

05,11

Фазовые состояния негейзенберговского магнетика со спином $S = 3/2$ на треугольной решетке

© Ф.Н. Клевец, Е.А. Неклюдов, Ю.А. Фридман[¶]

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия

[¶] E-mail: yuriiifridman@gmail.com

(Поступила в Редакцию 10 апреля 2018 г.)

Исследованы фазовые состояния изотропного негейзенберговского магнетика со спином магнитного иона $3/2$ на треугольной решетке. Показано, что в системе возможна реализация как дипольных фаз (ферро- и антиферромагнитной), так и тензорных (нематической и антинематической). Построена фазовая диаграмма исследуемой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 16-02-00069а, совместной поддержке РФФИ и Совета министров Республики Крым в рамках проекта № 17-42-92007р_а и поддержке федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования „Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского“.

DOI: 10.21883/FTT.2018.10.46521.098

1. Введение

В спиновых системах упорядочение, как правило, ассоциируется со стандартным магнитным порядком, для которого среднее значение спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ на узлах отлично от нуля, образуя разнообразные магнитные структуры, характеризующиеся векторными параметрами порядка [1–3]. Одним из основных свойств таких магнитоупорядоченных систем является нарушение инвариантности $SO(3)$ симметрии относительно отражения времени, $\langle \mathbf{S} \rangle \rightarrow -\langle \mathbf{S} \rangle$ при замене $t \rightarrow -t$. Это свойство является одним из основных критериев магнитного упорядочения. Однако, существуют спиновые конфигурации, в которых нарушается $SO(3)$ симметрия, но при этом сохраняется инвариантность относительно обращения времени [4]. Так, для изотропных магнетиков, при наличии высших по спинам обменных слагаемых типа $(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)^n$, $n = 2S$, $S > 1/3$ возможна реализация не только фаз с магнитным порядком, т.е. с отличным от нуля средним значением спина (дипольного параметра порядка $\langle \mathbf{S} \rangle$), но также и фаз с $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$, в которых спонтанное нарушение вращательной симметрии обусловлено средними значениями спиновых мультиполей, например, квадрупольными средними $S^{ij} = \langle S^i S^j + S^j S^i \rangle / 2$. Такое состояние, названное спиновым нематиком (SN), было найдено для магнетиков со спином $S \geq 1$ [4–13]. Геометрическим образом SN-фазы является квадрупольный эллипсоид, представляющий симметричный тензор второго ранга S^{ij} . В основном состоянии этот эллипсоид является эллипсоидом вращения, и симметрия состояния на узле есть C_∞ . Величина S^{ij} является квантовым аналогом параметра порядка Де Жена, который вводится для обычных нематических жидких кристаллов [14]. В случае, когда обменный интеграл $J < 0$ отрицателен, для кристаллического магнетика возникают состояния с дву-

мя магнитными подрешетками (считается, что решетка допускает разбиение на две эквивалентные подрешетки (bipartite lattice)). Если гейзенберговский обмен превосходит биквадратичный, то в магнетике реализуется обычное антиферромагнитное состояние. В противоположном случае в системе реализуется состояние ортогонального нематика [4,7,15]. Аналогичные фазовые состояния существуют и для более сложных кристаллических структур. Так, в работах [12,13,16–21] определены условия существования и динамические свойства как дипольных фаз (ферро- и антиферромагнитных), так и фаз с тензорными параметрами порядка в магнетике с $S \geq 1$, обладающем треугольной кристаллической решеткой, т.е. трехподрешеточном магнетике. Конечно же, эти состояния обладают специфическими особенностями, связанными с особенностями кристаллической решетки, но в целом сохраняют свойства дипольных и тензорных фаз [16].

Подобные состояния для высших спинов $S > 1$ изучены слабее, но для них обнаружены качественно новые эффекты, отсутствующие для случая $S = 1$. Так, для спина $S = 3/2$ на квадратной решетке найдены фазы с $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$, для которых симметрия относительно отражения времени нарушена за счет нетривиальных свойств трехспиновых средних [3,17,18,22–24]. В силу этого для спина $S = 3/2$ на квадратной решетке возможно существование антинематической (SAN) фазы, в которой направления вектор-директора в двух подрешетках антипараллельны [22].

Таким образом, исследования простейшей модели спинового нематика позволяют утверждать, что подобного рода системы обладают целым рядом необычных свойств. На протяжении последних двадцати лет такие состояния активно изучались в кристаллических магнетиках [8,12,13,16–18,22–25], включая низкоразмер-

ные системы [3,26–28]. В настоящее время появился дополнительный интерес к таким состояниям, связанный с изучением свойств ультрахолодных ферми-газов, примером которых являются газы ^{132}Cs , ^9Be , ^{135}Ba со спином $S = 3/2$ в оптических решетках, в которых на одну ячейку приходится один атом [29–32]. Существенно также, что для таких систем характерно сильное негеизенберговское взаимодействие магнитных ионов, необходимое для существования немагнитических состояний [33].

Целью данной работы является исследование практически не изученных спиновых состояний изотропного негеизенберговского магнетика с $S = 3/2$ на треугольной решетке.

2. Модель

В качестве исследуемой модели рассмотрим изотропный магнетик со спином магнитного иона $S = 3/2$, имеющий треугольную кристаллическую решетку. В общем случае гамильтониан такой системы, учитывающий все возможные спиновые инварианты, имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{n,n'} J(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} K(n-n') (\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n'})^2 - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} L(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^3, \quad (1)$$

где \mathbf{S}_n — спиновый оператор в n -ом узле, J, K и L — обменные интегралы между ближайшими спинами, суммирование в (1) производится по всем ближайшим соседям треугольной решетки и каждая пара ближайших соседей учитывается один раз. Мы ограничимся рассмотрением модели, которая допускает разбиение на три эквивалентные подрешетки, например, пирамидальную (трехмерную) или треугольную (двумерную). Дальнейшие вычисления будем проводить для случая низких температур ($T \rightarrow 0$), поскольку именно в этом случае наиболее ярко проявляются квантовые свойства системы. Гамильтониан (1) удобно представить в терминах операторов Стивенса, которые представляют собой набор неприводимых комбинаций операторов спиновых компонент [21]. Для спина $3/2$ эти операторы выбираются в виде

$$\begin{aligned} O_2^0 &= 3(S^z)^2 - S(S+1), & O_2^1 &= [S^z, S^x]_+, & \tilde{O}_2^1 &= [S^z, S^y]_+, \\ O_2^2 &= \frac{1}{2}((S^+)^2 + (S^-)^2), & \tilde{O}_2^2 &= \frac{1}{2i}((S^+)^2 - (S^-)^2), \\ O_3^0 &= 5(S^z)^2 - 3S(S+1)S^z + S^z, \\ O_3^1 &= \frac{1}{2} \left[\left(5(S^z)^2 - S(S+1) - \frac{1}{2} \right), S^x \right]_+, \\ \tilde{O}_3^1 &= \frac{1}{2} \left[\left(5(S^z)^2 - S(S+1) - \frac{1}{2} \right), S^y \right]_+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_3^2 &= \frac{1}{4} [S^z, ((S^+)^2 + (S^-)^2)]_+, \\ \tilde{O}_3^2 &= \frac{1}{4i} [S^z, ((S^+)^2 - (S^-)^2)]_+, \\ O_3^3 &= \frac{1}{2} ((S^+)^3 + (S^-)^3), \end{aligned}$$

