

05  
**Моделирование реономного поведения сегнетоэлектрoупругих материалов при циклическом нагружении**

© А.С. Семенов, С.М. Лобанов<sup>†</sup>

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

<sup>†</sup> e-mail: slobanov92@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 4 апреля 2017 г. В окончательной редакции 14 марта 2018 г.)

Предложена феноменологическая модель нелинейного связанного электромеханического поведения поликристаллической сегнетопьезокерамики при сложном многоосном воздействии, учитывающая чувствительность к скорости нагружения и ориентированная на использование при решении краевых задач. В рамках единой модели рассмотрена возможность описания эффектов ползучести и чувствительности кривых гистерезиса к частоте внешнего воздействия. Произведено сравнение прогнозов модели с результатами экспериментов на макроскопических образцах из сегнетопьезокерамики PZT PIC 151 при циклическом нагружении. Сравнение результатов расчетов с прогнозами альтернативных моделей продемонстрировало более высокую точность предложенной модели.

DOI: 10.21883/JTF.2018.10.46496.2286

## Введение

Поликристаллическая сегнетопьезокерамика находит широкое применение на практике в качестве элементов топливных инжекторов, нанопозиционеров, микромоторов, гасителей вибраций, пьезотрансформаторов, приводов электронных микроскопов. Для корректной оценки точности позиционирования, прочности и долговечности вышеперечисленных устройств требуется учет нелинейного связанного электромеханического поведения, чувствительного к скорости нагружения. Это приводит к необходимости разработки и использования в расчетах моделей материала, учитывающих эффекты вязкости.

Экспериментальное изучение реономных эффектов сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков (называемых далее сегнетоэлектрoупругими материалами), начинающееся с прямого анализа времени переполяризации и динамики доменной структуры [1] и охватывающее исследование процессов неустановившейся ползучести деформаций [2–7] и поляризации [2–4,8] на макроуровне, релаксацию напряжений [9] и электрического поля [10], чувствительность кривых диэлектрического [11,12] и электромеханического гистерезиса (в форме бабочки) [11,12] к частоте внешнего воздействия, служит основой для разработки и верификации моделей материала. Трудности исследования неравновесных явлений в полидоменных сегнетоэлектрoупругих материалах связаны с их неоднородностью вследствие наличия доменных стенок, обладающих множеством метастабильных состояний, отделенных друг от друга и от основного равновесного состояния большими энергетическими барьерами из-за наличия дефектов. В результате одновременно наблюдаются как быстрые процессы переполяризации, так и медленные термоактивационные процессы [10].

Первые феноменологические модели сегнетоэлектрoупругого материала были предложены В.Л. Гинзбургом [13] и А.Ф. Девонширом [14]. В этих моделях,

основанных на теории фазовых переходов Ландау, для свободной энергии используется полиномиальное представление с четными степенями параметра порядка, в качестве которого вводилась поляризация. Простейшая модель кинетики переключения определяется уравнением Ландау–Халатникова [15], описывающим пространственно однородное (бездоменное) переключение. Учет доменного механизма переключения произведен в модели Колмогорова–Аврами–Ишибаши [16–19] на основе использования статистической теории процессов зарождения и неограниченного роста доменов. Кинетика начальной стадии переключения одноосных сегнетоэлектриков-сегнетоэластиков в области слабой метастабильности описана в работе [20]. Релаксационная модель процессов переключения в кристаллических сегнетоэлектриках рассмотрена в работах [21,22].

При решении трехмерных связанных краевых задач для элементов конструкций с нетривиальной геометрией в условиях, близких к изотермическим при температурах значительно ниже температуры Кюри, использование в расчетах микромеханических моделей материала, детально учитывающих кинетику доменной структуры, требует значительных вычислительных затрат и большого объема исходных экспериментальных данных. Поэтому наиболее рационально использование феноменологических (макроскопических) моделей сегнетоэлектрoупругого материала, демонстрирующих экономичность процедур численного решения краевых задач [23] и обладающих простотой методов определения характеристик материала. Примеры подобных моделей рассматривались в [24–27]. Областью применения данного класса макроскопических моделей является анализ процессов деформирования, первичной поляризации, прочности, долговечности и трещиностойкости элементов перечисленных выше конструкций.

На основе использования принципа максимума диссипации при описании нелинейного склерономного

поведения поликристаллической сегнетопъезокерамики, Ч. Ландисом предложена трехмерная связанная феноменологическая модель [26]. В настоящей работе рассматривается дальнейшее развитие этой модели в целях наиболее точного предсказания реономного поведения сегнетоэлектрорупругого материала. Сравнение прогноза предложенной модели при постоянном уровне внешнего воздействия (ползучести) производилось в [28]. Целью выполненных исследований является сравнение поведения модели при циклическом нагружении с результатами экспериментов и с прогнозами других моделей, получивших наиболее широкое распространение на практике.

