

03
О линейной неустойчивости течений несжимаемой полимерной жидкости с сильным разрывом

© А.М. Блохин,^{1,2} А.Ю. Голдин²

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
 e-mail: blokhin@math.nsc.ru, goldinandrey@list.ru

(Поступило в Редакцию 20 июня 2017 г. В окончательной редакции 10 ноября 2017 г.)

Сконструированы растущие по времени частные решения линеаризованных уравнений несжимаемой полимерной жидкости при наличии сильных разрывов.

DOI: 10.21883/JTF.2018.10.46493.2394

Введение

Вопрос об устойчивости (или неустойчивости) стационарных решений уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости является чрезвычайно важным с практической точки зрения.

В настоящей работе мы обсуждаем вопрос об устойчивости слоистого течения, находящегося в состоянии покоя (в состоянии механического равновесия). В линейной постановке сконструированы растущие по времени частные решения линеаризованной системы уравнений полимерной жидкости. Для описания течений полимерной жидкости мы используем математическую модель, предложенную в монографии [1], см. также работу [2].

Предварительные сведения

Следуя [1], сформулируем обобщенную реологическую модель Виноградова–Покровского, которая описывает течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости (например, в плоском канале (рис. 1)). В безразмерной форме (процесс обезразмеривания подробно описан в [2]) эта математическая модель имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div} \Pi, \\ \frac{da_{11}}{dt} - 2A_1 u_x - 2a_{12} u_y + K_I a_{11} + \beta \|\boldsymbol{\sigma}_1\|^2 &= 0, \\ \frac{da_{12}}{dt} - A_1 v_x - A_2 u_y + K_I a_{12} + \beta (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2) &= 0, \\ \frac{da_{22}}{dt} - 2a_{12} v_x - 2A_2 v_y + K_I a_{22} + \beta \|\boldsymbol{\sigma}_2\|^2 &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь t — время; u, v — компоненты вектора скорости \mathbf{u} в декартовой системе координат x, y ; p — давление;

$a_{ij}, i, j = 1, 2$ — компоненты симметрического тензора анизотропии Π второго ранга; $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ — столбцы симметрической матрицы $\Pi = (a_{ij}) = (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2)$;

$$\|\boldsymbol{\sigma}_i\|^2 = (\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_i), \quad i = 1, 2;$$

$$\operatorname{div} \Pi = (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1, \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2)^T,$$

$$K_I = W^{-1} + \frac{\bar{k}}{3} I, \quad I = a_{11} + a_{22}, \quad \bar{k} = k - \beta,$$

k, β ($0 < \beta < 1$) — феноменологические параметры, характеризующие вклады, связанные с анизотропией (см. [1]); $\operatorname{Re} = \rho u_H l / \eta_0$ — число Рейнольдса, $\rho (= \operatorname{const})$ — плотность среды, $W = \tau_0 u_H / l$ — число Вейсенберга; η_0, τ_0 — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации; l — характерная длина (рис. 1), u_H — характерная скорость,

$$A_i = W^{-1} + a_{ii}, \quad i = 1, 2;$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla).$$

В системе (1) время t , координаты x, y , компоненты вектора скорости u, v , давление p отнесены к $l/u_H, l, u_H, \rho u_H^2$.

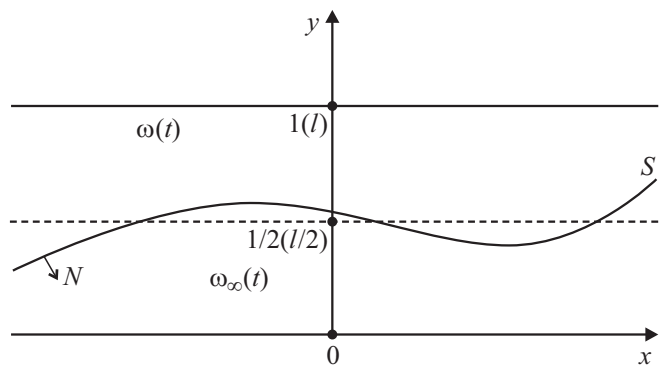


Рис. 1. Плоский канал.

Следуя [2], на стенках плоского канала (рис. 1) мы должны поставить следующие краевые условия:

$$u = v = 0, \quad p_y = \frac{1}{\text{Re}}((a_{12})_x + (a_{22})_y) \text{ при } y = 0, 1. \quad (2)$$

Постановка задачи

В отличие от работы [3] далее будем рассматривать более общую ситуацию, когда в плоском канале мы имеем течение двух несмешивающихся несжимаемых полимерных жидкостей, занимающих области $\omega(t)$, $\omega_\infty(t)$ с границей раздела S (рис. 1)

Уравнение границы S возьмем в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}(t, x, y) = f(t, x) - y = 0, \\ 0 < f(t, x) < 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда единичный вектор нормали \mathbf{N} определяется так:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{|\nabla \tilde{f}|} (f_x, -1), \quad |\nabla \tilde{f}|^2 = 1 + f_x^2,$$

а скорость точек сильного разрыва S в направлении нормали \mathbf{N} находится следующим образом (см. [4]):

$$D_N = -\frac{f_t}{|\nabla \tilde{f}|}, \quad (4)$$

Из (4) следует

$$D_N = u_N = (\mathbf{u}, \mathbf{N}) = (u_\infty)_N = (\mathbf{u}_\infty, \mathbf{N}),$$

т. е.

$$f_t + f_x u - v = f_t + f_x u_\infty - v_\infty = 0 \text{ на } S. \quad (5)$$

Здесь u_∞ , v_∞ — значения компонент вектора скорости при $\tilde{f} \rightarrow +0$; u , v при $\tilde{f} \rightarrow -0$.

