1, f^2, f^3 относительно начала координат, F_1 и F_2 — проекции суммы внешних сил на оси OX_1, OX_2 соответственно, M — сумма моментов внешних сил относительно начала координат.

Перепишем систему (1) в матричном виде

$$A \cdot f = F, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ [a^1 \cdot n^1] & [a^2 \cdot n^2] & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix}, \\ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M \end{pmatrix}.$$

Здесь A — матрица равновесия. Система (2) не вырождена — геометрически неизменяема, т.е. имеет единственное решение, если определитель матрицы равновесия A отличен от нуля. В невырожденном случае связка обладает самоустанавливающимися свойствами.

Для выяснения условий вырождения конструкции введем систему координат, в которой ось OX_1 параллельна ω^1 , а начало координат совпадает с точкой пересечения нормалей к ω^1 и ω^2 в точках a^1 и a^2 (рис. 3, a). В новой системе координат матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ 1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ 0 & 0 & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\det A = \sin \alpha_2 [a^3 \cdot n^3].$$

Поэтому, если

$$[a^3 \cdot n^3] \neq 0 \quad \text{и} \quad \sin \alpha_2 \neq 0,$$

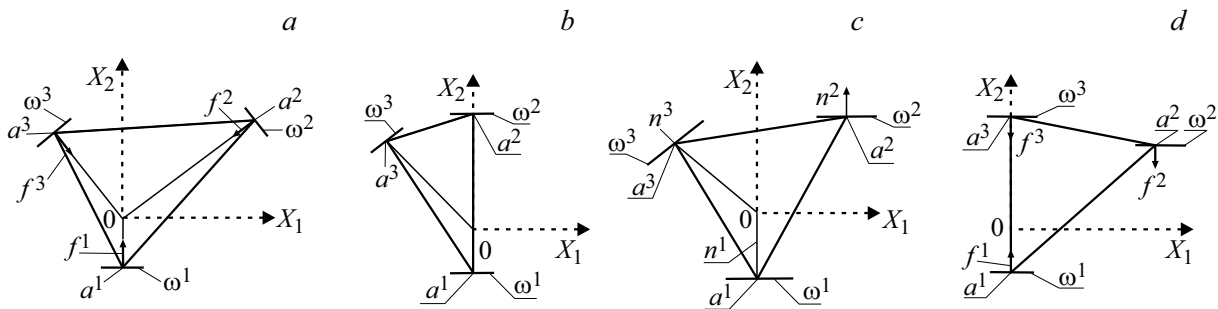


Рис. 4. Вырожденные состояния связи: *a* — вырожденное состояние 1, *b* — вырожденное состояние 2.1, *c* — вырожденное состояние 2.2, *d* — вырожденное состояние 3 (конструкция превращается в механизм).

то конструкция геометрически неизменяема, состояние равновесия единственное, и кинематическая связь действительно обладает самоустанавливающимися свойствами.

1.3. Вырожденные конструкции

Перейдем теперь к вырожденным конструкциям, которые являются, по крайней мере, мгновенно изменяемыми. Рассмотрим возможные случаи вырождения. На практике проверку невырожденности удобно проводить, убеждаясь, что исследуемая система не принадлежит ни одному из указанных ниже типов.

1. $[a^3 \cdot n^3] = 0$, нормали n^1, n^2, n^3 пересекаются в одной точке, конструкция мгновенно изменяема и допускает бесконечно малое вращение (рис. 4, *a*) вокруг точки пересечения нормалей.

2. $\sin \alpha_2 = 0$, направляющие параллельны. Возможны два случая :

2.1. Нормали n^1, n^2 лежат на одной прямой (рис. 4, *b*). Конструкция вырождена, мгновенно изменяема, возможно бесконечно малое вращение вокруг точки пересечения нормалей.

2.2. Нормали n^1, n^2 не лежат на одной прямой. Введем систему координат, в которой ось OX_1 параллельна ω^1 и ω^2 , а наляющчало координат совпадает с точкой пересечения нормалей ω^1 и ω^3 (рис. 4, *c*). Тогда матрица A принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ [a^1 \cdot n^1] & [a^2 \cdot n^2] & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha_3 \\ 1 & 1 & \cos \alpha_3 \\ 0 & [a^2 \cdot n^2] & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\det A = -\sin \alpha_3 [a^2 \cdot n^2] \neq 0.$$

Конструкция геометрически неизменяема.