### 1. Определяющие уравнения

В соответствии с парадигмой стандартного материала с диссипацией [29] для задания определяющих уравнений (уравнений состояния) вводятся два потенциала: плотность свободной энергии (термодинамический потенциал Гельмгольца)  $\Psi$  и потенциал диссипации  $\Phi$ . Зависимость от истории нагружения учитывается на основе введения двух внутренних переменных состояния: тензора остаточных деформаций  $\varepsilon^r$  и вектора поляризации  $\mathbf{P}^r$ . Принимается представление свободной энергии, включающее обратимую и необратимую части [26]:

$$\Psi = \Psi^s(\varepsilon, \mathbf{D}, \varepsilon^r, \mathbf{P}^r) + \Psi^r(\varepsilon^r, \mathbf{P}^r). \quad (1)$$

Использование концепции стандартного материала с диссипацией обеспечивает условия существования и единственности решения начально-краевой задачи.

В предположении линейного пьезоэлектрического отклика первое слагаемое  $\Psi^s$  в выражении (1) определяется уравнением [26]:

$$\Psi^s = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^r) \cdot \cdot {}^4C^D \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^r) - (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r) \cdot {}^3\mathbf{h} \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^r) + \frac{1}{2} (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r) \cdot \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — тензор деформации,  $\mathbf{D}$  — вектор электрического смещения,  ${}^4C^D$  — тензор упругих модулей (четвертого ранга, обладает симметрией  $C_{ijkl}^D = C_{jikl}^D = C_{ijlk}^D = C_{klij}^D$ ),  $\boldsymbol{\beta}^\varepsilon$  — тензор диэлектрической проницаемости (второго ранга, обладает симметрией  $\beta_{ij}^\varepsilon = \beta_{ji}^\varepsilon$ ),  ${}^3\mathbf{h}$  — тензор пьезоэлектрических коэффициентов (третьего ранга, обладает симметрией  $h_{ijk} = h_{ikj}$ ). Вышеперечисленные тензоры  ${}^3C^D$ ,  $\boldsymbol{\beta}^\varepsilon$ ,  ${}^3\mathbf{h}$  допускают в общем случае зависимость от внутренних переменных.

Определяющие уравнения, получаемые из условия неотрицательности диссипации, позволяют определить на основе выражения обратимо запасенной свободной энергии  $\Psi^s$  тензор напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  и вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  [23]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \partial_\varepsilon \Psi = {}^4C^D \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^r) - (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r) \cdot {}^3\mathbf{h}, \\ \mathbf{E} = \partial_{\mathbf{D}} \Psi = -{}^3\mathbf{h} \cdot \cdot (\varepsilon - \varepsilon^r) + \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r). \end{cases} \quad (3)$$

Необратимая часть свободной энергии  $\Psi^r$  определяет форму гистерезисных кривых (упрочнение и насыщение) и допускает представление в виде аддитивного разложения на чисто электрическую  $\Psi^e$ , чисто механическую и  $\Psi^m$  и смешанную  $\Psi^{em}$  составляющие:

$$\Psi^r(\varepsilon^r, \mathbf{P}^r) = \Psi^e(\mathbf{P}^r) + \Psi^{em}(\varepsilon^r, \mathbf{P}^r) + \Psi^m(\varepsilon^r). \quad (4)$$

Степенные зависимости могут рассматриваться в качестве простейших аналитических аппроксимаций [26]:

$$\Psi^e(|\mathbf{P}^r|) = \frac{H_e P_0^2}{m_e - 1} \left[ \frac{1}{m_e - 2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{P}^r|}{P_0} \right)^{2-m_e} - \frac{|\mathbf{P}^r|}{P_0} \right], \quad (5)$$

где  $H_e, P_0, m_e$  — константы материала, определяющие начальное упрочнение, поляризацию насыщения и показатель, характеризующий скорость насыщения. Выражения для  $\Psi^m$  и  $\Psi^{em}$  вводятся аналогичным образом (см. [26]).

Обобщенные силы  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  и  $\hat{\mathbf{E}}$ , сопряженные с внутренними переменными  $\varepsilon^r$  и  $\mathbf{P}^r$ , определяются равенствами

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\partial_{\varepsilon^r} \Psi = \boldsymbol{\sigma} - \partial_{\varepsilon^r} \Psi^r = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_B, \\ \hat{\mathbf{E}} = -\partial_{\mathbf{P}^r} \Psi = \mathbf{E} - \partial_{\mathbf{P}^r} \Psi^r = \mathbf{E} - \mathbf{E}_B, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_B = \partial_{\varepsilon^r} \Psi^r$  и  $\mathbf{E}_B = \partial_{\mathbf{P}^r} \Psi^r$  — тензор микронапряжений и вектор остаточного электрического поля, характеризующие кинематическое упрочнение.