где $S^\pm = S^x \pm iS^y$, $[A, B]_+ = AB + BA$. Гамильтониан (1) в терминах операторов Стивенса принимает следующий вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n \neq n' \\ i=0,1,2 \\ j=0,1,2,3}} \{ \bar{J}(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) + \bar{K} O_{2n}^i O_{2n'}^i + L O_{3n}^j O_{3n'}^j \}, \quad (2)$$

где

$$\bar{J} = J(n-n') - \frac{1}{2} K(n-n') + \frac{587}{80} L(n-n'),$$

а

$$\bar{K} = \frac{1}{2} K(n-n') - L(n-n').$$

Рассматриваемая система (в двумерном случае) имеет три оси третьего порядка, поэтому выберем оси квантования подрешеток в соответствии с осями симметрии. Для этого для каждой подрешетки введем локальную систему координат в спиновом пространстве. Очевидно, что оси квантования второй и третьей подрешеток (а значит и компоненты операторов спина) будут находиться под некоторыми углами θ по отношению к оси OZ (см. рис. 1). Поэтому удобно преобразовать вторую и третью подрешетки таким образом, чтобы магнитные моменты в них были направлены по локальным осям квантования, т.е. по осям симметрии третьего порядка. Эти преобразования представляют

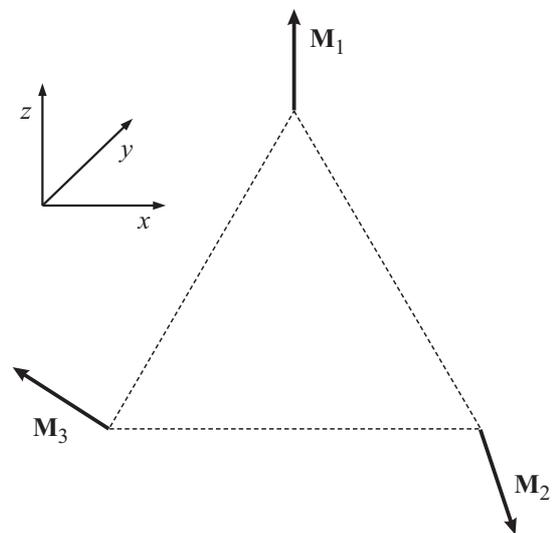


Рис. 1. Ориентация спинов в треугольной кристаллической ячейке.

собой повороты в спиновом пространстве, и для спина $3/2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{U}(\theta) &= \exp(i\theta S^y) \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(3 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \hat{I} + \frac{i}{3} \sin \frac{\theta}{2} \left(7 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) S^y \\ &\quad - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (S^y)^2 - \frac{4i}{3} \sin^3 \frac{\theta}{2} (S^y)^3, \end{aligned}$$

где \hat{I} — единичный оператор. После применения данной процедуры, гамильтониан (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \hat{U}^+(\theta) \mathcal{H} \hat{U}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} \left\{ \bar{J}(\mathbf{S}_n(\theta) \mathbf{S}_{n'}(\theta)) \right. \\ &\quad \left. + \bar{K} O_{2n}(\theta) O_{2n'}(\theta) + L O_{3n}(\theta) O_{3n'}(\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее мы будем работать в системе координат, связанной с первой подрешеткой. Выделяя в гамильтониане (3) средние поля, связанные со средним магнитным моментом (на один узел) $\langle S^i \rangle$, и средние мультипольные поля, пропорциональные тензорным параметрам порядка $q_i^j = \langle O_i^j \rangle$, получаем одноузельный гамильтониан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= -\bar{J}_0 \left\{ \langle S^z(\theta) \rangle S^z(\theta) + \langle S^x(\theta) \rangle S^x(\theta) \right\} \\ &\quad - \bar{K}_0 \left\{ \frac{1}{3} q_2^0(\theta) O_2^0(\theta) + q_2^1(\theta) O_2^1(\theta) + q_2^2(\theta) O_2^2(\theta) \right\} \\ &\quad - L_0 \left\{ \frac{1}{10} q_3^0(\theta) O_3^0(\theta) + \frac{3}{20} q_3^1(\theta) O_3^1(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} q_3^2(\theta) O_3^2(\theta) + \frac{1}{4} q_3^3(\theta) O_3^3(\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для диагонализации гамильтониана (4) воспользуемся методом, развитым в работе [34], в основе которого лежит использование техники операторов Хаббарда [35–37]. На базисе собственных функций оператора S^z построим операторы Хаббарда $X^{mn} = |m\rangle \langle n|$, описывающие переход магнитного иона из состояния $|n\rangle$ в состояние $|m\rangle$, где векторы состояний $|m\rangle$ представляют собой стандартный полный набор собственных векторов оператора S^z [35,36]. Связь спиновых операторов с операторами Хаббарда имеет следующий вид

$$\begin{aligned} S^+ &= \sqrt{3} X^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} + 2X^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \sqrt{3} X^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}, \\ S^- &= (S^+)^\dagger, \quad S^z = \frac{1}{2} (S^+ S^- - S^- S^+). \end{aligned} \quad (5)$$

Формально, одноузельный гамильтониан в представлении операторов Хаббарда можно представить как [22]

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \varepsilon_i X^{ii} + \sum_{i \neq j} V_{ij} X^{ij},$$

где ε_i, V_{ij} — диагональные и недиагональные амплитуды, соответственно. Для диагонализации одноузельного

гамильтониана воспользуемся методом $u-v$ преобразований Боголюбова [22]

$$U_{mn}(\alpha) = \exp(\alpha_{nm} X^{nm} - \alpha_{mn} X^{mn}),$$

после применения которого гамильтониан принимает диагональный вид

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i E_i X^{ii}, \quad (6)$$

при этом, параметры унитарных преобразований α_{nm} разделяются системой уравнений

$$\tilde{V}_{ij} \left(\alpha_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \alpha_{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}, \alpha_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}, \alpha_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}, \alpha_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}, \alpha_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} \right) = 0.$$

Решая с гамильтонианом (6) стационарное уравнение Шредингера, получим собственные функции

$$\begin{aligned} |\psi(3/2)\rangle &= \cos \alpha |3/2\rangle + \sin \alpha |-3/2\rangle, \\ |\psi(-3/2)\rangle &= -\sin \alpha |3/2\rangle + \cos \alpha |-3/2\rangle, \\ |\psi(1/2)\rangle &= |1/2\rangle, \quad |\psi(-1/2)\rangle = |-1/2\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