3. Линии $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ параллельны (рис. 4, *d*). Матрица A системы (1) принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ [a^1 \cdot n^1] & [a^2 \cdot n^2] & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ [a^1 \cdot n^1] & [a^2 \cdot n^2] & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\det A = 0.$$

Конструкция вырождена — возможно движение треугольника вдоль направляющих. Проиллюстрируем использование рассмотренных представлений на конкретном примере. В классических работах Максвелла *V*-образные пазы находятся в одной плоскости симметрично относительно центра связи. Во многих случаях необходимо отказаться от такого симметричного размещения элементов конструкции, не теряя самоустанавливающего свойства. На рис. 5 представлена физическая модель двух твердотельных поверхностей, объединенных кинематической связкой с разнесенными *V*-образными пазами. Конструкция оснащена пружинными захватами шаровых опор. Непосредственно вычисляя определитель матрицы равновесия, убеждаемся, что при выбранном положении *V*-образных пазов он отличен от нуля. Это же обнаруживается и в физическом эксперименте — конструкция является жесткой. Итак, предлагаемая конструкция геометрически неизменяема и обладает высокой повторяемостью сборки.

1.4. Математическая модель неравновесного состояния связи и оптимизация жесткости

Из построенной математической модели следует, что при произвольном размещении *V*-образных пазов конструкция, как правило, обладает самоустанавливающимися свойствами. Поэтому в классе самоустанавливающихся связок можно сформулировать задачу оптимизации тех или иных характеристик соединения. Мы рас-

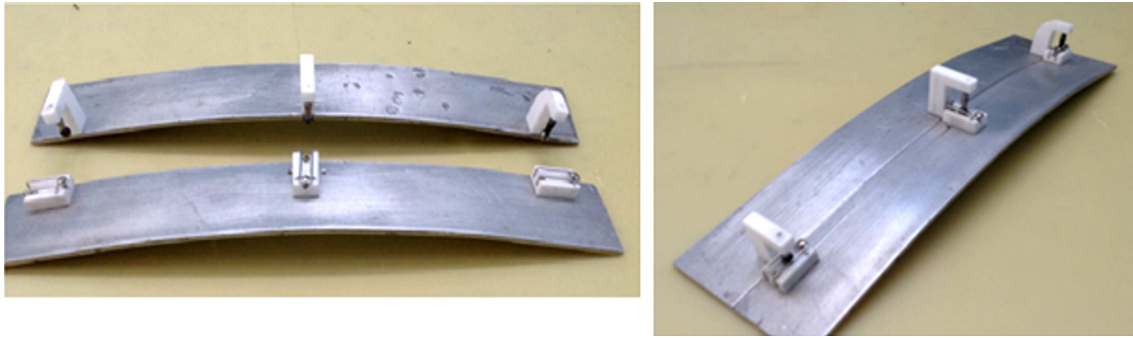


Рис. 5. Две пластины, объединенные кинематической связкой с пружинными захватами.

смотрим задачу оптимизации одного из элементов матрицы жесткости составного зеркала — крутильной жесткости связки.

Для этого построим матрицу жесткости и найдем выражение крутильной жесткости $2D$ -связки как функцию углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направлений V -образных пазов.

Элементы конструкции — треногу, основание и V -образные пазы — будем считать твердыми телами. При „деформации“ конструкции — смещении треноги из равновесного состояния — возникают возвращающие усилия, величины которых определяются пружинными захватами шаровых опор. Возвращающие усилия приложены к вершинам треугольника и направлены по нормальям к направляющим $\omega^1, \omega^2, \omega^3$. Величины усилий пропорциональны расстояниям от вершины до соответствующей линии $\omega^1, \omega^2, \omega^3$.

На рис. 3, *b, c* показаны схемы равновесного и неравновесного положения связки. Построим матрицу жесткости G -системы, связывающую обобщенный вектор F внешних усилий (сил и моментов) с обобщенным вектором d перемещений треугольника (смещений и поворотов):

$$F = G \cdot d, \quad (3)$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_{1.1} & g_{1.2} & g_{1.3} \\ g_{2.1} & g_{2.2} & g_{2.3} \\ g_{3.1} & g_{3.2} & g_{3.3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial M}{\partial x_1} & \frac{\partial M}{\partial x_2} & \frac{\partial M}{\partial \varphi} \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\varphi \end{pmatrix}.$$