Диссипативное неравенство с использованием обобщенных сил допускает представление

$$\delta = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\varepsilon} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \dot{\Psi} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \dot{\varepsilon}^r + \hat{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{P}}^r \geq 0. \quad (7)$$

В пространстве обобщенных сил задается диссипативный потенциал (второй базовый потенциал, потенциал ползучести), определяемый выражением

$$\Phi = A \left( \frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}}{E_H^2} + \frac{3 \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{2 \sigma_H^2} + \beta \frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{E}}}{E_H^2 \sigma_H^2} \right)^{m_v}, \quad (8)$$

где  $\hat{\mathbf{s}} = dev \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - 1tr \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  — девиатор активных напряжений,  $A$  и  $m_v$  — константы материала, характеризующие вязкие свойства,  $E_H$  и  $\sigma_H$  — скалярнозначные функции внутренних переменных, позволяющие учесть изотропное упрочнение. Введение последних принципиально для корректного описания процессов неустановившейся ползучести [28]. Безразмерный параметр  $\beta$  определяет эффекты перекрестной электромеханической связанности. При ограничении рассмотрением чисто механического поведения выражение в правой части (8) сводится к интенсивности напряжений по Мизесу.

Для внутренних переменных (тензора остаточных деформаций  $\varepsilon^r$  и вектора спонтанной поляризации  $\mathbf{P}^r$ ) вводятся уравнения эволюции, построенные по аналогии с нелинейным вязким телом:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^r = \partial_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \Phi, \\ \dot{\mathbf{P}}^r = \partial_{\hat{\mathbf{E}}} \Phi. \end{cases} \quad (9)$$

Выбор уравнений эволюции в виде (9) позволяет априори удовлетворить условию неотрицательности диссипации (7) для выпуклой функции  $\Phi(\hat{\sigma}, \hat{\mathbf{E}})$ . Условия выпуклости выполняются при изменении параметра  $\beta$  в диапазоне  $0 \leq \beta \leq 3$ .

Входящие в (8) функции  $E_H$  и  $\sigma_H$  могут быть выражены через функции упрочнения при ползучести  $h_e$  и  $h_m$ :

$$\begin{cases} E_H(|\mathbf{P}^r|) = E_c h_e^{-1/2m_v}(|\mathbf{P}^r|), \\ \sigma_H(\|\varepsilon^r\|) = \sigma_c h_m^{-1/2m_v}(\|\varepsilon^r\|), \end{cases} \quad (10)$$

где  $E_c$  и  $\sigma_c$  — коэрцитивное электрическое поле и напряжение. При исключении возможности описания изотропного упрочнения принимается  $E_H = E_c$ ,  $\sigma_H = \sigma_c$ .

При описании процессов ползучести функции  $h_e$  и  $h_m$  оказывают непосредственное влияние на вид кривых ползучести и позволяют описать неустановившуюся стадию ползучести. Это может быть показано, например, при рассмотрении одноосного воздействия вдоль оси  $\mathbf{e}_3$  ( $\mathbf{E} = \mathbf{e}_e E_e$  или  $\sigma = \mathbf{e}_3 \sigma_{33}$ ), для которого следствием уравнений эволюции (9) с учетом (8) и (10) получаются соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{P}_3^r &= \frac{2m_v A}{E_c} \left( \frac{E_3 - E_{B3}}{E_c} \right)^{2m_v-1} h_e(P_3^r), \\ \dot{\varepsilon}_{33}^r &= \frac{2m_v A}{\sigma_c} \left( \frac{\sigma_{33} - \sigma_{B33}}{\sigma_c} \right)^{2m_v-1} h_m(\varepsilon_{33}^r). \end{aligned} \quad (11)$$

Размерность констант  $\dot{P}_0^r = 2m_v A/E_c$  и  $\dot{\varepsilon}_0^r = 2m_v A/\sigma_c$ , входящих в (11), совпадает с размерностью величин, стоящих в левых частях введенных равенств. Величины, стоящие в круглых скобках, и последние множители  $h_e$  и  $h_m$  являются безразмерными.

Ниже будет проанализирован ряд моделей сегнето-электроупругого материала с позиции возможности их представления в рамках рассмотренного формализма вычисления внутренних переменных (8)–(10) и предлагаемого этими моделями варианта вычисления функции упрочнения. При этом для простоты ограничимся случаем чисто электрического нагружения.