и собственные значения гамильтониана (6)

$$\begin{aligned} E_{3/2, -3/2} &= -\frac{3}{2} \left[B_2^0 (3 \cos \theta - 1) + B_2^1 \sin^2 \theta - B_2^2 \sin 2\theta \right] \\ &\quad \mp \frac{3}{2} \left[\bar{H} + \frac{B_3^0}{2} (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta + \frac{B_3^1}{2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} B_3^2 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{3}{4} B_3^3 \sin^3 \theta \right] \cos 2\alpha \\ &\quad \mp \frac{3}{2} \left[\frac{5}{2} B_3^0 \sin^3 \theta + \frac{5}{2} B_3^1 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} B_3^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} B_3^3 \cos \theta (\cos^2 \theta + 3) \right] \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_{1/2, -1/2} &= 3 \left[B_2^0 \cos 2\theta - B_2^1 \sin 2\theta - B_2^2 (\cos^2 \theta - 1) \right] \\ &\quad \mp \frac{1}{2} \left[\bar{H} \cos \theta + \frac{9}{2} B_3^0 \cos \theta (5 \sin^2 \theta - 2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} B_3^1 \sin \theta (5 \cos 2\theta + 5 \cos^2 \theta + 2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} B_3^2 \sin^2 \theta (7 + 11 \cos \theta) + \frac{9}{2} B_3^3 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \right], \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{H} = \bar{J}(\langle S^z \rangle + \langle S^x \rangle), \quad B_2^0 = \frac{1}{3} \bar{K} q_2^0, \quad B_2^1 = \bar{K} q_2^1, \quad B_2^2 = \bar{K} q_2^2,$$

$$B_3^0 = \frac{1}{10} L q_3^0, \quad B_3^1 = \frac{3}{20} L q_3^1, \quad B_3^2 = \frac{3}{2} L q_3^2, \quad B_3^3 = \frac{1}{4} L q_3^3.$$

Из связи спиновых операторов с операторами Хаббарда можно определить явный вид параметров порядка системы как функции параметров унитарных преобразований и, как будет показано ниже, констант обменных взаимодействий

$$\begin{aligned}\langle S^z(\theta_k, \alpha_k) \rangle &= \frac{3}{2} \cos \theta_k \cos 2\alpha_k, \\ \langle S^x(\theta_k, \alpha_k) \rangle &= \frac{3}{2} \sin \theta_k \cos 2\alpha_k, \\ q_2^0(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{3}{2} (3 \cos^2 \theta_k - 1),\end{aligned}\quad (9)$$

$$q_2^1(\theta_k, \alpha_k) = -\frac{3}{2} \sin 2\theta_k, \quad q_2^2(\theta_k, \alpha_k) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta_k,$$

$$\begin{aligned}q_3^0(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{3}{2} \left(5 \cos \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{1}{2} \cos \theta_k (15 \cos^2 \theta_k - 13) \right) \\ &\times \cos 2\alpha_k + \frac{15}{4} \sin^3 \theta_k \sin 2\alpha_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3^1(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{3}{2} \left(5 \cos^2 \theta_k \sin \theta_k - \frac{1}{2} \sin \theta_k (15 \cos^2 \theta_k - 1) \right) \\ &\times \cos 2\alpha_k + \frac{15}{8} \sin 2\theta_k \sin \theta_k \sin 2\alpha_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3^2(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{3}{4} \cos \theta_k \sin^2 \theta_k \cos 2\alpha_k \\ &+ \frac{3}{4} \sin \theta_k (\cos^2 \theta_k + 1) \sin 2\alpha_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3^3(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{9}{8} \sin^3 \theta_k \cos 2\alpha_k \\ &+ \frac{3}{4} \cos \theta_k (\cos^2 \theta_k + 3) \sin 2\alpha_k.\end{aligned}$$

Здесь $k = 1, 2, 3$ — номер подрешетки.

Анализ энергетических уровней и собственных функций показал, что состояния $|\psi(1/2)\rangle$ и $|\psi(-1/2)\rangle$ никогда не являются „экстремальными“, а минимальному и максимальному значениям уровней энергии магнитного иона соответствуют состояния $|\psi(3/2)\rangle$ и $|\psi(-3/2)\rangle$ соответственно. С учетом этого, достаточно совершить только один унитарный поворот $\alpha_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = \alpha$ что и было учтено выше в выражениях (7) и (8).

Поскольку мы рассматриваем случай низких температур, то свободная энергия системы (в расчете на один спин) в приближении среднего поля совпадает с нижайшим энергетическим уровнем магнитного иона $E_{3/2}$. Таким образом, для плотности свободной энергии

получаем

$$\begin{aligned}F(\theta_k, \alpha_k) &= -\frac{3}{2} \left[B_2^0 (3 \cos \theta - 1) + B_2^1 \sin^2 \theta - B_2^2 \sin 2\theta \right] \\ &- \frac{3}{2} \left[\bar{H} + \frac{B_3^0}{2} (5 \cos^2 \theta - 3) \cos \theta + \frac{B_3^1}{2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \sin \theta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} B_3^2 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{3}{4} B_3^3 \sin^3 \theta \right] \cos 2\alpha \\ &- \frac{3}{2} \left[\frac{5}{2} B_3^0 \sin^3 \theta + \frac{5}{2} B_3^1 \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} B_3^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + 1) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} B_3^3 \cos \theta (\cos^2 \theta + 3) \right] \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (10)$$

Минимизируя свободную энергию элементарной ячейки по параметрам θ_2 и θ_3 (для первой подрешетки $\theta_1 = 0$), и α_k , получим систему уравнений, определяющую различные фазовые состояния системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha_k} F(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{9}{2} \left[\bar{J}_0 \cos^2 \theta_k - \frac{1}{16} L \left\{ \frac{31}{8} \sin^6 \theta_k \right. \right. \\ &- \frac{72}{5} (\cos^2 \theta_k + 1) \cos^4 \theta_k - \frac{3}{10} (9 \cos^2 \theta_k + 1)^2 \sin^2 \theta_k \\ &+ \left. \left. 3 \sin^2 \theta_k (\cos^2 \theta_k + 1)^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta_k (\cos^2 \theta_k + 3)^2 \right\} \right] \sin 4\alpha_k \\ &+ \frac{9}{64} L \cos \theta_k \sin^3 \theta_k [15 \cos 2\theta_k + 13 \cos^2 \theta_k] \cos 4\alpha_k = 0,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta_k} F(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{9}{4} \bar{J}_0 \cos^2 2\alpha_k \sin 2\theta_k \\ &- L \left\{ \frac{27}{160} \left[(5 \cos^2 \theta_k - 3) \cos \theta_k \cos 2\alpha_k + 5 \sin^3 \theta_k \sin 2\alpha_k \right] \right. \\ &\times \left[5 \sin 2\theta_k \sin 2\alpha_k - 3 (\cos 2\theta_k + 3 \cos^2 \theta_k) \cos 2\alpha_k \right] \sin \theta_k \\ &+ \frac{27}{64} \left[(5 \sin 2\theta_k - (15 \cos^2 \theta_k - 1)) \cos 2\alpha_k \right. \\ &+ \left. \frac{5}{2} \sin 2\theta_k \sin 2\alpha_k \right] \left[5 \sin \theta_k (\cos 2\theta_k + \cos^2 \theta_k) \sin 2\alpha_k \right. \\ &- \left. \cos \theta_k \cos 2\alpha_k \right] \sin \theta_k + \frac{27}{16} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta_k \cos 2\alpha_k \right. \\ &+ \left. (\cos^2 \theta_k + 1) \sin 2\alpha_k \right] [\cos \theta_k \sin 2\alpha_k + \sin \theta_k \cos 2\alpha_k] \\ &\times (\cos 2\theta_k + \cos^2 \theta_k) \sin \theta_k + \frac{27}{32} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta_k \cos 2\alpha_k \right. \\ &+ \left. \cos \theta_k (\cos^2 \theta_k + 3) \sin 2\alpha_k \right] \left[\frac{3}{4} \sin 2\theta_k \cos 2\alpha_k \right. \\ &- \left. (\cos^2 \theta_k + 1) \sin 2\alpha_k \right] \sin \theta_k \left. \right\} = 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Решая систему уравнений (11)–(12), получим соотношения между углами θ_k для различных подрешеток. Одним из таких условий является