Наряду с уравнениями равновесия (1) рассмотрим систему совместности деформаций $2D$ -связки:

$$B \cdot d = s, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & [a^1 \cdot n^1] \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & [a^2 \cdot n^2] \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\varphi \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{pmatrix}.$$

Вектор d определяет малые смещения треугольника (перемещения по координатным осям и поворот), вектор s определяет расстояния от смещенных вершин треугольника до направляющих. Важно отметить, что

$$B = A^*. \quad (5)$$

Считая все пружинные захваты одинаковыми, запишем закон Гука

$$f = k \cdot s, \quad (6)$$

где k — коэффициент упругости. Подставляя (6) в (1), имеем

$$k \cdot A \cdot s = F. \quad (7)$$

Далее, подставляя (4) в (7), получаем

$$k \cdot A \cdot B \cdot d = F. \quad (8)$$

Сравнивая (3) и (8) и учитывая (4), находим выражение для матрицы жесткости связки

$$G = k \cdot A \cdot D = k \cdot A \cdot A^T = \begin{pmatrix} g_{1.1} & g_{1.2} & g_{1.3} \\ g_{2.1} & g_{2.2} & g_{2.3} \\ g_{3.1} & g_{3.2} & g_{3.3} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ [a^1 \cdot n^1] & [a^2 \cdot n^2] & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & [a^1 \cdot n^1] \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & [a^2 \cdot n^2] \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & [a^3 \cdot n^3] \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации крутильной жесткости $2D$ -связки.

Пусть из конструктивных соображений положения центров V -образных пазов определено — вектора a^1, a^2, a^3 заданы. Требуется выбрать направления пазов (углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), при которых крутильная жесткость связки принимает наибольшее значение.

Крутильная жесткость задается элементом $g_{3.3}$ матрицы жесткости (3). Из (9) для $g_{3.3}$ имеем:

$$g_{3.3} = \frac{\partial M}{\partial \varphi} = k([a^1 \cdot n^1]^2 + [a^2 \cdot n^2]^2 + [a^3 \cdot n^3]^2).$$

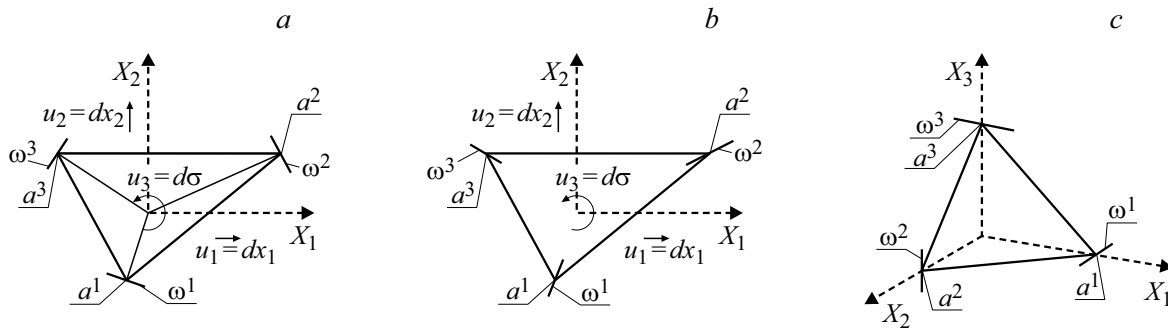


Рис. 6. Экстремальные состояния 2D-кинематической связи и пространственная кинематическая связь, а b — состояние максимальной крутильной жесткости 2D-связки, c — пространственная кинематическая связь.

Введем обозначения:

$$U(\alpha_i) = [a^i \cdot n^i]^2 = (a_1^i \cdot \cos \alpha_1 + a_2^i \cdot \sin \alpha_1)^2, \\ i = 1, 2, 3.$$

Тогда в точках экстремума выполняются условия

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 2(a_1^1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2^1 \cdot \sin \alpha_1) \\ \times (-a_1^1 \cdot \sin \alpha_1 + a_2^1 \cdot \cos \alpha_1) = 0.$$

Отсюда возникают две возможности. Первая из них

$$(a_1^1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2^1 \cdot \sin \alpha_1) = 0 \quad (10)$$

соответствует минимуму крутильной жесткости связи. В этом положении направляющая ортогональна линии (рис. 6, a), конструкция мгновенно изменяема.