В исходной модели Ландиса 2002 г. [26] изотропное упрочнение не учитывается

$$h_e^L \equiv 1. \quad (12)$$

Модель Лиу–Хубера 2006 г. [8] может рассматриваться как частный случай в рамках используемого подхода (8)–(10) при

$$h_e^{LH} = \frac{\exp(-g(|\mathbf{P}^r|))}{t_0 g'(|\mathbf{P}^r|)}, \quad (13)$$

$$g(|\mathbf{P}^r|) = \frac{P_s}{P_s - |\mathbf{P}^r|} - \frac{P_s}{P^* + |\mathbf{P}^r|}, \quad (14)$$

где  $P^*$  и  $P_s$  — константы материала, характеризующие начальную и предельно допустимую поляризацию.

Функция упрочнения  $h_e^{LH}$  вводится как функция абсолютного значения вектора поляризации. В данной модели предполагается отсутствие кинематического упрочнения  $\mathbf{E}_B = 0$ . Механическое поведение в модели Лиу–Хубера не рассматривалось.

В модели Белова–Креера 2009 г. [30] функция упрочнения определяется в пространстве обобщенных сил следующим образом:

$$\begin{aligned} h_e^{BK} &= \frac{1}{E_2 - E_1} \frac{E_*}{m} \exp\left(-m \left[1 - \frac{|\hat{\mathbf{E}}| - E_1}{E_*}\right]\right) \\ &\times \begin{cases} 1 - \exp\left(-m \frac{|\hat{\mathbf{E}}| - E_1}{E_*}\right), & E_1 < |\hat{\mathbf{E}}| < E_2, \\ 1 - \exp\left(-m \frac{E_2 - E_1}{E_*}\right), & E_2 < |\hat{\mathbf{E}}|, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где  $E_1, E_2, E_*, m$  — константы материала. В модели произведен учет кинематического упрочнения.

В настоящей работе вводится степенная функция упрочнения  $h_e$ , как упрощение функций, предложенных Лиу–Хубером (13) и Беловым–Креером (15):

$$h_e = \left(\frac{|\mathbf{P}^r|}{P_0}\right)^n \left(1 - \frac{|\mathbf{P}^r|}{P_0}\right)^k, \quad (16)$$

где  $P_0$  — предельная поляризация при насыщении,  $n$  и  $k$  — константы материала. Первый множитель в правой части (16) характеризует упрочнение и позволяет описать неустановившуюся стадию ползучести (вводится по аналогии с моделями ползучести металлов), а второй множитель необходим для описания насыщения (при стремлении  $|\mathbf{P}^r|$  к  $P_0$  функция  $h_e$  стремится к нулю, блокируя дальнейшее изменение  $\mathbf{P}^r$ ).

В модели Ландау–Гинзбурга–Халатникова в качестве необратимой части свободной энергии вместо (5) используется полиномиальное представление:

$$\Psi^e = \frac{\alpha}{2} |\mathbf{P}^r|^2 + \frac{\beta}{4} |\mathbf{P}^r|^4,$$

где  $\alpha, \beta$  — константы материала. Уравнение Ландау–Халатникова [15]  $\xi \dot{\mathbf{P}}^r = -\partial_{\mathbf{P}^r} \Psi$ , где  $\xi$  — коэффициент демпфирования (феноменологический параметр, определяющий скорость переключения) приводит к уравнению эволюции  $\mathbf{P}^r$  (для переходов первого рода):

$$\xi \dot{\mathbf{P}}^r = \mathbf{E} - \alpha \mathbf{P}^r - \beta |\mathbf{P}^r|^2 \mathbf{P}^r. \quad (17)$$

Уравнение (17) также может быть получено на основе (8)–(10) при  $m_v = 1/2$ ,  $A = E_c/\xi$  и

$$h_e^{LGH} \equiv 1. \quad (18)$$

Вектор остаточного электрического поля  $\mathbf{E}_B = \partial_{\mathbf{P}^r} \Psi^r$  в этом случае вычисляется на основе выражения  $\mathbf{E}_B = \alpha \mathbf{P}^r + \beta |\mathbf{P}^r|^2 \mathbf{P}^r$ . Следует отметить, что уравнение (17) описывает кинетику собственного переключения, не связанного с движением доменов.

При описании кинетики переключения сегнетоэлектрических материалов (за исключением сверхтонких пленок) широкое распространение получила доменная теория Колмогорова–Аврами–Ишибаши [16–19]. В соответствии с данным подходом при одноосном циклическом нагружении  $E = h(ft)$  на этапе нагрузки поляризация определяется равенством [19]

$$P^r = P_0\{1 - 2 \exp[-f^d \Phi(E)]\}, \quad (19)$$

где  $f$  — частота,  $h$  — периодическая функция,  $d$  — параметр, зависящий от формы растущих доменов и способа их зарождения

$$\Phi(E) = \int_0^E C_d \left[ \int_{E'}^E v(E'') \{h'(h^{-1}(E''))\}^{-1} dE'' \right]^d n_E(E') dE', \quad (20)$$