$$\theta_2 = -\theta_3. \quad (13)$$

Отсюда следует, что магнитный момент второй и третьей подрешеток может отклоняться от оси квантования только на одинаковый по величине угол θ , в противном случае энергия элементарной ячейки магнитного кристалла не будет минимальна.

Кроме того, это соотношение достаточно очевидно: поскольку рассматриваемая нами система является изотропной, а кристаллическая ячейка (равносторонний треугольник) имеет три оси третьего порядка, то условие (13) является очевидным.

Решения уравнений (11) и (12) с учетом полученного соотношения (13) позволяют получить следующие возможные решения для углов θ_k и α_k :

1. $\theta_{1,2,3} = 0, \quad \alpha_{1,2,3} = 0;$
2. $\theta_{1,2,3} = 0, \quad \alpha_{1,2,3} = \frac{\pi}{4};$
3. $\theta_1 = 0, \quad \theta_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{1,2,3} = 0.$
4. $\theta_1 = 0, \quad \theta_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{2,3} = -\frac{\pi}{4}.$

Полученные решения соответствуют четырем устойчивым фазовым состояниям.

3. Ферромагнитная фаза

Рассмотрим уравнения (11) и (12) в случае $\theta_{1,2,3} = 0, \alpha_{1,2,3} = 0$, т.е. когда магнитные моменты всех трех подрешеток направлены по оси OZ . В этом случае уравнение (12) тождественно удовлетворяется, а уравнение (11) приводится к виду

$$\Lambda \sin 4\alpha = 0, \quad (14)$$

где

$$\Lambda = J_0 - \frac{1}{2}K_0 + \frac{103}{16}L,$$

т.е. минимуму свободной энергии могут отвечать только значения $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$ в случае, если комбинация обменных интегралов Λ не равна нулю.

Если $\Lambda > 0$, то выгодно состояние с $\alpha = 0$, а в случае $\Lambda < 0$ выгодно состояние с $\alpha = \pi/4$. При $\theta_{1,2,3} = 0$ и $\alpha_{1,2,3} = 0$ отличные от нуля параметры порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \langle S^z(\theta_k, \alpha_k) \rangle &= \frac{3}{2}, & \langle S^x(\theta_k, \alpha_k) \rangle &= 0, \\ q_2^0(\theta_k, \alpha_k) &= 3, & q_3^0(\theta_k, \alpha_k) &= \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

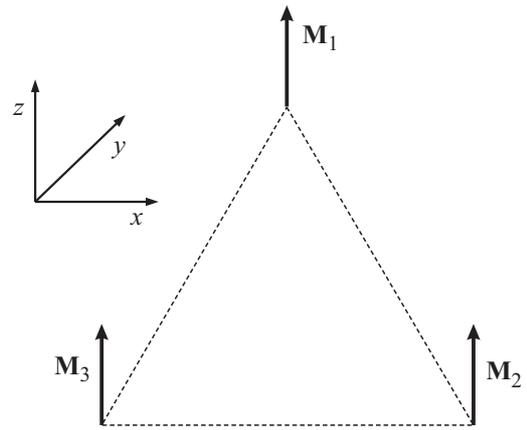


Рис. 2. Ориентация магнитных моментов в элементарной кристаллической ячейке в FM-фазе.

Из (15) видно, что в этом случае среднее значение магнитного момента на узле достигает своего максимального значения, что соответствует ферромагнитной (FM) фазе. В этом случае (при $\Lambda > 0$) преобладающей является константа гейзенберговского обменного взаимодействия.

Нижайшим энергетическим уровнем в FM фазе во всех трех подрешетках является $E_{3/2}$, а волновая функция основного состояния во всех трех подрешетках есть состояние с максимальной проекцией спина $|\psi(3/2)\rangle = |3/2\rangle$.

Свободная энергия элементарной кристаллической ячейки в FM-фазе имеет следующий вид

$$F_{FM} = -\frac{9}{4} \left(3J_0 + \frac{1}{2}K_0 + \frac{293}{16}L_0 \right). \quad (16)$$

В FM фазе мультипольные средние определяются выражениями

$$\langle (S^z)^2 \rangle = \frac{9}{4}, \quad \langle (S^x)^2 \rangle = \langle (S^y)^2 \rangle = \frac{3}{4}.$$

Нетривиальное октупольное среднее q_3^0 равно нулю, а величина q_3^0 является тривиальной константой и не влияет на динамику системы. Следовательно, в FM фазе, как и для системы со спином $S = 1$, симметрия квадрупольных средних полностью определяется симметрией магнитного момента. Присутствие „недипольных“ средних не проявляется в симметрии основного состояния FM-фазы.

Геометрический образ квадрупольных средних в FM-фазе представляет собой эллипсоид вращения в спиновом пространстве. Симметрия этого эллипсоида определяется направлением магнитного момента, которое совпадает с направлением главной оси этого эллипсоида. Ориентация спинов в элементарной кристаллической ячейке схематично изображена на рис. 2.

Все полученные для FM-фазы результаты совпадают с результатами работ [22,37] для магнетика со спином $S = 3/2$ на квадратной решетке.

4. Нематическая фаза

Рассмотрим теперь случай $\theta_{1,2,3} = 0$ и $\alpha_{1,2,3} = \pi/4$. В этом случае выгодно состояние с $\Lambda < 0$, а параметры порядка, отличные от нуля, имеют следующий вид

$$\langle S^z(\theta_k, \alpha_k) \rangle = \langle S^x(\theta_k, \alpha_k) \rangle = 0, \quad \langle S^y(\theta_k, \alpha_k) \rangle = 0, \\ q_2^0(\theta_k, \alpha_k) = 3, \quad q_3^3(\theta_k, \alpha_k) = 3. \quad (17)$$

Условие означает, что в этом состоянии преобладающим взаимодействием является биквадратичное обменное взаимодействие.