Как известно (см. [5]), на сильном разрыве S должны выполняться определенные соотношения. Вывод условий на сильном разрыве для полимерной жидкости подробно описан в [2]. Выпишем эти условия:

$$\left. \begin{aligned} f_x [p - \alpha_1] + [\alpha_{12}] &= 0, \\ f_x [\alpha_{12}] + [p - \alpha_2] &= 0, \\ f_x [u\alpha_1] - [u\alpha_{12}] &= 0, \\ [u\alpha_2 + v\alpha_{12}] - f_x [v\alpha_1 + u\alpha_{12}] &= 0, \\ f_x [v\alpha_{12}] - [v\alpha_2] &= 0, \\ f_x [p_x - (\alpha_1)_x - (\alpha_{12})_y] - [p_y - (\alpha_{12})_x - (\alpha_2)_y] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{A_1}{\text{Re}}$, $\alpha_2 = \frac{A_2}{\text{Re}}$, $\alpha_{12} = \frac{a_{12}}{\text{Re}}$, $[\varphi] = \varphi - \varphi_\infty$ на S , где φ , φ_∞ — значения функции $\varphi(t, x, y)$ сверху ($\tilde{f} \rightarrow +0$)

и снизу ($\tilde{f} \rightarrow -0$) от сильного разрыва S . В качестве основного стационарного решения мы возьмем состояние покоя (механическое равновесие):

$$\left. \begin{aligned} u = v = a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0, \quad p = \text{const в } \hat{\omega}, \\ u_\infty = v_\infty = a_{11\infty} = a_{12\infty} = a_{22\infty} = 0, \quad p = \text{const в } \hat{\omega}_\infty, \\ f = \frac{1}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\hat{\omega} = \{(x, y) | |x| < \infty, \frac{1}{2} < y < 1\}$, $\hat{\omega}_\infty = \{(x, y) | |x| < \infty, 0 < y < \frac{1}{2}\}$. В силу (6) для (7) имеем

$$[p] = p - p_\infty = [\chi^2] = \chi^2 - \chi_\infty^2.$$

Здесь $\chi^2 = \frac{1}{W\text{Re}}$, $\chi_\infty^2 = \frac{1}{W_\infty\text{Re}_\infty}$.

Задача на собственные значения

В [2] была сконструирована линейная система, полученная линеаризацией системы (1) относительно ее стационарных решений, аналогичных решениям Пуазейля для системы уравнений Навье–Стокса. Если в качестве стационарного решения взять состояние покоя (7), то линейная система будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_t + B(\chi^2)\mathbf{U}_x + C(\chi^2)\mathbf{U}_y + R(W)\mathbf{U} + \mathbf{F} &= \mathbf{0}, \\ \Delta_{x,y}\Omega &= 2((\alpha_{12})_{xy} - (\alpha_{22})_{xx}), \\ t > 0, \quad (x, y) &\in \hat{\omega}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{U}_\infty)_t + B(\chi_\infty^2)(\mathbf{U}_\infty)_x \\ + C(\chi_\infty^2)(\mathbf{U}_\infty)_y + R(W_\infty)\mathbf{U}_\infty + \mathbf{F}_\infty &= \mathbf{0}, \\ \Delta_{x,y}\Omega_\infty &= 2((\alpha_{12\infty})_{xy} - (\alpha_{22\infty})_{xx}), \\ t > 0, \quad (x, y) &\in \hat{\omega}_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_\infty = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \\ \alpha_{12\infty} \\ \alpha_{22\infty} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_\infty = \begin{pmatrix} (\Omega_\infty)_x \\ (\Omega_\infty)_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R(W) = W^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{O}_2 & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & I_2 \end{pmatrix},$$

$$B(\chi^2) = \begin{pmatrix} & & 0 & 2 \\ \mathbb{O}_2 & & -1 & 0 \\ 0 & -\chi^2 & & \\ 0 & 0 & & \mathbb{O}_2 \end{pmatrix},$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \kappa_0 & -\frac{1}{4} \\ -\kappa_0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем искать у задачи (14)–(17) решения специального вида

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}(t, x, y) &= \tilde{\mathbf{Z}}(y) \exp\{\lambda t + i\omega x\}, \\ \Omega(t, x, y) &= \tilde{\Omega}(y) \exp\{\lambda t + i\omega x\}, \\ \mathbf{Z}_\infty(t, x, y) &= \tilde{\mathbf{Z}}_\infty(y) \exp\{\lambda t + i\omega x\}, \\ \Omega_\infty(t, x, y) &= \tilde{\Omega}_\infty(y) \exp\{\lambda t + i\omega x\}, \\ f(t, x) &= \hat{f} \exp\{\lambda t + i\omega x\}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где $\lambda = \eta + i\omega_0$; $\omega_0, \omega \in \mathbb{R}^1, \hat{f}$ — постоянная. Здесь $\eta \in \mathbb{R}$ является вещественной частью параметра λ . От знака η зависит, будет ли данное решение специального вида все больше отличаться от состояния покоя (при $\eta > 0$) или будет к нему стремиться (при $\eta < 0$). Рассматривая далее условия существования, мы подчеркнем, что есть решения с $\text{Re } \lambda = \eta > 0$, а значит состояние покоя для поставленной задачи является неустойчивым.