где  $v(E)$  — скорость движения доменной стенки, которая принимается пропорциональной внешнему электрическому полю с некоторым коэффициентом  $a$ , являющимся дополнительным параметром модели:  $v(E) = aE$ ,  $n_E(E)$  — количество зародышей на единицу объема,  $C_d$  — константа, определяемая формой растущих доменов ( $C_d = 2$ ,  $d = 1$  для доменов с параллельными доменными стенками). Зависимость объемной доли переключившихся доменов  $q = (P^r/P_0 + 1)/2$  от времени для стохастического процесса зародышеобразования определяется выражением [19]

$$q = 1 - \exp[-t^{d+1} \Psi(E)], \quad (21)$$

где  $\Psi(E) = C_d v^2(E) n(E) / (d + 1)$ .

Соотношения, введенные выше для шести различных моделей для вычисления поляризации, могут быть обобщены и на случай вычисления тензора остаточной деформации. Однако на практике получила широкое распространение упрощенная квадратичная связь между деформациями и поляризациями [27]

$$\epsilon^r = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0}{P_0^2} \text{dev}(\mathbf{P}^r \mathbf{P}^r) = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0}{P_0^2} \left( \mathbf{P}^r \mathbf{P}^r - \frac{1}{3} \mathbf{1} \mathbf{P}^r \cdot \mathbf{P}^r \right). \quad (22)$$

В одноосном случае соотношение (22) упрощается:  $\epsilon_{33}^r = \epsilon_0 (P_3^r / P_0)^2$ .

## 2. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными

При проведении расчетов использовалась программа CES (Constitutive Equation Etudio) [31], в рамках которой имплементированы все шесть вышеописанных моделей сегнетоэлектрорупругого материала.

### 2.1. Сравнение моделей при циклическом нагружении частотой $f = 0.0025$ Hz

Производится сравнение результатов расчетов с результатами экспериментов Жу [32] на изначально непо-

ляризованных образцах поликристаллической сегнето-пьезокерамики PZT PIC151 при переменном пилообразном электрическом поле с амплитудой  $E = 2$  MV/m, превышающей значение коэрцитивного поля  $E_c = 1$  MV/m, и частотой  $f = 0.0025$  Hz. Размер образцов составлял  $5 \times 5 \times 15$  mm<sup>3</sup>. Испытания проводились при комнатной температуре.

Результаты моделирования первого цикла нагружения с использованием моделей Ландау–Гинзбурга, Лиу–Хубера, Колмогорова–Аврами–Ишибаши и предложенной модели (16) с параметрами, указанными в табл. 1–4, представлены на рис. 1. Значение предельной остаточной деформации во всех моделях принималось равным  $\epsilon_0 = 3.3\%$ .

Из рис. 1, а видно, что при использовании модели Ландау–Гинзбурга удается получить близкие к экспериментальным данным значения основных параметров гистерезиса — предел остаточной поляризации и коэрцитивное поле, однако форма гистерезиса при расчете по этой модели заметно отличается от экспериментальной. Использование модели Лиу–Хубера позволяет улучшить точность по форме кривой нагрузки тем не менее при разгрузке наблюдаются значительные отличия. Схожая точность результатов наблюдается и при использовании моделей Ландиса и Белова–Креера. Модель Колмогорова–Аврами–Ишибаши позволяет повысить точность, но полного совпадения на всех участ-

**Таблица 1.** Параметры модели Ландау–Гинзбурга (17), (18) для PZT PIC151

$E_c$ , MV/m	$\alpha$ , MV m/s	$\beta$ , MV m <sup>5</sup> /s <sup>3</sup>	$A$ , C/m <sup>2</sup>	$m_v$
1	–2 400 000	60 000 000	30 000	0.5