Для данного состояния, как видно из (17), среднее значение магнитного момента на узле равно нулю, а ненулевое квадрупольное среднее имеет то же значение, что и для FM-фазы, но при этом возникают нетривиальные средние $\langle (S^+)^3 \rangle$ и $\langle (S^-)^3 \rangle$, величина $q_3^3(\theta_k, \alpha_k) = 3$ (см. (17)). Таким образом, при $\theta_{1,2,3} = 0$ и $\alpha_{1,2,3} = \pi/4$ реализуется SN-фаза с равным нулю средним значением магнитного момента на узле [22,38].

Нижайшим энергетическим уровнем в SN-фазе во всех трех подрешетках также является $E_{3/2}$, и волновая функция основного состояния во всех трех подрешетках имеет вид

$$\left| \psi \left(\frac{3}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{3}{2} \right\rangle + \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \right). \quad (18)$$

Квадрупольные средние в этом состоянии равны

$$\langle (S^z)^2 \rangle = \frac{9}{4}, \quad \langle (S^x)^2 \rangle = \langle (S^y)^2 \rangle = \frac{3}{4},$$

а геометрическим образом квадрупольных средних SN-состояния в спиновом пространстве является эллипсоид вращения. Ориентация этих эллипсоидов на треугольной решетке показана на рис. 3.

Форма этого эллипсоида такая же, как и в FM-фазе. Однако, на самом деле симметрия SN-состояния не содержит оси C_∞ (как и симметрия ячейки кристаллической решетки); она ниже, чем определяемая квадрупольным эллипсоидом. Действительно, в отличие от FM-состояния, в SN-фазе отличны от нуля кубические средние вида

$$\langle (S^x \cos \chi + S^y \sin \chi)^3 \rangle = \frac{3}{4} \cos 3\chi,$$

где угол χ определяет поворот спиновой системы вокруг оси OZ . При этом среднее значение $\langle S_z^3 \rangle = 0$. Фактически, ненулевые кубические средние определяют ось симметрии третьего порядка.

Свободная энергия элементарной кристаллической ячейки в SN-фазе имеет следующий вид

$$F_{SN} = -\frac{9}{4} (2K_0 - L_0). \quad (19)$$

Как уже было сказано выше, при $\Lambda > 0$ выгодно состояние с $\alpha = 0$, в случае $\Lambda < 0$ состояние с $\alpha = \pi/4$.

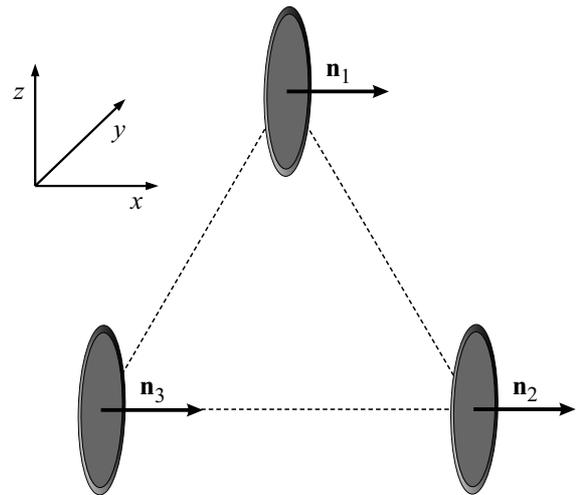


Рис. 3. Геометрический образ квадрупольных средних в SN-фазе.

Однако, как можно видеть из уравнения (14), если комбинация обменных интегралов $\Lambda = 0$, то параметр α не определен и в этом случае энергии фаз совпадают. Таким образом, „линия“ $\lambda = 0$ является линией фазового перехода, однако в рамках данной работы нельзя ответить на вопрос о типе фазового перехода, так как для этого необходимо исследовать динамические свойства системы. В связи с тем, что линия $\Lambda = 0$ представляет собой линию потери устойчивости FM- и SN-фаз, переобозначим ее как $\Lambda = \Lambda_{FM-SN}$.

Необходимо отметить, что все результаты, полученные выше для треугольной решетки (при $\theta_{1,2,3} = 0$), совпадают с результатами работ [22,38] для FM- и SN-фаз на квадратной решетке.

5. Антиферромагнитная фаза

В гейзенберговском магнетике с единственным билинейным обменным взаимодействием при отрицательном обменном интеграле $J < 0$ реализуется антиферромагнитный (AFM) порядок, связанный с разбиением системы на несколько подрешеток. AFM-состояние имеет место и для негейзенберговских магнетиков со спином $S = 1$ и $S = 3/2$ на квадратной кристаллической решетке [3,39]. Таким образом, можно ожидать что для общей модели (1) все состояния исчерпываются или простыми одноподрешеточными, или трехподрешеточными структурами в распределении локальных спиновых состояний.

Если константа билинейного обменного взаимодействия отрицательна и превосходит по модулю константы биквадратичного и бикубического взаимодействий, то система уравнений (11) и (12) имеет следующие решения

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{1,2,3} = 0.$$

Тогда отличные от нуля параметры порядка в этом состоянии в системе координат, связанной с первой подрешеткой, имеют вид

$$\begin{aligned} \langle S^z(\theta_1, \alpha_1) \rangle &= \frac{3}{2}, \quad \langle S^z(\theta_2, \alpha_2) \rangle = \langle S^z(\theta_3, \alpha_3) \rangle = -\frac{3}{4}, \\ \langle S^x(\theta_2, \alpha_2) \rangle &= -\langle S^x(\theta_3, \alpha_3) \rangle = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \\ q_2^0(\theta_1, \alpha_1) &= 3, \quad q_2^0(\theta_2, \alpha_2) = q_2^0(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{3}{8}, \\ q_2^1(\theta_2, \alpha_2) &= -q_2^1(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, \\ q_2^2(\theta_2, \alpha_2) &= q_2^2(\theta_3, \alpha_3) = \frac{9}{8}, \quad q_3^2(\theta_1, \alpha_1) = \frac{3}{2}, \\ q_3^0(\theta_2, \alpha_2) &= q_3^0(\theta_3, \alpha_3) = \frac{21}{32}, \\ q_3^1(\theta_2, \alpha_2) &= -q_3^1(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{32}, \\ q_3^2(\theta_2, \alpha_2) &= q_3^2(\theta_3, \alpha_3) = \frac{9}{32}, \\ q_3^3(\theta_2, \alpha_2) &= -q_3^3(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{9\sqrt{3}}{32}, \end{aligned} \quad (20)$$

где нижние индексы 1, 2, 3 обозначают номер подрешетки.

Как видно из (20), магнитные моменты в узлах кристаллической решетки отличны от нуля. При этом суммарный магнитный момент в элементарной кристаллической ячейке равен нулю, что характерно для AFM-упорядочения.