Далее крышку над искомыми переменными в (18) опускаем. После подстановки (18), из (14)–(17) следует

$$\left. \begin{aligned} (\lambda I_4 + \tilde{R} + i\omega\Lambda)\mathbf{Z} + \mathbb{D}\mathbf{Z}' + \Gamma &= 0, \\ \Omega'' - \omega^2\Omega &= 2(i\omega\sigma' + \omega^2 Z_1), \frac{1}{2} < y < 1; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda I_4 + \tilde{R}_\infty + i\omega\Lambda)\mathbf{Z}_\infty + \mathbb{D}\mathbf{Z}'_\infty + \Gamma_\infty &= 0, \\ \Omega''_\infty - \omega^2\Omega_\infty &= 2(i\omega\sigma'_\infty + \omega^2 Z_{1\infty}), 0 < y < \frac{1}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_3 = Z_4, Z_2 = 0, \Omega' &= i\omega\sigma \text{ при } y = 1, \\ Z_{3\infty} = Z_{4\infty}, Z_{2\infty} = 0, \Omega'_\infty &= i\omega\sigma_\infty \text{ при } y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} f = -\frac{Z_2}{2\kappa_0^2\lambda}, v = v_\infty, Z_2 = Z_{2\infty}, \sigma = \sigma_\infty, \\ \Omega = \Omega_\infty, \Omega' = \Omega'_\infty \text{ при } y = \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Здесь

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\kappa_0^2\Omega' \\ -\frac{\kappa_0}{2}i\omega\Omega \\ \frac{\kappa_0}{2}i\omega\Omega \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\kappa_0^2\Omega'_\infty \\ -\frac{\kappa_0}{2}i\omega\Omega_\infty \\ \frac{\kappa_0}{2}i\omega\Omega_\infty \end{pmatrix},$$

Положим $\Omega = i\omega Q, \Omega_\infty = i\omega Q_\infty$. Тогда для агрегатов Q, Q_∞ будем иметь такие задачи (см. (20), (21)):

$$\left. \begin{aligned} Q'' - \omega^2 Q &= 2(\sigma' - i\omega Z_1), \frac{1}{2} < y < 1, \\ Q'(1) &= \sigma(1), \\ Q''_\infty - \omega^2 Q_\infty &= 2(\sigma'_\infty - i\omega Z_{1\infty}), 0 < y < \frac{1}{2}, \\ Q'_\infty(0) &= \sigma_\infty(0), \\ Q\left(\frac{1}{2}\right) &= Q_\infty\left(\frac{1}{2}\right), Q'\left(\frac{1}{2}\right) = Q'_\infty\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Из (19), (20), (13) следует:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 = -\rho^{(0)}i\omega v, Z_2 = -\rho_1 i\omega(\sigma - Q'), \\ Z'_2 = 2\kappa_0 i\omega v, \\ Z_{1\infty} = -\rho_\infty^{(0)}i\omega v_\infty, Z_{2\infty} = -\rho_1 i\omega(\sigma_\infty - Q'_\infty), \\ Z'_{2\infty} = 2\kappa_0 i\omega v_\infty, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\rho^{(0)} = \frac{2\kappa_0}{\lambda + W^{-1}}, \quad \rho_1 = \frac{2\kappa_0^2}{\lambda}, \quad \rho_\infty^{(0)} = \frac{2\kappa_0}{\lambda + W_\infty^{-1}}.$$

С учетом (24) для векторов $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_\infty = \begin{pmatrix} Z_{3\infty} \\ Z_{4\infty} \end{pmatrix}$ получаем следующие системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' + \frac{1}{\kappa_0} \left(\lambda \Delta_0 + \frac{1}{2W} \Delta_0 L - \omega^2 \Delta_0 \chi \Delta_1 \right) \\ \times \mathbf{u} + \frac{\omega^2}{\kappa_0} (Q \Delta_0 \gamma_0 + Q' \Delta_0 \chi \gamma_1) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_\infty)' + \frac{1}{\kappa_0} \left(\lambda \Delta_0 + \frac{1}{2W_\infty} \Delta_0 L - \omega^2 \Delta_0 \chi \Delta_{1\infty} \right) \\ \times \mathbf{u}_\infty + \frac{\omega^2}{\kappa_0} (Q_\infty \Delta_0 \gamma_0 + Q'_\infty \Delta_0 \chi \gamma_1) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_0 L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \Delta_1 &= \begin{pmatrix} -\rho^{(0)} & \rho^{(0)} \\ \rho_1 & \rho_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{1\infty} = \begin{pmatrix} -\rho_\infty^{(0)} & \rho_\infty^{(0)} \\ \rho_1 & \rho_1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_0 &= \frac{\kappa_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \rho_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_0 \chi \Delta_1 = \begin{pmatrix} -l_1 & l_2 \\ -l_2 & l_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$l_1 = \kappa_0 \rho^{(0)} + \frac{1}{4} \rho_1, \quad l_2 = \rho^{(0)} \kappa_0 - \frac{1}{4} \rho_1,$$

$$\Delta_0 \chi \Delta_{1\infty} = \begin{pmatrix} -l_{1\infty} & l_{2\infty} \\ -l_{2\infty} & l_{1\infty} \end{pmatrix},$$

$$l_{1\infty} = \kappa_0 \rho_{\infty}^{(0)} + \frac{1}{4} \rho_1, \quad l_{2\infty} = \rho_{\infty}^{(0)} \kappa_0 - \frac{1}{4} \rho_1,$$