Вторая возможность

$$(-a_1^1 \cdot \sin \alpha_1 + a_2^1 \cdot \cos \alpha_1) = 0. \quad (11)$$

Вычислим вторую производную функции $U(\alpha_1)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2} = -2[(a_1^1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2^1 \cdot \sin \alpha_1)^2 \\ + (a_1^1 \cdot \sin \alpha_1 - a_2^1 \cdot \cos \alpha_1)^2].$$

Если выполнено условие (10) и не выполнено условие (9), то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_1^2} = -2[(a_1^1 \cdot \cos \alpha_1 + a_2^1 \cdot \sin \alpha_1)^2] < 0.$$

А именно положение соответствует максимуму крутильной жесткости связи (рис. 6, b), направления и ω^1 совпадают.

2. 3D-кинематические связи

Откажемся теперь от условия двумерности связи. Это необходимо потому, что при соединении поверхностей сложной формы нереально требовать расположения

всех пазов в одной плоскости. Классическая кинематическая связь, использующая V-образные пазы, предполагает размещение пазов на плоском основании. Для соединения криволинейных зеркал необходимо разместить пазы в пространстве и гарантировать самоустанавливающиеся свойства конструкции. К сожалению, в общем трехмерном случае получить пригодные для практического использования аналоги условий, полученных выше для двумерных связей, пока не удастся. Однако это удается сделать для ряда практически важных случаев. Рассмотрим подробно один из них.

Рассмотрим пространственную кинематическую связь, пазы которой расположены согласно рис. 6, c. Эта связь, очевидно, не является двумерной, однако, как мы сейчас покажем, ее исследование можно провести с помощью рассмотренных выше методов исследования двумерных связей. Покажем, что при таком пространственном расположении V-образных пазов конструкция геометрически неизменяема и 3D-связка тоже обладает самоустанавливающимися свойствами. Положения точек a^1, a^2, a^3 и направления V-образных пазов определяются векторами

$$a^1 = (a_1^1, 0, 0), \quad a^2 = (0, a_2^2, 0), \quad a^3 = (0, 0, a_3^3), \\ \omega^1 = (0, 1, 0), \quad \omega^2 = (0, 0, 1), \quad \omega^3 = (1, 0, 0).$$

Уравнения равновесия сил и моментов имеют вид

$$f^1 + f^2 + f^3 = \mathbf{F},$$

$$[a^1 \cdot f^1] + [a^2 \cdot f^2] + [a^3 \cdot f^3] = \mathbf{M}.$$

где f^1, f^2, f^3 — реакции связей в точках a^1, a^2, a^3 , $F^* = (F_1, F_2, F_3)$ — вектор суммы внешних сил, $M^* = (M_1, M_2, M_3)$ — вектор суммы внешних моментов.

При выбранных a^1, a^2, a^3 и $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ для реакций связей имеем

$$f^1 = (f_1^1, 0, f_3^1), \quad f^2 = (f_1^2, f_2^2, 0), \quad f^3 = (0, f_2^3, f_3^3).$$

Здесь 6 неизвестных, которые нужно найти из условий равновесия. Три уравнения находим из условия равновесия сил

$$f_1^1 + f_1^2 = F_1, \quad (1)$$

$$f_2^2 + f_2^3 = F_2, \quad (2)$$

$$f_3^1 + f_3^3 = F_3. \quad (3)$$

Для вычисления моментов используем выражение

$$\begin{aligned} [a \cdot f] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ f_2 & f_3 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ f_1 & f_3 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [a^1 \cdot f^1] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1^1 & 0 & 0 \\ f_1^1 & 0 & f_3^1 \end{vmatrix} = 0 \cdot i - \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 \\ f_1^1 & f_3^1 \end{vmatrix} \cdot j \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ f_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -a_1^1 \cdot f_3^1 \cdot j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a^2 \cdot f^2] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot i - 0 \cdot j \\ &\quad + \begin{vmatrix} 0 & a_2^2 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix} \cdot k = -a_2^2 \cdot f_1^2 \cdot k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a^3 \cdot f^3] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a_3^3 \\ 0 & f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_3^3 \\ f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix} \cdot i - 0 \cdot j + 0 \cdot k = -a_3^3 \cdot f_2^3 \cdot i. \end{aligned}$$

Условия равновесия моментов принимают вид

$$\begin{aligned} [a^1 \cdot f^1] + [a^2 \cdot f^2] + [a^3 \cdot f^3] \\ = -a_3^3 \cdot f_2^3 \cdot i - a_1^1 \cdot f_3^1 \cdot j - a_2^2 \cdot f_1^2 \cdot k = \mathbf{M}. \end{aligned}$$

