03

К теории взаимодействия переходного излучения заряженной частицы с периодически модулированным анизотропным магнитодиэлектрическим заполнением волновода

© Э.А. Геворкян

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,
117997 Москва, Россия

e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2017 г.
В окончательной редакции 20.02.2018 г.

Рассмотрено переходное излучение заряженной частицы в волноводе с модулированным анизотропным магнитодиэлектрическим заполнением. Предполагается, что частица движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси волновода, заполнение которого периодически модулировано в пространстве по гармоническому закону. Получены волновые уравнения для поперечно-электрического (TE) и поперечно-магнитного (TM) полей в волноводе. Найдены аналитические выражения для полей в волноводе в первом приближении по малым индексам модуляции заполнения волновода. Вычислены энергии переходного излучения заряженной частицы в области „слабого“ (не резонансного) взаимодействия волны излучения с волной модуляции, в частности, в случае прямоугольного волновода. Показано, что в области слабого взаимодействия энергия излучения на нулевой гармонике не зависит от индексов модуляции, а на первых гармониках она пропорциональна индексам модуляции в первой степени. Проведен анализ механизма возникновения черенковского излучения.

DOI: 10.21883/OS.2018.08.46363.258-17

Введение

Излучение Вавилова–Черенкова, возникающее при равномерном движении заряженных источников, когда их скорость движения больше фазовой скорости света в среде, впервые теоретически рассмотрено и объяснено И.Е. Таммом и И.М. Франком в 1937 г. [1]. В 1946 г. В.Л. Гинзбургом и И.М. Франком впервые был предсказан и теоретически исследован новый тип излучения движущихся заряженных источников, возникающего при их пересечении границы раздела сред с различными оптическими свойствами и названного переходным излучением [2]. В дальнейшем продолжались теоретические и экспериментальные работы для всестороннего исследования особенностей переходного излучения и излучения Вавилова–Черенкова (см., например, [3–9] и указанную в них литературу). В частности, в 1959 г. Г.М. Гарибяном в неограниченном пространстве [7] и К.А. Барсуковым в волноводе [8] теоретически было обнаружено рентгеновское переходное излучение, обладающее интересными физическими и практически используемыми свойствами.

В работе [10] решена задача переходного излучения заряженной частицы, движущейся перпендикулярно оси волновода с анизотропным магнитодиэлектрическим заполнением. В настоящей работе решается аналогичная задача в случае, когда анизотропное магнитодиэлектрическое заполнение волновода модулировано в пространстве по периодическому закону вдоль оси волновода. Отметим, что именно наличие периодически модулированного заполнения в волноводе отличает данную работу от работы Б.М. Болотовского [6]. Подобные исследования интересны тем, что, во-первых, они способствуют развитию теории переходного излучения и излучения Вавилова-Черенкова движущихся источников в периодически модулированных средах, во-вторых, они могут открыть широкие возможности практического применения излучения источников в различных областях СВЧ электроники, микроэлектроники, тонкопленочной и интегральной оптики, физики ионосферы и радиолокационной океанографии, акустооптики и т. д. [11].

Постановка задачи, волновые уравнения, поля переходного излучения

Пусть заряженная частица с зарядом q движется с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$ перпендикулярно оси регулярного волновода (вдоль оси ox) с произвольным поперечным сечением, ось которого совпадает с осью oz некоторой прямоугольной системы координат, пересекая поверхность волновода в точках $A_1(x_1, y_0, 0)$ и $A_2(x_2, y_0, 0)$. Предположим, что анизотропное магнитодиэлектрическое заполнение волновода модулировано по координате z по периодическому закону, т. е. диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения имеют вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2(z) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(z) \end{pmatrix},$$

где ε_1, μ_1 — постоянные, а $\varepsilon_2(z)$ и $\mu_2(z)$ выражаются формулами

$$\varepsilon_2(z) = \varepsilon_2^0(1 + m_\varepsilon \cos k_0 z),$$
$$\mu_2(z) = \mu_2^0(1 + m_\mu \cos k_0 z). \qquad (1)$$

Отметим, что в (1) k_0 — волновое число волны модуляции, индексы модуляции m_ε и m_μ являются малыми параметрами ($m_\varepsilon \ll 1,\ m_\mu \ll 1,\ m_\varepsilon \approx m_\mu$), $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2(z)|_{m_\varepsilon=0}, \mu_2^0 = \mu_2(z)|_{m_\mu=0}$. Как известно, плотность заряда и плотность тока в этом случае описываются с помощью δ-функции Дирака и могут быть представлены в виде [12–15]

$$\rho = q\delta(x - vt)\delta(y - y_0)\delta(z),$$
$$j = j_x = qv\delta(x - vt)\delta(y - y_0)\delta(z).$$

Как и в наших ранних работах (см., например, [10,12,16]), поперечно-электрическое (ТЕ) и поперечно-магнитное (ТМ) электромагнитные поля в волноводе будем описывать с помощью продольных составляющих магнитного и электрического векторов соответственно (H_z, E_z). Волновые уравнения для величин $\widetilde{H}_z = \mu_2(z)H_z$ и $\widetilde{E}_z = \varepsilon_2(z)E_z$ можно получить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ F/m — электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — магнитная постоянная. Вычисления приводят к следующим волновым уравнениям в фурье-представлении:

$$\Delta_\perp \widetilde{H}_{\omega z} + \frac{\mu_2(z)}{\mu_1}\frac{\partial^2 \widetilde{H}_{\omega z}}{\partial z^2} + \varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2(z)\omega^2\widetilde{H}_{\omega z} = \mu_2(z)\frac{\partial j_\omega}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$\Delta_\perp \widetilde{E}_{\omega z} + \frac{\varepsilon_2(z)}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 \widetilde{E}_{\omega z}}{\partial z^2} + \varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2(z)\omega^2\widetilde{E}_{\omega z} = \frac{\varepsilon_2(z)}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\frac{\partial \rho_\omega}{\partial z}, \qquad (4)$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа, а j_ω и ρ_ω имеют вид

$$j_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} q e^{i\omega\frac{x}{v}}\delta(y - y_0)\delta(z),$$
$$\rho_\omega = \frac{q}{\sqrt{2\pi}v} e^{i\omega\frac{x}{v}}\delta(y - y_0)\delta(z). \qquad (5)$$