$$\Delta_0 \gamma_0 = \frac{\kappa_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_0 \chi \gamma_1 = \frac{\rho_1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tilde{T} \Delta_0 \tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} = t_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}^{-1} = \frac{1}{2t_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $t_3 \neq 0$ — постоянная,

$$\tilde{T}(\Delta_0 \chi \Delta_1) \tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho_1}{2} \\ -2\kappa_0 \rho^{(0)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}(\Delta_0 \chi \Delta_{1\infty}) \tilde{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho_1}{2} \\ -2\kappa_0 \rho_{\infty}^{(0)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}(\Delta_0 \gamma_0) = \kappa_0 t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}(\Delta_0 \chi \gamma_1) = \frac{\rho_1 t_3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, после замен

$$\mathbf{u} = \tilde{T}^{-1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_{\infty} = \tilde{T}^{-1} \mathbf{v}_{\infty}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\infty} = \begin{pmatrix} v_{3\infty} \\ v_{4\infty} \end{pmatrix},$$

$$Z_3 = \frac{v_3 + v_4}{2t_3}, \quad Z_4 = \frac{v_4 - v_3}{2t_3}, \quad \sigma = \frac{v_4}{t_3}, \quad \nu = -\frac{v_3}{t_3},$$

$$Z_{3\infty} = \frac{v_{3\infty} + v_{4\infty}}{2t_3}, \quad Z_{4\infty} = \frac{v_{4\infty} - v_{3\infty}}{2t_3},$$

$$\sigma_{\infty} = \frac{v_{4\infty}}{t_3}, \quad \nu_{\infty} = -\frac{v_{3\infty}}{t_3},$$

системы (25), (26) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' + \left\{ \frac{\lambda}{\kappa_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa_0 W} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \omega^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho_1}{2\kappa_0} \\ 2\rho^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \right\} \mathbf{v} + \omega^2 t_3 Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ - \omega^2 \frac{\rho_1 t_3}{2\kappa_0} Q' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{\infty} + \left\{ \frac{\lambda}{\kappa_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa_0 W_{\infty}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \omega^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho_1}{2\kappa_0} \\ 2\rho_{\infty}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \right\} \mathbf{v}_{\infty} + \omega^2 t_3 Q_{\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ - \omega^2 \frac{\rho_1 t_3}{2\kappa_0} Q'_{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В покомпонентной записи (27), (28) переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} v'_3 + d^{(0)} v_4 &= m Q', \\ d^{(0)} &= \frac{\lambda}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa_0 W} + \omega^2 \frac{\rho_1}{2\kappa_0}, \quad m = \frac{\omega^2 \rho_1 t_3}{2\kappa_0}, \\ v'_4 + d^{(1)} v_3 + \omega^2 t_3 Q &= 0, \quad d^{(1)} = \frac{\lambda}{\kappa_0} + 2\rho^{(0)} \omega^2; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} v'_{3\infty} + d^{(0)} v_{4\infty} &= m Q'_{\infty}, \\ d^{(0)} &= \frac{\lambda}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa_0 W_{\infty}} + \omega^2 \frac{\rho_1}{2\kappa_0}, \\ v'_{4\infty} + d^{(1)} v_{3\infty} + \omega^2 t_3 Q_{\infty} &= 0, \quad d^{(1)} = \frac{\lambda}{\kappa_0} + 2\rho_{\infty}^{(0)} \omega^2; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

а задачи (23) примут вид

$$\left. \begin{aligned} Q'' + \omega^2 Q &= n v_3, \quad \frac{1}{2} < y < 1, \\ Q'(1) - \frac{v_4(1)}{t_3} &= 0, \\ Q''_{\infty} + \omega^2 Q_{\infty} &= n_{\infty} v_{3\infty}, \quad 0 < y < \frac{1}{2}, \\ Q'_{\infty}(0) - \frac{v_{4\infty}(0)}{t_3} &= 0, \\ Q\left(\frac{1}{2}\right) = Q_{\infty}\left(\frac{1}{2}\right), \quad Q'\left(\frac{1}{2}\right) &= Q'_{\infty}\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Здесь

$$n = \frac{(\rho^{(0)} \omega^2 - d^{(1)})}{t_3}, \quad n_{\infty} = \frac{(\rho_{\infty}^{(0)} \omega^2 - d_{\infty}^{(1)})}{t_3}.$$

Кроме этого, если ввести в рассмотрение агрегаты

$$\tilde{v}_4 = v_4 - \frac{m}{d^{(0)}} Q',$$

$$\tilde{v}_{4\infty} = v_{4\infty} - \frac{m}{d^{(0)}} Q'_{\infty},$$

то системы (29), (30) можно еще переписать так:

$$\left. \begin{aligned} v'_3 + d^{(0)} \tilde{v}_4 &= 0, \\ \tilde{v}'_4 + \tilde{d}^{(1)} v_3 + \tilde{m} \omega^2 Q &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} v'_{3\infty} + d^{(0)} \tilde{v}_{4\infty} &= 0, \\ \tilde{v}'_{4\infty} + \tilde{d}^{(1)} v_{3\infty} + \tilde{m}_{\infty} \omega^2 Q_{\infty} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где

$$\tilde{d}^{(1)} = \frac{mn}{d^{(0)}} + d^{(1)}, \quad \tilde{d}^{(1)}_{\infty} = \frac{mn_{\infty}}{d^{(0)}} + d_{\infty}^{(1)},$$

$$\tilde{m} = t_3 - \frac{m}{d^{(0)}}, \quad \tilde{m}_{\infty} = t_3 - \frac{m}{d^{(0)}}.$$