или в координатном виде

$$-a_3^3 \cdot f_2^3 = M_1, \quad (4)$$

$$-a_1^1 \cdot f_3^1 = M_2, \quad (5)$$

$$-a_2^2 \cdot f_1^2 = M_3. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение вектор искоемых неизвестных $\mathbf{f}^* = (f_1^1, f_3^1, f_1^2, f_2^2, f_2^3, f_3^3)$, (звездочка означает транспонирование) вектор внешних воздействий $\Phi^* = (F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3)$, и перепишем систему (1)–(6) в матричном виде:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{f} = \Phi,$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3^3 & 0 \\ 0 & -a_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1^1 \\ f_3^1 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}.$$

Если $\det \mathbf{B} \neq 0$, то система невырождена, конструкция геометрически неизменяема, состояние равновесия единственное и система обладает самоустанавливающимися свойствами. Раскрывая определитель, находим

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3^3 & 0 \\ 0 & -a_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3. \end{aligned}$$

Таким образом, если числа a_1^1 , a_2^2 и a_3^3 отличны от нуля, то связка, V-образные пазы которой расположены, согласно рис. 6, с, обладает самоустанавливающимися свойствами.

Рассмотренное размещение пазов 3D-связки было использовано в физической модели, представленной на рис. 7. Здесь показаны два параболических лепестка, связанных самоустанавливающимися замками на сборочном стапеле (рис. 7, а), два лепестка в сборе (рис. 7, б), и пружинные захваты шаровых опор (рис. 7, с, д).

Моделирование подтвердило геометрическую неизменяемость и простоту сборки составного зеркала.

3. Кинематическая связка в задаче раскрытия составного зеркала

Замечательно, что методы кинематических связей для точной сборки составных зеркал можно, слегка модифицировав, использовать и для другой родственной задачи — задачи о раскрытии составных зеркал. Эта задача особенно важна при конструировании составных зеркал для орбитальных телескопов.

Мы исследовали классическую конструкцию трансформируемого лепесткового зеркала, выполненного по схеме корпорации Дорнье [10].

Конструкция включает в себя центральное зеркало и набор лепестков, каждый из которых связан с центральным зеркалом цилиндрическим шарниром. Раскрытие зеркала осуществляется синхронным вращением лепестков вокруг осей шарниров (рис. 8). Было показано, и в этом заключается ключевая находка разработчиков корпорации Дорнье, что существует такое направление