**Таблица 2.** Параметры модели Лиу–Хубера (13), (14) для PZT PIC151

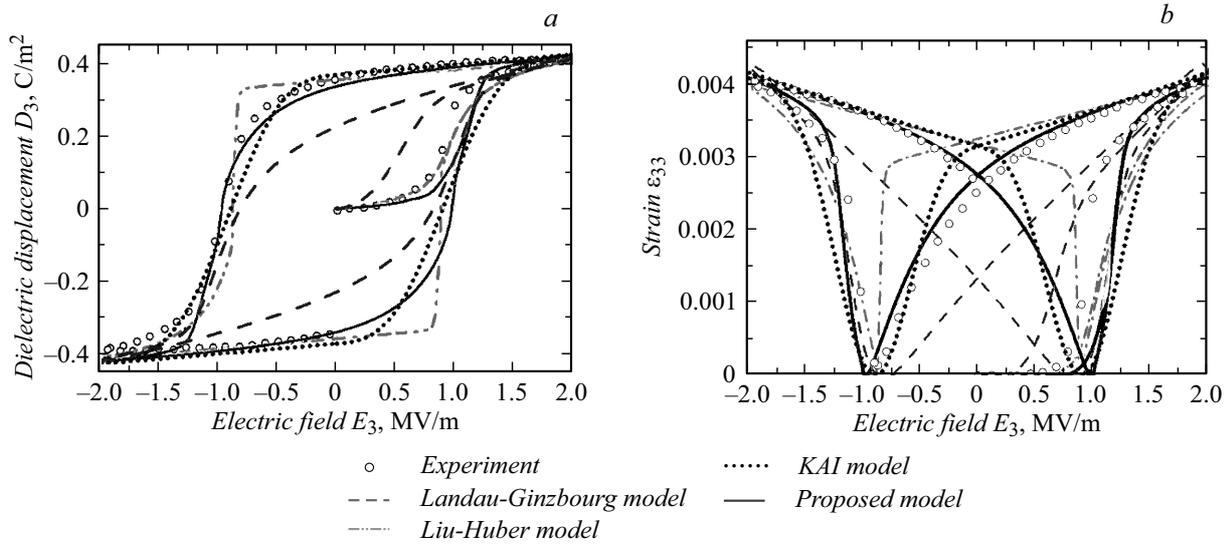
$E_c$ , MV/m	$P_s$ , C/m <sup>2</sup>	$P^*$ , C/m <sup>2</sup>	$H_0^e$ , m/F	$m_e$	$A$ , C/m <sup>2</sup>	$m_v$
1	0.39	0.01	400 000	1.4	$1.5 \cdot 10^8$	11.5

**Таблица 3.** Параметры модели Колмогорова–Аврами–Ишибаши (19), (20) для PZT PIC151

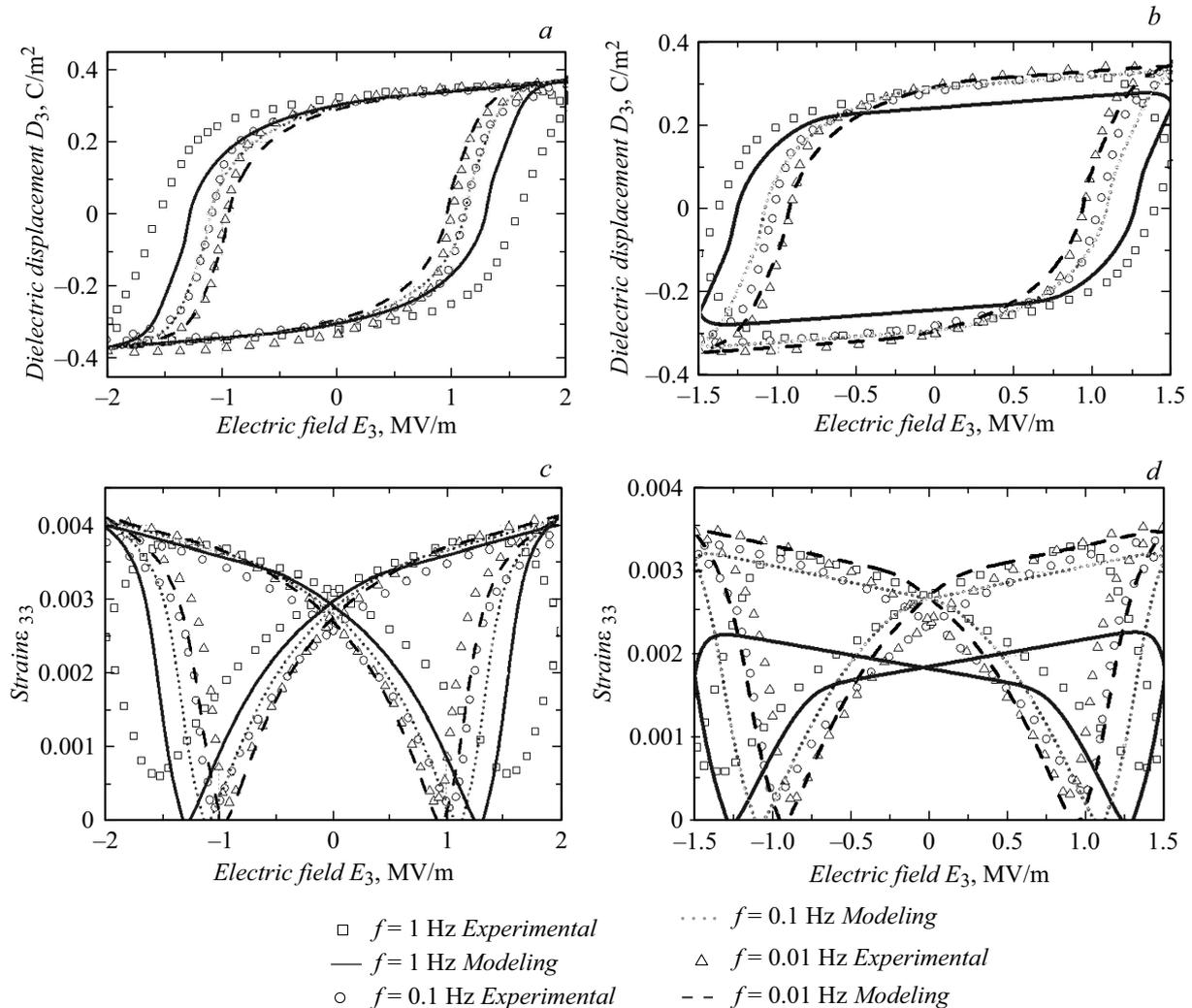
$P_0$ , C/m <sup>2</sup>	$a$ , m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> /V	$d$	$C_d$	$N_0$	$n_0$
0.37	$2 \cdot 10^{-14}$	1	2	1	1.3