Объединяя (31)–(33) получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}'_\infty &= \mathcal{A}_\infty \mathbf{G}_\infty, & 0 < y < \frac{1}{2}, \\ \mathcal{L}_\infty \mathbf{G}_\infty(0) &= 0; \\ \mathbf{G}' &= \mathcal{A} \mathbf{G}, & \frac{1}{2} < y < 1, \\ \mathcal{L} \mathbf{G}(1) &= 0; \\ \mathbf{G}_\infty\left(\frac{1}{2}\right) - \mathfrak{R} \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Здесь

$$\mathbf{G}_\infty = \begin{pmatrix} Q_\infty \\ Q'_\infty \\ v_{3\infty} \\ \tilde{v}_{4\infty} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} Q \\ Q' \\ v_3 \\ \tilde{v}_4 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & n_\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_\infty^{(0)} \\ -\tilde{m}_\infty \omega^2 & 0 & -\tilde{d}_\infty^{(1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_\infty = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{m}_\infty & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d^{(0)} \\ -\tilde{m} \omega^2 & 0 & -\tilde{d}^{(1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{m} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{m} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{m} = m \left(\frac{1}{d^{(0)}} - \frac{1}{d_\infty^{(0)}} \right).$$

Ищем решение (34) в виде

$$\mathbf{G}_\infty(y) = \exp(y \mathcal{A}_\infty) \mathbf{G}_\infty(0),$$

$$\mathbf{G}(y) = \exp((y-1) \mathcal{A}) \mathbf{G}(1),$$

где векторы $\mathbf{G}_\infty(0)$, $\mathbf{G}(1)$ находятся как нетривиальное решение линейной системы

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_\infty & \mathbb{O}_{24} \\ \mathbb{O}_{24} & \mathcal{L} \\ \exp(\mathcal{A}_\infty/2) & -\mathfrak{R} \exp(-\mathcal{A}/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_\infty(0) \\ \mathbf{G}(1) \end{pmatrix} = 0. \quad (35)$$

Здесь \mathbb{O}_{24} — прямоугольная (2×4) нулевая матрица.

Поскольку (см. [3])

$$\mathcal{A}_\infty = \Sigma_\infty \text{diag}(k_{1\infty}, k_{2\infty}, k_{3\infty}, k_{4\infty}) \Sigma_\infty^{-1} = \Sigma_\infty \mathcal{P}_\infty \Sigma_\infty^{-1},$$

$$\mathcal{A} = \Sigma \text{diag}(k_1, k_2, k_3, k_4) \Sigma^{-1} = \Sigma \mathcal{P} \Sigma^{-1},$$

где

$$k_1 = K^+ = \sqrt{A^- + \sqrt{(A^+)^2 + \omega^2 d^{(0)} n \tilde{m}}}, \quad k_2 = -K^+,$$

$$k_3 = K^- = \sqrt{A^- - \sqrt{(A^+)^2 + \omega^2 d^{(0)} n \tilde{m}}}, \quad k_4 = -K^-,$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} n & n & n & n \\ nK^+ & -nK^+ & nK^- & -nK^- \\ \sigma_9 & \sigma_9 & \sigma_{11} & \sigma_{11} \\ -\frac{K^+ \sigma_9}{d^{(0)}} & \frac{K^+ \sigma_9}{d^{(0)}} & -\frac{K^- \sigma_{11}}{d^{(0)}} & \frac{K^- \sigma_{11}}{d^{(0)}} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_9 = (K^+)^2 + \omega^2 = A^+ + \sqrt{(A^+)^2 + \omega^2 d^{(0)} n \tilde{m}},$$

$$\sigma_{11} = (K^-)^2 + \omega^2 = A^+ - \sqrt{(A^+)^2 + \omega^2 d^{(0)} n \tilde{m}},$$

$$A^\pm = (d^{(0)} \tilde{d}^{(1)} \pm \omega^2)/2,$$

$$k_{1\infty} = K_\infty^+ = \sqrt{A_\infty^- + \sqrt{(A_\infty^+)^2 + \omega^2 d_\infty^{(0)} n_\infty \tilde{m}_\infty}},$$

$$k_{2\infty} = -K_\infty^+,$$

$$k_{3\infty} = K_\infty^- = \sqrt{A_\infty^- - \sqrt{(A_\infty^+)^2 + \omega^2 d_\infty^{(0)} n_\infty \tilde{m}_\infty}},$$

$$k_{4\infty} = -K_\infty^-,$$

$$\Sigma_\infty = \begin{pmatrix} n_\infty & n_\infty & n_\infty & n_\infty \\ n_\infty K_\infty^+ & -n_\infty K_\infty^+ & n_\infty K_\infty^- & -n_\infty K_\infty^- \\ \sigma_{9\infty} & \sigma_{9\infty} & \sigma_{11\infty} & \sigma_{11\infty} \\ -\frac{K_\infty^+ \sigma_{9\infty}}{d_\infty^{(0)}} & \frac{K_\infty^+ \sigma_{9\infty}}{d_\infty^{(0)}} & -\frac{K_\infty^- \sigma_{11\infty}}{d_\infty^{(0)}} & \frac{K_\infty^- \sigma_{11\infty}}{d_\infty^{(0)}} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{9\infty} = (K_\infty^+)^2 + \omega^2 = A_\infty^+ + \sqrt{(A_\infty^+)^2 + \omega^2 d_\infty^{(0)} n_\infty \tilde{m}_\infty},$$