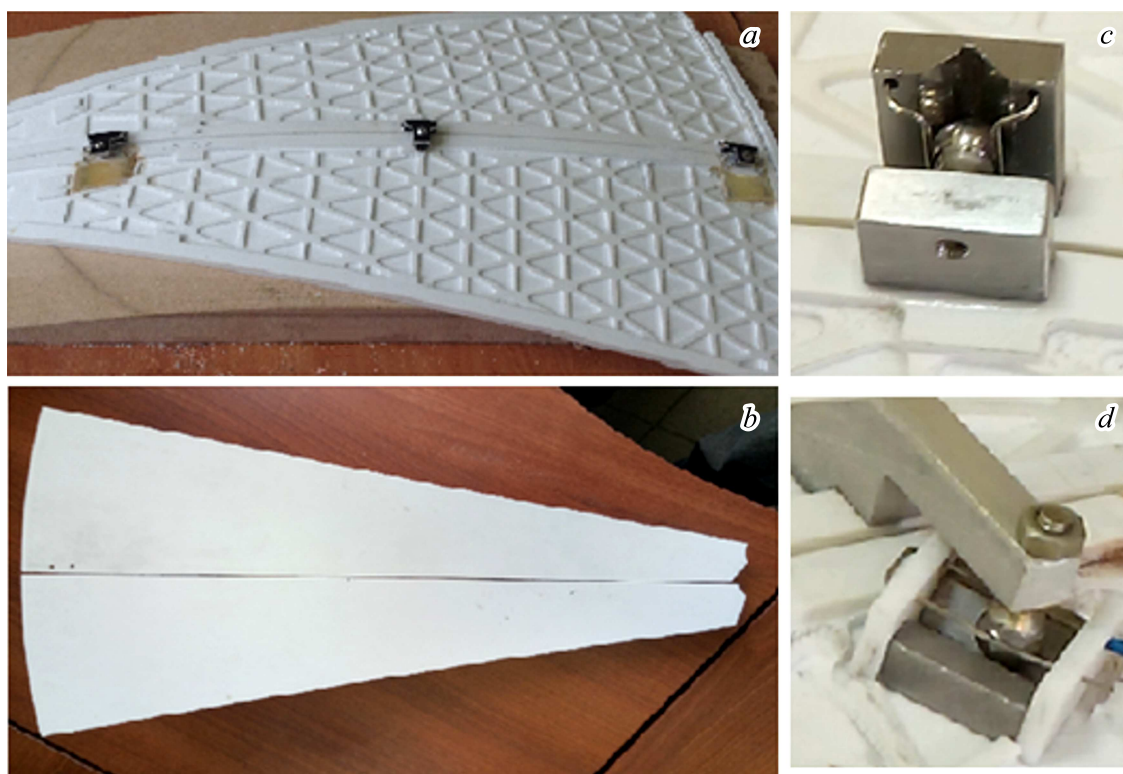


Рис. 7. 3D-кинематическая связка двух параболических лепестков, *a* — сборка двух лепестков на шаблоне, вид сзади, *b* — два лепестка, объединенные кинематической связкой, вид спереди, *c* — вертикальный захват шаровой опоры, *d* — горизонтальный захват шаровой опоры.

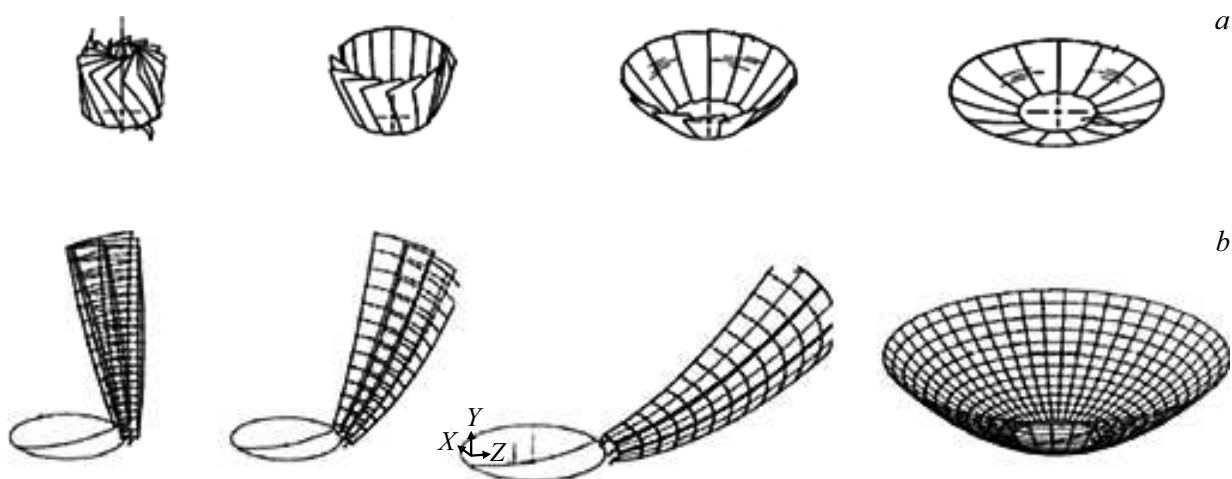


Рис. 8. Классическая схема раскрытия лепесткового зеркала. В верхней части рисунка показаны последовательные фазы раскрытия зеркала. В нижней части рисунка показаны соответствующие изменения в положении отдельного лепестка, а на последнем изображении нижнего ряда — раскрывшаяся конструкция в целом.

осей цилиндрических шарниров, при котором переход лепестков из сложенного состояния в раскрытое осуществляется без зацепления лепестков.

Эта конструкция была использована при создании антенны космического радиотелескопа проекта Радиоастрон [11] и эффективно работает в сантиметровых областях спектра. Однако для работы зеркала в милли-

метровой и субмиллиметровой областях спектра достигаемой точности отражающей поверхности оказывается недостаточно.