Также следует обратить внимание, что в данной AFM-конфигурации параметр унитарного преобразования α равен нулю во всех трех подрешетках, в отличие от двухподрешеточной системы (квадратная решетка) [22].

Нижайшим энергетическим уровнем для всех трех подрешеток в AFM упорядочении является $E_{3/2}$. Волновые функции основного состояния для первой, второй и третьей подрешеток в AFM-фазе равны соответственно

$$|\psi_{(1)}\rangle = |\psi_{(2)}\rangle = |\psi_{(3)}\rangle = \left| \frac{3}{2} \right\rangle.$$

Как видно из рис. 4 и явного вида параметров порядка (20), z -проекции магнитных моментов второй и третьей подрешеток направлены противоположно по отношению к первой подрешетке, и они вдвое меньше, чем магнитный момент первой подрешетки, а x -проекции второй и третьей подрешеток одинаковы по модулю и имеют разные знаки. Очевидно, что суперпозиция z -проекции магнитных моментов второй и третьей подрешеток компенсирует магнитный момент первой подрешетки, а x -проекции компенсируют друг друга, и таким образом суммарный магнитный момент элементарной кристаллической ячейки равен нулю.

Полученная для спина $S = 3/2$ спиновая конфигурация в AFM-фазе является стандартной конфигурацией для треугольной кристаллической ячейки. Так, для ан-

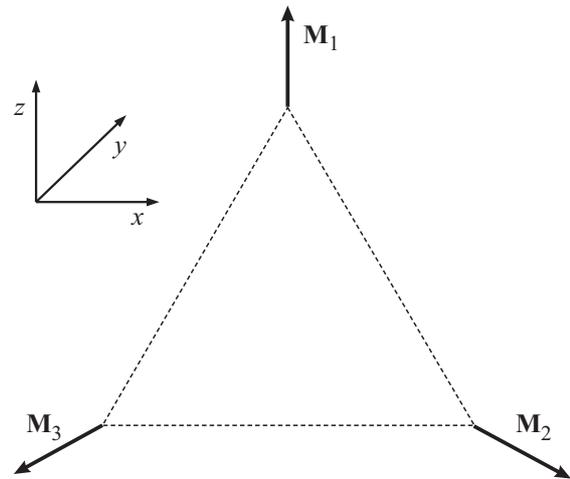


Рис. 4. Ориентация магнитных моментов в элементарной кристаллической ячейке в AFM-фазе.

тиферромагнетика с тремя эквивалентными магнитными подрешетками, расположенными в плоскости, локальные магнитные моменты составляют углы 0 и $\pm 2\pi/3$ соответственно [23,24].

Свободная энергия элементарной кристаллической ячейки в AFM-фазе имеет вид

$$F_{AFM} = -\frac{9}{4} \left(3J_0 + \frac{1}{2} K_0 + \frac{293}{16} L_0 \right), \quad (21)$$

где $J_0 < 0$.

Приравняв свободные энергии в AFM- и SN-фазе, получим уравнение на линию фазового перехода

$$\Lambda_{SN-AFM} = J_0 + \frac{1}{2} K_0 - \frac{103}{16} L_0 = 0. \quad (22)$$

6. Антинематическая фаза

В системах со спином $S = 3/2$ возможно существование антинематического спинового состояния, которое также связано с формированием нескольких различных подрешеток. В рассматриваемой системе также возможна реализация антинематического упорядочения.

Антинематическое (SAN) упорядочение реализуется в том случае, когда параметры унитарных поворотов для 1-ой, 2-ой и 3-ей подрешеток равны, соответственно, $\theta_1 = 0$, $\theta_{2,3} = \pm 2\pi/3$, $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_{2,3} = -\pi/4$. Отличные от нуля параметры порядка в SAN-фазе для 1-ой, 2-ой и 3-ей подрешеток имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \langle S^z(\theta_{1,2,3}, \alpha_{1,2,3}) \rangle &= 0, \quad \langle S^x(\theta_{1,2,3}, \alpha_{1,2,3}) \rangle = 0, \\ q_2^0(\theta_1, \alpha_1) &= 3, \quad q_3^3(\theta_1, \alpha_1) = 3, \\ q_2^0(\theta_2, \alpha_2) &= q_2^0(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{3}{8}, \\ q_2^1(\theta_2, \alpha_2) &= -q_2^1(\theta_3, \alpha_3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \\ q_2^2(\theta_2, \alpha_2) &= q_2^2(\theta_3, \alpha_3) = \frac{9}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_3^0(\theta_2, \alpha_2) &= q_3^0(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{45\sqrt{3}}{32}, \\
 q_3^1(\theta_2, \alpha_2) &= -q_3^1(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{45}{32}, \\
 q_3^2(\theta_2, \alpha_2) &= q_3^2(\theta_3, \alpha_3) = \frac{15\sqrt{3}}{32}, \\
 q_3^3(\theta_2, \alpha_2) &= -q_3^3(\theta_3, \alpha_3) = -\frac{39}{32}.
 \end{aligned}$$

Если $\theta_k = 0$, выражения (23) совпадают с параметрами порядка для квадратной решетки [22]. Необходимо отметить, что мультипольные средние в SAN-фазе имеют такой же вид, как и в SN-фазе только для первой подрешетки, в то время, как мультипольные средние для второй и третьей подрешеток в SAN- и SN-фазах различны.

Волновые функции основного состояния для 1-ой, 2-ой и 3-ей подрешеток в антинематической фазе равны, соответственно,

$$\begin{aligned}
 |\psi_{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{3}{2} \right\rangle + \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \right), \\
 |\psi_{(2)}\rangle &= -|\psi_{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{3}{2} \right\rangle - \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \right),
 \end{aligned}$$

Свободная энергия элементарной кристаллической ячейки в SAN-фазе имеет вид

$$F_{\text{SN}} = -\frac{9}{4}(2K_0 - L_0), \tag{24}$$

где $K_0 < 0$.

Сравнивая (24) с (19) можно заметить, что свободные энергии элементарных кристаллических ячеек в SN- и SAN-фазах совпадают с точностью до знака нулевой компоненты обменного интеграла K_0 .

Геометрический образ квадрупольных средних схематически показан на рис. 5. Как видно из рисунка, вектор-директоры в кристаллической ячейке в сумме дают ноль, тем самым реализуя SAN-конфигурацию.

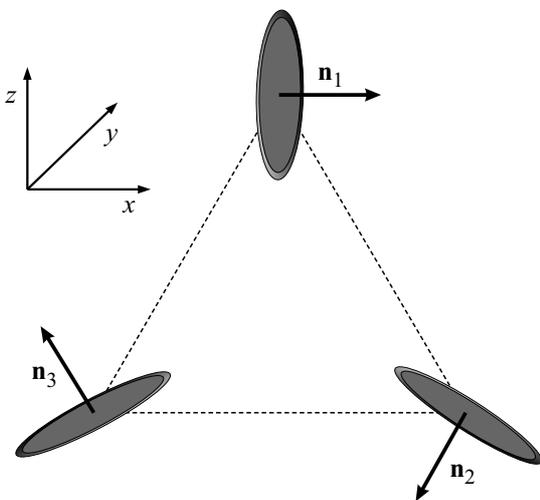


Рис. 5. Геометрический образ квадрупольных средних в SAN-фазе.