**Таблица 4.** Параметры предложенной модели (16) для PZT PIC151

$E_c$ , MV/m	$P_0$ , C/m <sup>2</sup>	$H_0^e$ , m/F	$m_e$	$A$ , C/m <sup>2</sup>	$m_v$	$n$	$k$
1	0.37	400 000	1.4	1000	5.5	–1.2	–1.7



**Рис. 1.** Сравнение результатов расчета с экспериментом при циклическом воздействии переменным электрическим полем  $E = 2 \text{ MV/m}$ ,  $f = 0.0025 \text{ Hz}$ : *a* —  $D$ – $E$ -гистерезис; *b* —  $\epsilon$ – $E$ -гистерезис.



**Рис. 2.** Сравнение результатов расчета с экспериментом при циклическом воздействии переменным электрическим полем при различных частотах и амплитудах: *a* —  $D$ – $E$ -гистерезис при  $E_a = 2 \text{ MV/m}$ ; *b* —  $\epsilon$ – $E$ -гистерезис при  $E_a = 2 \text{ MV/m}$ ; *c* —  $D$ – $E$ -гистерезис при  $E_a = 1.5 \text{ MV/m}$ ; *d* —  $\epsilon$ – $E$ -гистерезис при  $E_a = 1.5 \text{ MV/m}$ .

как также не удастся получить. Наилучшего совпадения результатов моделирования с экспериментальными данными удастся достичь при использовании предложенной модели (16).

Аналогичные выводы могут быть сделаны также из анализа кривых электромеханического гистерезиса (в форме бабочки), показанных на рис. 1, b.

## 2.2. Сравнение в широком диапазоне изменения амплитуд и частот

Результаты экспериментальных исследований влияния амплитуды и частоты нагружения на форму диэлектрического гистерезиса для образцов из сегнетоэлектрической керамики PZT PIC151 представлены в работе [33]. Рассматривались амплитуды  $E = 1, 1.5, 2$  MV/m и частоты нагружения  $f = 0.01, 0.1, 1$  Hz.

В расчетах использовалась предложенная модель, определяемая уравнениями (16), (9), (8). Характеристики используемого материала практически совпадают с рассмотренными в предыдущем разделе (табл. 4). Однако вследствие различий в процессе начальной поляризации для данной серии образцов использовались значения  $P_0 = 0.33$  C/m,  $H_0^e = 62\,000$  m/F,  $m = 16$ . Сравнение результатов численного моделирования с данными экспериментов при различных амплитудах и частотах представлено на рис. 2.

Анализ рис. 2 позволяет установить, что при относительно медленном нагружении (частоты порядка 0.01 и 0.1 Hz) и амплитудах, превышающих коэрцитивное поле материала, предложенная модель хорошо справляется с описанием отклика сегнетоэлектродупругого материала на циклическую электрическую нагрузку. Однако с ростом частоты, как видно из анализа экспериментальных данных, происходит изменение формы гистерезиса. При частоте  $f = 1$  Hz при увеличении электрического поля сначала происходит рост электрического смещения, а затем наблюдается его уменьшение. Предложенная модель описывает достаточно грубо появление указанного максимума.

При амплитудах воздействия, меньших коэрцитивного, наблюдается снижение точности прогноза. Для более точного описания поведения сегнетоэлектродупругих материалов в этом случае рационально использование моделей с порогом (аналог вязкопластичных моделей).