Мы изучали возможность повышения с помощью кинематических связок точности и повторяемости раскрытия отдельного лепестка [12–14]. С этой целью была построена физическая модель системы раскрытия

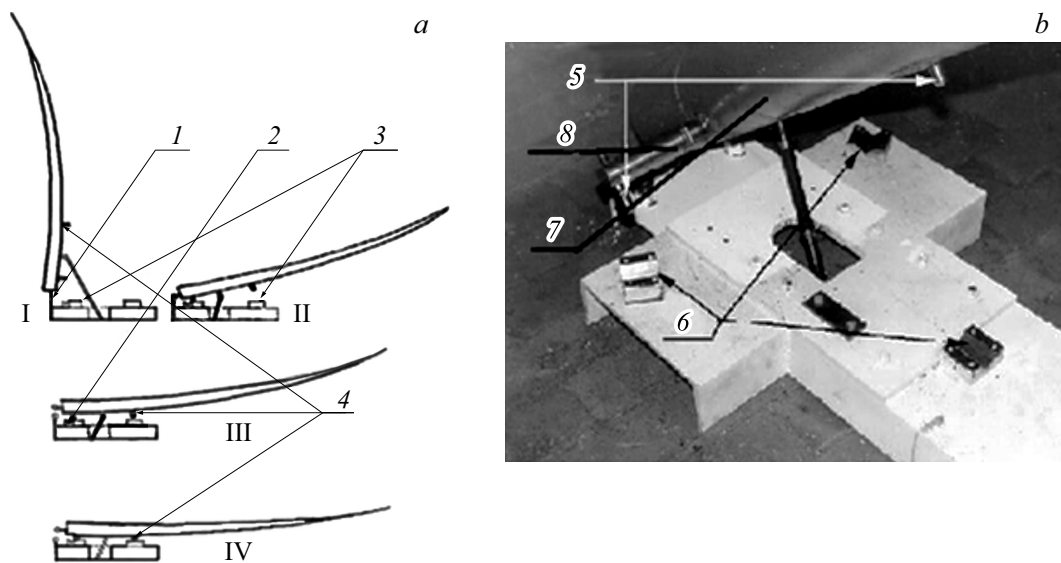


Рис. 9. Кинематическая связка в системе раскрытия лепестка: *a* — схема высокоточного раскрытия. Этапы раскрытия: I — транспортное положение лепестка, II — этап низкоточного раскрытия, III–IV — этапы высокоточной фиксации конечного состояния, 1 — ось вращения лепестка на этапе раскрытия, 2 — ось вращения лепестка при фиксации конечного состояния, 3 — V-образные элементы опирания, 4 — шаровые опоры. *b* — физическая модель кинематической связки системы раскрытия лепестка: 5 — шаровые опоры, 6 — V-образные пазы, 7 — имитатор лепестка, 8 — ось вращения имитатора лепестка.

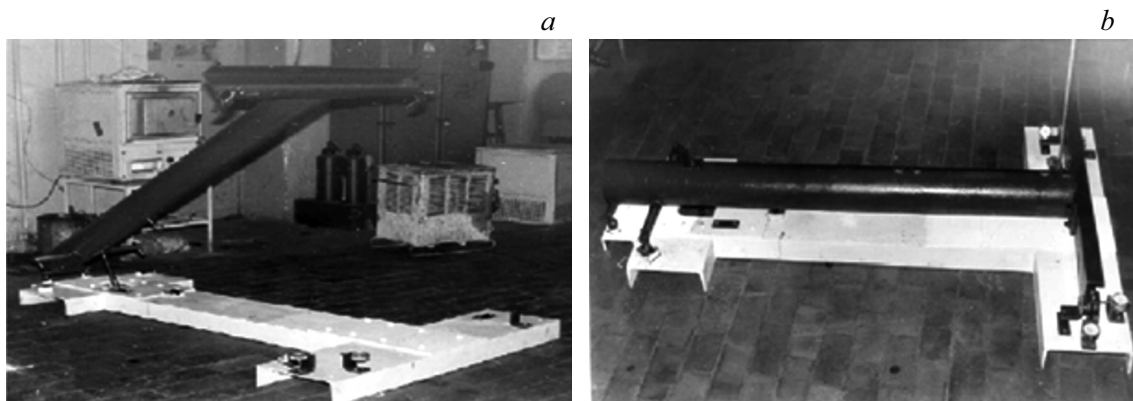


Рис. 10. Физическое моделирование системы раскрытия лепестка: *a* — имитатор лепестка в процессе раскрытия, *b* — имитатор лепестка в раскрытом состоянии.

лепестка и проведены ее исследования. В модели на обратной стороне лепестка у его основания размещались три шаровых опоры (рис. 9). На станине, имитирующей основание центрального зеркала, устанавливались три V-образных паза. Перевод лепестка из сложенного (транспортного) положения в раскрытое (рабочее) состояние осуществлялся вращением лепестка вокруг оси, соединяющей лепесток с основанием центрального зеркала. На заключительном этапе раскрытия шаровые опоры фиксировались на дне V-образных пазов.