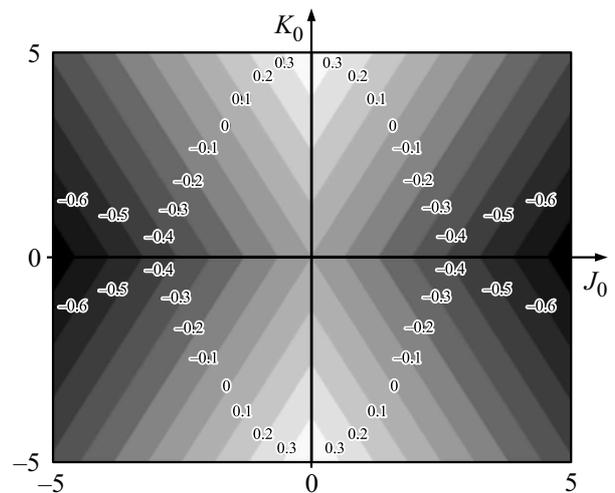


Рис. 6. Фазовая диаграмма негейзенберговского изотропного магнетика с $S = 3/2$ на кристаллической решетке треугольной симметрии.

7. Фазовая диаграмма системы и обсуждение результатов

В работе проведен анализ плотности свободной энергии негейзенберговского изотропного магнетика с $S = 3/2$ с размерностью $d \geq 2$, что позволяет применять приближение среднего поля, и треугольной решеткой, допускающей разбиение на три эквивалентные подрешетки. В рассматриваемой системе при различных соотношениях материальных параметров возможна реализация только четырех фазовых состояний. Кроме состояний с преобладающим гейзенберговским обменом, характеризуемых векторным параметром порядка (FM- и AFM-фазы), в магнетике с $S = 3/2$ и преобладающими высшими обменными интегралами возможна реализация состояний с тензорными параметрами порядка — SN- и SAN-фазы. Основную роль в свойствах этих фаз играют средние, кубические по компонентам спиновых операторов, прежде всего, октупольный параметр порядка q_3^3 , содержащий средние типа $\langle (S_x \pm iS_y)^3 \rangle$. Формирование октупольного порядка связано с учетом бикубического обменного взаимодействия.

Используя полученные результаты можно построить фазовую диаграмму негейзенберговского магнетика с $S = 3/2$ для различных соотношений между обменными интегралами. Поскольку общий энергетический масштаб в рассмотренном случае нулевой температуры не существен, фактически важны лишь соотношения обменных интегралов. Для наглядного представления результатов можно ввести два независимых параметра, в качестве которых удобно выбрать K, J , а бикубическое обменное взаимодействие задавать уравнением $L = \text{const}$ с шагом ± 0.1 . Таким образом, устойчивые фазовые состояния разделены четырьмя поверхностями в пространстве (J, K, L) . Фазовая диаграмма представлена на рис. 6.

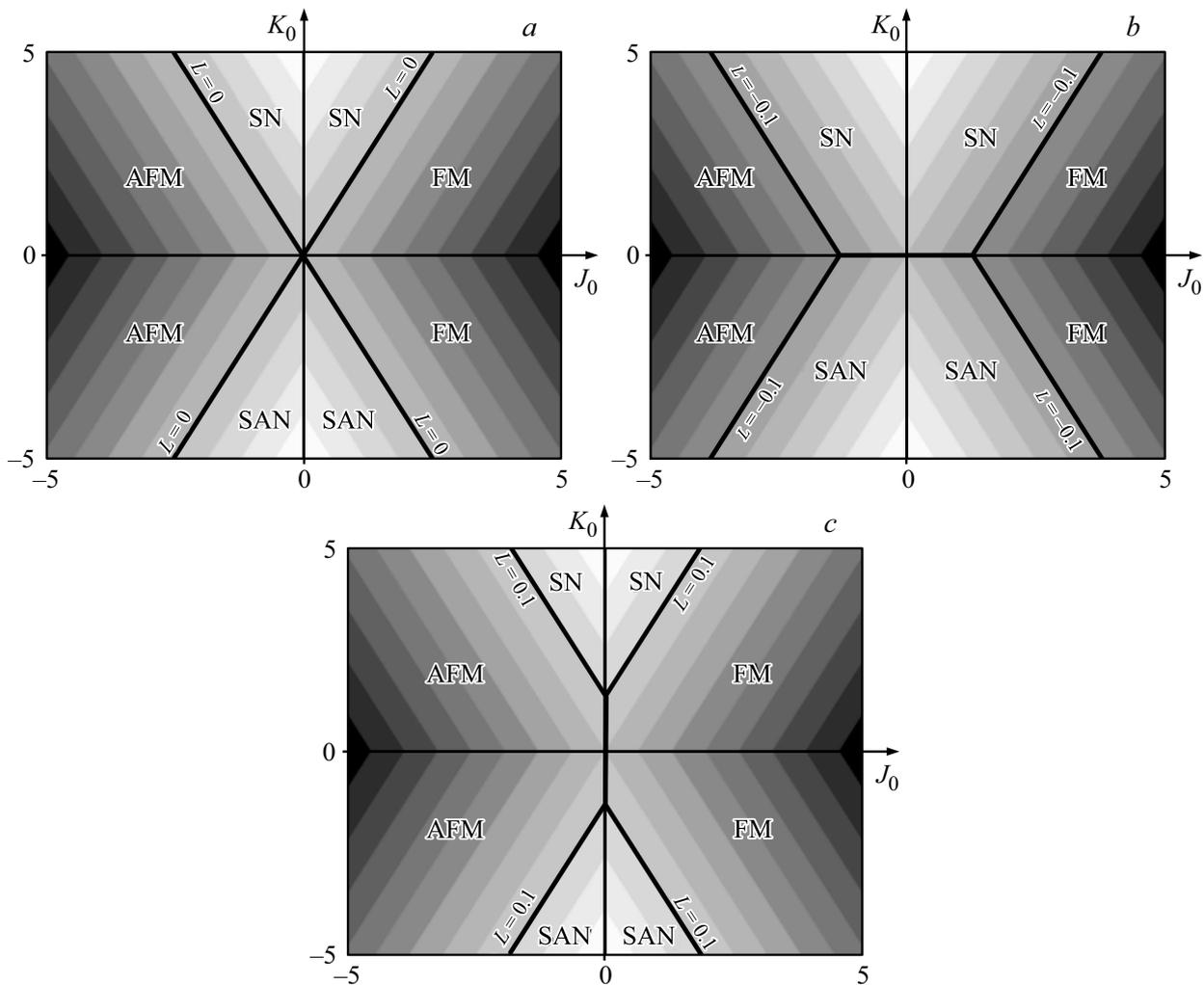


Рис. 7. Фазовая диаграмма негейзенберговского изотропного магнетика с $S = 3/2$ на кристаллической решетке треугольной симметрии при различных значениях константы бикубического взаимодействия: а) $L = 0$; б) $L = 0.1$; в) $L = 0.1$.