## Заключение

Проведена верификация предложенной феноменологической модели нелинейного связанного электромеханического поведения поликристаллической сегнетопьезокерамики, учитывающей чувствительность к скорости нагружения, при циклическом нагружении. Установлены границы достоверного применения предложенной модели сегнетоэлектродупругого материала в пространстве амплитуд и частот нагружения. Хорошая точность прогнозов наблюдается при амплитудах внешнего

электрического поля, превышающих коэрцитивное поле. Точность прогнозов модели падает с ростом частоты воздействия. Рассматриваемая модель непосредственно не учитывает доменный механизм переключения и ориентирована на использование при решении краевых задач с нетривиальной геометрией. В рамках единой модели оказалось возможным описание эффектов ползучести и чувствительности кривых гистерезиса к частоте внешнего воздействия. Сравнение результатов расчетов с прогнозами альтернативных моделей продемонстрировало более высокую точность предложенной модели при описании отклика материала при циклическом воздействии.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 18-19-00413.

## Список литературы

- [1] Merz W.J. // Phys. Rev. 1954. Vol. 95. P. 690–704.
- [2] Liu Q.D., Fleck N.A., Huber J.E., Chu D.P. // J. Europ. Ceramic Society. 2009. Vol. 29. P. 2289–2296.
- [3] Zhou D., Kamlah M. // Acta Materialia. 2006. Vol. 54. P. 1389–1396.
- [4] Heilig C., Haerdil K.H. // IEEE Proceed. of the 6th IEKC, Montreux. 1998. P. 503–506.
- [5] Guillon O., Thiebaud F., Delobelle P., Perreux D. // J. Europ. Ceramic Society. 2004. Vol. 24. P. 2547–2552.
- [6] Fett T., Thun G. // J. Mater. Sci. Lett. 1998. Vol. 17. P. 1929–1931.
- [7] Subbarao E.C., McQuarrie M.C., Buessem W.R. // 1957. Vol. 28. P. 1194–1200.
- [8] Liu Q.D., Huber J.E. // J. Europ. Ceramic Society. 2006. Vol. 26. P. 2799–2806.
- [9] Esakul K.A., Gerberich W.W., Koepke B.G. // J. American Ceramic Society. 1980. Vol. 63. P. 25–30.
- [10] Гладкий В.В., Кириков В.А., Нехлодов С.В., Иванова Е.С. // ФТТ. 1997. Т. 39. P. 2046–2052.
- [11] Zhou D., Kamlah M., Munz D. // Proceed. SPIE. 2001. Vol. 4333. P. 64–70.
- [12] Viehland D., Chen Y.H. // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 88. P. 6696–6707.
- [13] Гинзбург В.Л. // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. С.739–749.
- [14] Devonshire A.F. // Philos. Mag. 1949. Vol. 40. P. 1040–1063.
- [15] Ландау Л.Д., Халатников И.М. // ДАН СССР. 1954. Т. 96. С. 469.
- [16] Колмогоров А.Н. // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1937. № 3. С. 355.
- [17] Avrami M. // J. Chem. Phys. 1939. Vol. 7. P. 1003.
- [18] Ishibashi Y., Takagi Y. // J. Phys. Soc. Jpn. 1971. Vol. 31. P. 506–510.
- [19] Orihara H., Hashimoto S., Ishibashi Y.J. // Phys. Soc. Jpn. 1994. Vol. 63. P. 1031–1035.
- [20] Кукушкин С.А., Захаров М.А. // ФТТ. 2002. Т. 44. Вып. 2. С. 332–339.
- [21] Захаров А.Ю., Бичурин М.И., Yan Y., Priya S. // ЖТФ. 2014. Т. 84 Вып. 8. С. 54–58.
- [22] Захаров А.Ю., Бичурин М.И. // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 12. С. 69–73.

- [23] *Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H.* // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 2010. Vol. 81. N 10. P. 1298–1340.
- [24] *Bassiouny E., Ghaleb A.F., Maugin G.A.* // Int. J. Eng. Sci. 1988. Vol. 26. P. 1279–1295.
- [25] *Kamlah M.* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2001. Vol. 13. P. 219–268.
- [26] *Landis C.M.* // J. Mech. Phys. Sol. 2002. Vol. 50. P. 127–152.
- [27] *McMeeking R.M., Landis C.M.* // Int. J. Eng. Sci. 2002. Vol. 40. P.1553–1577.
- [28] *Semenov A., Lobanov S.* // Appl. Mechanics and Materials. 2015. Vol. 725–726. P. 961–966.
- [29] *Halphen B., Nguyen Q.S.* // Journ. de Mecanique. 1975. Vol. 14. P. 39–63.
- [30] *Belov A.Yu., Kreher W.S.* // Ferroelectrics. 2009. Vol. 391. P. 12–21.
- [31] *Семенов А.С.* Вычислительные методы в теории пластичности. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008. 211 с.
- [32] *Zhou D.* Experimental investigation of non-linear constitutive behavior of PZT ceramics. Thesis. Germany: Universitat Karlsruhe, 2003. 156 p.
- [33] *Zhou D., Kamlah M., Munz D.* // Proc. SPIE. Int. Soc. Opt. Eng. 2001. Vol. 4333. P. 64–70.