При моделировании выяснилась одна важная и интересная особенность использования кинематических связок в задаче раскрытия. С одной стороны, для точной фиксации конечного состояния раскрываемой конструкции кинематическая связка должна быть статически определенной. С другой стороны, механизмы раскрытия

вносят в систему дополнительные кинематические ограничения, и в момент попадания шаровых опор на дно V-образных пазов конструкция становится неопределимой и связка теряет самоустанавливающиеся свойства.

Для решения этого противоречия в механизм раскрытия была введена система с переменной структурой. Раскрытие осуществлялось в два этапа. На начальном этапе низкоточного раскрытия модель лепестка переводилась из транспортного состояния в состояние близкое к рабочему вращением лепестка вокруг оси цилиндрического шарнира согласно схеме Дорнье. На заключительном этапе точной фиксации рабочего состояния лепестка связь с центральным зеркалом отключалась, и удержание шаровых опор на дне пазов осуществлялось пружиной, которая создавала усилие, соответствующее требованиям кинематической связки. В лабораторных

экспериментах была достигнута 10-ти микронная точность повторяемости раскрытия модели (имитатора) лепестка (по нормали к отражающей поверхности), смещение в тангенциальной плоскости не превышало 30 микрон. Этапы физического моделирования представлены на рис. 10.

При проведении физического моделирования мы заменяли (не изменяя сути конструкции) лепесток более простым элементом, который ниже упоминается как имитатор лепестка.

Заключение

Классические кинематические связи и их модификации открывают новые интересные возможности при разработке самоустанавливающихся замков для решения задач сборки и раскрытия составных твердотельных зеркал. В настоящей работе предложены новые конструкции самоустанавливающихся замков статически определимого типа для условий невесомости, и представлены результаты их физического моделирования.

Список литературы

- [1] *Maxwell J.C.* Scientific Papers. Vol. 2. Ed. by W.D. Niven. London: Cambridge University Press, 1890. P. 507–508.
- [2] *Slocum A.H.* // Precision Engineering. 1992. Vol. 14. N 3. P. 67–73.
- [3] *Culpepper M.* // Precision Engineering. 2004. Vol. 28. N 3. P. 338.
- [4] *Barraja M., Vallance R.* // Precision Engineering. 2005. Vol. 29. N 1. P. 101–112.
DOI: 10.1016/j.precisioneng.2004.05.001.
- [5] *Slocum A.H.* // J. Machine Tools and Manufacture. 2010. Vol. 50. N 4. P. 310–327.
- [6] *Hart A.J., Slocum A.H., Willoughby P.* // Precision Engineering. 2004. Vol. 28. N 1. P. 1–15.
DOI: 10.1016/S0141-6359(03)00071-0
- [7] *Кардашев Н.С., Андреев В.В., Буякас В.И., Виноградов И.С., Гвамичава А.С.* // Труды Физического ин-та им. П.Н. Лебедева. 2000. Т. 228. P. 112–128.
- [8] *Peterson L.D., Hinkle J.D.* // Proceedings of the Sixth Annual NASA Earth Science Technology Conference, Maryland, USA, 2006.
- [9] *Arkhipov M.Yu., Baryshev A.M., Kardashov N.S.* // Proceedings of 30th ESA Antenna Workshop, ESTEC, Noordwijk, Netherlands, 2008. P. 125–134.
- [10] *Westphal M.* Dornier System GmbH. // US Patent № 4.899.167. 1990.
- [11] *Кардашев Н.С., Хартов В.В., Абрамов В.В., Авдеев В.Ю.* // Астроном. Журн. 2013. Т. 90. № 3. С. 179–222.
- [12] *Буякас В.И.* Раскрывающаяся антенна. Патент РФ. № 126199. 2013.
- [13] *Bujakas V.I., Kamensky A.A.* // Proceedings of MAMM-2016. Ilmenau, Germany: Springer, 2016. P. 177–189.
DOI: 10.1007/978-3-319-45387-3_15
- [14] *Bujakas V.I., Rybakova A.G.* // Proceedings of IUTAM/IASS Deployable Structures Symposium, Cambridge, Kluwer acad. Publish., 2000. P. 55–63. DOI: 10.1007/978-94-015-9514-8