Более наглядным являются сечения фазовой диаграммы при фиксированных значениях константы бикубического обменного взаимодействия (см. рис. 7, а, б, в).

Уравнения поверхностей, на которых происходят фазовые переходы, определяются из равенства плотности свободной энергии в соответствующих фазах и имеют вид

$$\Lambda_{\text{FM-SN}} = J_0 - \frac{1}{2}K_0 + \frac{103}{16}L_0 = 0 \quad (J_0 > 0),$$

$$\Lambda_{\text{SAN-FM}} = J_0 + \frac{1}{2}|K_0| + \frac{103}{16}L_0 = 0 \quad (J_0 > 0),$$

$$\Lambda_{\text{AFM-SAN}} = |J_0| - \frac{1}{2}|K_0| - \frac{103}{16}L_0 = 0 \quad (J_0 < 0),$$

$$\Lambda_{\text{SN-AFM}} = |J_0| - \frac{1}{2}K_0 + \frac{103}{16}L_0 = 0 \quad (J_0 < 0).$$

FM-фаза устойчива в области $\Lambda_{\text{FM-SN}} > 0$, $\Lambda_{\text{FM-SAN}} > 0$, а AFM-фаза при $\Lambda_{\text{AFM-SAN}} < 0$, $\Lambda_{\text{SN-AFM}} < 0$. SN-фаза существует в интервале

параметров $\Lambda_{\text{FM-SN}} < 0$, $\Lambda_{\text{SN-AFM}} > 0$, а SAN-фаза устойчива в области $\Lambda_{\text{AFM-SAN}} > 0$, $\Lambda_{\text{SAN-FM}} < 0$, то есть между лучами этих линий, расположенных при $L > 0$ или $L < 0$ соответственно. Как и в случае $S = 1$, для модели со спином $S = 3/2$ линии переходов характеризуются более высокой симметрией. Однако в нашем случае ситуация является более интересной, поскольку области существования всех четырех фаз соприкасаются в точке $2J = K$, $L = 0$ ($K = 0$, $J = 0$ на рис. 7, а). В этой точке все четыре фазы имеют одинаковую энергию.

Фазовые состояния рассматриваемой системы характеризуются ненулевыми квадрупольными и октопольными средними. Квадрупольные средние, в отличие от системы со спином $S = 1$, не являются определяющими для описания симметрии фаз, а в векторных фазах основными являются дипольные параметры порядка.

Вопрос о динамических свойствах рассматриваемой системы и типах фазовых переходов остается открытым, поскольку выходит за рамки текущего исследования.

Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1992).
- [2] А.Ф. Андреев, В.И. Марченко. УФН **130**, 39 (1980).
- [3] С.В. Вонсовский. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро и ферромагнетиков. Наука, М. (1971).
- [4] A.F. Andreev, I.A. Grishchuk. Sov. Phys. JETP **60**, 267 (1984).
- [5] K. Buchta, G. Fátth, Ö. Legeza, J. Sólyom. Phys. Rev. **72**, 054433 (2005).
- [6] A. Läuchli, G. Schmid, S. Trebst. Phys. Rev. **74**, 144426 (2006).
- [7] N. Paranikolaou. Nucl. Phys. **305**, 367 (1988).
- [8] Э.Л. Нагаев. Магнетики со сложными обменными взаимодействиями. Наука, М. (1988).
- [9] Ф.П. Онуфриева. ЖЭТФ **80**, 2372 (1981).
- [10] V.V. Val'kov, T.A. Val'kova. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **99**, 1881 (1991).
- [11] Ph.N. Klevets, O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman. JMMM **330**, 91 (2013).
- [12] Yu.A. Sakhratov, L.E. Svistov, P.L. Kuhns, H.D. Zhou, A.P. Reyes. Phys. Rev. B **94**, 094410 (2016).
- [13] Yu.A. Sakhratov, J.J. Kweon, E.S. Choi, H.D. Zhou, L.E. Svistov, A.P. Reyes. Phys. Rev. B **97**, 094409 (2018).
- [14] П. де Жен. Физика жидких кристаллов. Наука, М. (1977).
- [15] Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, Ph.N. Klevets. JMMM **325**, 125 (2013).
- [16] T.A. Toth, A. Lauchli, F. Mila, K. Penc. Phys. Rev. B **85**, 140403(R) (2012).
- [17] A. Lauchli, F. Mila, K. Penc. Phys. Rev. Lett. **97**, 087205 (2006).
- [18] A. Smerald, N. Shannon. Phys. Rev. B **88**, 184430 (2013).
- [19] M. Arikawa, H. Tsunetsugu. JMMM **310**, 1308 (2007).
- [20] R.K. Kaul. Phys. Rev. B **86**, 104411 (2012).
- [21] T. Momoi, P. Sindzingre, K. Kubo. Phys. Rev. Lett. **108**, 057207 (2012).
- [22] О.А. Космачев, Ю.А. Фридман, Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов. ЖЭТФ **147**, 320 (2015).
- [23] V.I. Marchenko. JETP Lett. **48**, 427 (1988).
- [24] A.V. Chubukov, K.I. Ivanova, P.Ch. Ivanov, E.R. Korutcheva. J. Phys.: Condens. Matter **3**, 2665 (1991).
- [25] V.M. Loktev, V.S. Ostrovskii. Low Temp. Phys. **20**, 775 (1994).
- [26] B.A. Ivanov, A.K. Kolezhuk. Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003).
- [27] K. Butcha, G. Fath, O. Legeza, J. Solyom. Phys. Rev. B **72**, 054433 (2005).
- [28] A. Lauchli, G. Schmid, S. Trebst. Phys. Rev. B **74**, 144426 (2006).
- [29] C. Wu, J.P. Hu, S.C. Zhang. Phys. Rev. Lett. **91**, 186402 (2003).
- [30] C. Wu. Mod. Phys. Rev. Lett. B **20**, 1707 (2006).
- [31] C. Wu. Phys. Rev. Lett. **95**, 266404 (2005).
- [32] H.-H. Tu, G.-M. Zhang, L. Yu. Phys. Rev. B **74**, 174404 (2006).
- [33] F. Zhou, M. Snoek. Ann. Phys. (N.Y.) **308**, 692 (2003).
- [34] В.В. Вальков. ТМФ **76**, 143 (1988).
- [35] Р.О. Зайцев. ЖЭТФ **68**, 207 (1975).
- [36] Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, Ph.N. Klevets. JMMM **320**, 435 (2008).
- [37] Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, Ph.N. Klevets. Euro. Phys. J. B **81**, 185 (2011).
- [38] Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, A.K. Kolezhuk, B.A. Ivanov. Phys. Rev. Lett. **106**, 097202 (2011).
- [39] Е.А. Туров. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. Изд-во АН СССР, М. (1963).

Редактор Т.Н. Василевская