$$\sigma_{11\infty} = (K_\infty^-)^2 + \omega^2 = A_\infty^+ - \sqrt{(A_\infty^+)^2 + \omega^2 d_\infty^{(0)} n_\infty \tilde{m}_\infty},$$

$$A_\infty^\pm = (d_\infty^{(0)} \tilde{d}_\infty^{(1)} \pm \omega^2)/2;$$

при этом

$$\det \Sigma = -4n^2 \frac{K_- K_+}{d_0} ((K^+)^2 - (K^-)^2)^2 \neq 0,$$

$$\det \Sigma_\infty = -4n_\infty^2 \frac{K_\infty^- K_\infty^+}{d_\infty^{(0)}} ((K_\infty^+)^2 - (K_\infty^-)^2)^2 \neq 0,$$

условие существования нетривиального решения (35) примет вид

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{L}_\infty \Sigma_\infty & \mathbb{O}_{24} \\ \mathbb{O}_{24} & \mathcal{L} \Sigma \\ \Sigma_\infty \exp(\mathcal{P}_\infty/2) & -\mathfrak{R} \Sigma \exp(-\mathcal{P}/2) \end{pmatrix} = 0. \quad (36)$$

С учетом конкретного вида матриц Σ_∞, Σ условие (36) примет вид

$$\det \begin{bmatrix} K_\infty^+ r_\infty^+ & -K_\infty^+ r_\infty^+ & K_\infty^- r_\infty^- & -K_\infty^- r_\infty^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{9\infty} & \sigma_{9\infty} & \sigma_{11\infty} & \sigma_{11\infty} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^+ r^+ & -K^+ r^+ & K^- r^- & -K^- r^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_9 & \sigma_9 & \sigma_{11} & \sigma_{11} \\ n_\infty e^{K_\infty^+/2} & n_\infty e^{-K_\infty^+/2} & n_\infty e^{K_\infty^-/2} & n_\infty e^{-K_\infty^-/2} & -ne^{-K^+/2} & -ne^{K^+/2} & -ne^{-K^-/2} & -ne^{K^-/2} \\ n_\infty K_\infty^+ e^{K_\infty^+/2} & -n_\infty K_\infty^+ e^{-K_\infty^+/2} & n_\infty K_\infty^- e^{K_\infty^-/2} & -n_\infty K_\infty^- e^{-K_\infty^-/2} & -nK^+ e^{-K^+/2} & nK^+ e^{K^+/2} & -nK^- e^{-K^-/2} & nK^- e^{K^-/2} \\ \sigma_{9\infty} e^{K_\infty^+/2} & \sigma_{9\infty} e^{-K_\infty^+/2} & \sigma_{11\infty} e^{K_\infty^-/2} & \sigma_{11\infty} e^{-K_\infty^-/2} & -\sigma_9 e^{K^+/2} & -\sigma_9 e^{-K^+/2} & -\sigma_{11} e^{-K^-/2} & -\sigma_{11} e^{K^-/2} \\ -\frac{K_\infty^+ \sigma_{9\infty}}{d_\infty^{(0)}} e^{K_\infty^+/2} & \frac{K_\infty^+ \sigma_{9\infty}}{d_\infty^{(0)}} e^{-K_\infty^+/2} & -\frac{K_\infty^- \sigma_{11\infty}}{d_\infty^{(0)}} e^{K_\infty^-/2} & \frac{K_\infty^- \sigma_{11\infty}}{d_\infty^{(0)}} e^{-K_\infty^-/2} & -K_+ e^{-K^+/2} \hat{r}^+ & K_+ e^{K^+/2} \hat{r}^+ & -K_- e^{-K^-/2} \hat{r}^- & K_- e^{K^-/2} \hat{r}^- \end{bmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} r_\infty^+ &= \hat{m}_\infty n_\infty + \frac{\sigma_{9\infty}}{d_\infty^{(0)}}, & r_\infty^- &= \hat{m}_\infty n_\infty + \frac{\sigma_{11\infty}}{d_\infty^{(0)}}, \\ r^+ &= \hat{m}n + \frac{\sigma_9}{d^{(0)}}, & r^- &= \hat{m}n + \frac{\sigma_{11}}{d^{(0)}}, \\ \hat{r}^+ &= \hat{m}n - \frac{\sigma_9}{d^{(0)}}, & \hat{r}^- &= \hat{m}n - \frac{\sigma_{11}}{d^{(0)}}. \end{aligned}$$

Данное условие представляет собой довольно громоздкую алгебраическую задачу по вычислению определителя матрицы порядка 8×8 . Тем не менее ее удается решить и получить явное выражение левой части, которое после длительных преобразований выглядит так:

$$\begin{aligned} & \text{th } u \text{ th } x \text{ th } y \text{ th } z \omega^3 (g_\infty + 2)^2 \{ 4\lambda^2 \mu^2 [(g + 2)(g_\infty + 2) + g g_\infty] + g^2 g_\infty^2 (g + g_\infty + 2) \} + 2\omega^3 q q_\infty (g_\infty + 2)^2 \\ & \times [8\lambda^2 \mu^2 + g^2 g_\infty^2] - \text{th } u \text{ th } z \omega^3 q_\infty (g_\infty + 2)^2 [(g + 2) \times (8\lambda^2 \mu^2 + g^2 g_\infty^2) + 4\lambda \mu g^2 g_\infty] - \text{th } x \text{ th } y \omega^3 q (g_\infty + 2)^2 \\ & \times [(g_\infty + 2)(8\lambda^2 \mu^2 + g^2 g_\infty^2) - 4\lambda \mu g g_\infty] - \text{th } u \text{ th } x \omega^3 \\ & \times q g^2 g_\infty^2 (g_\infty + 2)^3 + 2 \text{th } u \text{ th } y \omega^3 q q_\infty g^2 g_\infty^2 (g_\infty + 2)^2 \\ & - \text{th } y \text{ th } z \omega^3 q_\infty g^2 g_\infty^2 (g + 2)(g_\infty + 2)^2 - \frac{32}{\text{ch } u \text{ ch } z} \\ & \times \omega^3 q q_\infty \lambda^2 \mu^2 (g_\infty + 2)^2 + \text{th } x \text{ th } z \omega^3 g^2 g_\infty^2 (g_\infty + 2)^2 \\ & \times (g + g_\infty + 2) + \frac{4 \text{th } x \text{ th } y}{\text{ch } u \text{ ch } z} \omega^3 q \lambda \mu (g_\infty + 2)^2 \\ & \times [2\lambda \mu (g_\infty + 2) - g g_\infty^2] + \frac{2}{\text{ch } x \text{ ch } y} \mu \chi_0 q q_\infty [2\lambda \mu q_\infty \\ & + g g_\infty q_\infty + \lambda \mu (g_\infty + 2)^2] - \frac{\text{th } u \text{ th } z}{2 \text{ch } x \text{ ch } y} \mu \chi_0 q_\infty \\ & \times \{ (g_\infty + 2)^2 [2\lambda \mu (g + 2) + g^2 g_\infty] + 8\lambda \mu q_\infty \\ & - 4g g_\infty q_\infty \} + \frac{2 \text{th } z}{\text{ch } x \text{ ch } y} \mu \chi_0 q^2 q_\infty^2 (2g - 2g_\infty + g g_\infty) \\ & - \frac{2 \text{th } u}{\text{ch } x \text{ ch } y} \mu \chi_0 q q_\infty^2 (2g - 2g_\infty - g g_\infty) \\ & + \frac{2}{\text{ch } x \text{ ch } y \text{ ch } u \text{ ch } z} \omega^3 q q_\infty (g_\infty + 2)^2 \\ & \times [8\lambda^2 \mu^2 - g^2 g_\infty^2] = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь введены следующие величины (см. [3]):

$$\begin{aligned} g &= \frac{\lambda(\lambda + W^{-1})}{\omega^2 \chi_0^2}, & g_\infty &= \frac{\lambda(\lambda + W_\infty^{-1})}{\omega^2 \chi_0^2}, \\ q &= \sqrt{g + 1}, & q_\infty &= \sqrt{g_\infty + 1}, & \mu &= \frac{W^{-1} - W_\infty^{-1}}{\omega^2 \chi_0^2}, \\ K_\infty^+ &= |\omega| q_\infty, & K^- &= K_\infty^- = |\omega|, & K^+ &= |\omega| q, \\ x &= \frac{K_\infty^+}{2}, & u = y &= \frac{K^-}{2} = \frac{K_\infty^-}{2}, & z &= \frac{K^+}{2}. \end{aligned}$$

Выражения для агрегатов $K^+, K_\infty^+, K^-, K_\infty^-$, приведенные выше, получены, следуя работе [3], при условии, что $\text{Re } \lambda > 0$. Стоит отдельно отметить параметр μ . Можно видеть, что в него входит разность обратных чисел Вейсенберга для полимерной жидкости по разные стороны от сильного разрыва S (рис. 1). В случае отсутствия разрыва имеем, что $\mu = 0$, при этом выражение (37) намного упрощается и в конечном счете сводится к случаю, рассмотренному в [3] и получению соответствующих результатов. Это является одним из подтверждений правильности проделанных преобразований. Но в отличие от более простого случая без разрыва (см. [3]) условие (37) уже не поддается аналитическому рассмотрению: нельзя строго сказать, где расположен спектр задачи на собственные значения (19), (20), в частности, есть ли собственные значения λ , лежащие в правой полуплоскости. Для ответа на данный вопрос был проведен ряд численных экспериментов.

В данной таблице приведены параметры, которые характеризуют задачу о течении с сильным разрывом, и диапазон исследованных значений.

Параметры задачи о течении с сильным разрывом

Обозначение	Название	Диапазон
W	число Вейсенберга в области $\omega(t)$	0.5–10000
W_∞	число Вейсенберга в области $\omega_\infty(t)$	0.5–10000
Re	число Рейнольдса в области $\omega(t)$	0.1–100000

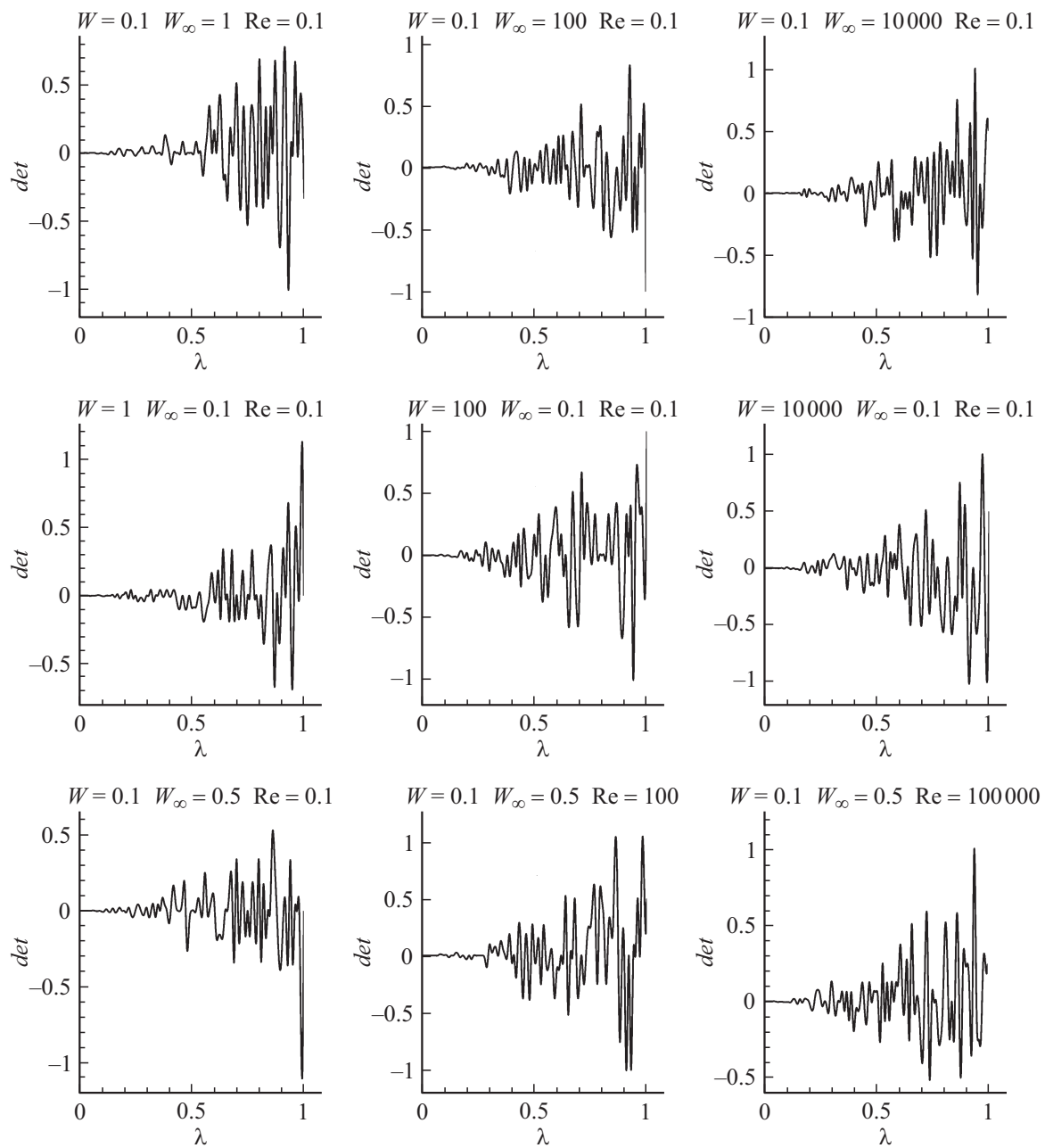


Рис. 2. Результаты численных экспериментов. Поведение определителя при различных значениях чисел Вейсенберга W , W_∞ и числа Рейнольдса Re в зависимости от параметра λ .

На рис. 2 приведены результаты некоторых расчетов, а именно показано поведение левой части выражения (37) при различных значениях параметров W , W_∞ и Re в зависимости от λ . Подобные графики позволяют сделать вывод о наличии вещественных значений $\lambda > 0$, которые удовлетворяют условию (37). Из этого следует, что существуют частные решения вида (18), растущие по модулю при $t \rightarrow \infty$, а значит, течение несжимаемой полимерной жидкости при наличии сильного разрыва является неустойчивым. В заключение стоит отметить, что построенные выше примеры неустойчивости подходят для любых значений числа Рейнольдса Re и для любого

знака параметра μ . Это, в свою очередь, означает, что соотношения между временем релаксации могут быть любыми в разных слоях жидкости.

Заключение

В настоящей работе была продолжена работа по изучению устойчивости полимерной жидкости в плоском канале, начатая авторами в [3]. Изменения в постановке задачи, а именно рассмотрение сильного разрыва в течении, привели к качественно другому поведению стационарного решения. В отличие от [3] было показано

существование частных решений специального вида, растущих по времени и влекущих за собой неустойчивость состояния покоя для поставленной задачи. В качестве доказательства наличия таких решений было выведено и рассмотрено довольно громоздкое условие существования, и путем численных экспериментов на широком диапазоне параметров показано его выполнение. При этом параметр λ , отвечающий за поведение по времени, оказался вещественным и положительным, что означает неограниченный рост абсолютной величины таких решений при $t \rightarrow \infty$. Применение данного результата может найти в современной развивающейся отрасли 3D-печати, где расплавленный полимер течет по каналам различной формы. Предсказание его поведения в такой ситуации может существенно отразиться на качестве изготавливаемых изделий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00791_а.

Список литературы

- [1] Алтухов Ю.А. Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем / Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В. Барнаул: изд-во АлтГПА, 2012.
- [2] Блохин А.М., Бамбаева Н.В. Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // ЖВММФ. 2014. Т. 54. № 5. С. 55–69.
- [3] Блохин А.М., Голдин А.Ю. К вопросу о линейной устойчивости состояния покоя для несжимаемой полимерной жидкости // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2016. Т. 16. № 4. С. 17–27.
- [4] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
- [5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.