Решения волновых уравнений (3) и (4) будем искать в виде

$$\widetilde{H}_{\omega z} = \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{H}_n(z)\hat{\Psi}_n(x, y),$$
$$\widetilde{E}_{\omega z} = \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{E}_n(z)\hat{\Psi}_n(x, y), \qquad (6)$$

где $\hat{\Psi}_n(x, y)$ и $\Psi_n(x, y)$ — ортонормированные собственные функции второй и первой краевых задач для поперечного сечения волновода (задачи Неймана и Дирихле). Эти функции удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца с соответствующими граничными условиями

$$\Delta_\perp\hat{\Psi}_n(x, y) + \hat{\lambda}_n^2\hat{\Psi}_n(x, y) = 0, \quad \left.\frac{\partial\hat{\Psi}_n(x, y)}{\partial \mathbf{n}}\right|_\Sigma = 0,$$
$$\Delta_\perp\Psi_n(x, y) + \lambda_n^2\Psi_n(x, y) = 0,$$
$$\Psi_n(x, y)\Big|_\Sigma = 0, \qquad (7)$$

где $\hat{\lambda}_n$ и λ_n — собственные значения второй и первой краевых задач, Σ — контур поперечного сечения волновода, $\mathbf{n}$ — нормаль к Σ. Аналитические выражения для поперечных составляющих ТЕ- и ТМ-полей в волноводе в фурье-представлении, полученные из уравнений Максвелла (2) с учетом (6) и (7), имеют вид:

ТЕ волна

$$\mathbf{H}_{\omega\tau} = \frac{1}{\mu_1}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\lambda}_n^{-2}\frac{d\widetilde{H}_n(z)}{dz}\nabla\hat{\Psi}_n(x, y),$$

$$\mathbf{E}_{\omega\tau} = -i\omega\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\lambda}_n^{-2}\widetilde{H}_n(z)\left[\mathbf{z}_0\nabla\hat{\Psi}_n(x, y)\right], \qquad (8)$$

ТМ волна

$$\mathbf{H}_{\omega\tau} = -i\varepsilon_0\omega\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-2}\widetilde{E}_n(z)\left[\mathbf{z}_0\nabla\Psi_n(x, y)\right],$$

$$\mathbf{E}_{\omega\tau} = \frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-2}\frac{d\widetilde{E}_n(z)}{dz}\nabla\Psi_n(x, y). \qquad (9)$$

Отметим, что в (8) и (9) $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Гамильтона (набла), $\mathbf{z}_0$ — орт оси oz, индекс $\perp$ означает поперечное составляющее.

Подставляя (6) в волновые уравнения (3) и (4), производя некоторые преобразования с учетом (5) и (7), для $\widetilde{H}_n(z)$ и $\widetilde{E}_n(z)$ получим следующие линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\widetilde{H}_n(z)}{dz^2} + \hat{\chi}_n^2\widetilde{H}_n(z) = -\frac{q\mu_l}{\sqrt{2\pi}}\hat{B}_n\delta(z), \qquad (10)$$

$$\frac{d^2\hat{E}_n(z)}{dz^2} + \chi_n^2 \widetilde{E}_n(z) = \frac{q}{\sqrt{2\pi} v \varepsilon_0} B_n \delta'(z), \tag{11}$$

где

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2(z)} \left[\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_1 \mu_2(z) \omega^2 - \hat{\lambda}_n^2 \right], \tag{12}$$

$$\chi_n^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2(z)} \left[\varepsilon_0 \mu_0 \mu_1 \varepsilon_2(z) \omega^2 - \lambda_n^2 \right], \tag{13}$$

$$\hat{B}_n = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \hat{\Psi}_n(x,y)}{\partial y} \bigg|_{y=y_0} e^{\frac{i\omega x}{v}} dx, \tag{14}$$

$$B_n = \int_{x_1}^{x_2} \Psi_n(x,y) \bigg|_{y=y_0} e^{\frac{i\omega x}{v}} dx. \tag{15}$$

Если теперь в (12) и (13) учитывать выражения для $\varepsilon_2(z)$ и $\mu_2(z)$ (см. (1)), то в первом приближении по индексам модуляции m_ε и m_μ для $\hat{\chi}_n^2$ и χ_n^2 получим

$$\hat{\chi}_n^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2^0} \left[(\chi_n)^2 + m_\mu \hat{\lambda}_n^2 \cos k_0 z \right], \tag{16}$$

$$(\hat{\chi}_n^0)^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_1 \mu_2^0 \omega^2 - \hat{\lambda}_n^2, \tag{17}$$

$$\chi_n^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^0} \left[(\chi_n^0)^2 + m_\mu \lambda_n^2 \cos k_0 z \right], \tag{18}$$

$$(\chi_n^0)^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \mu_1 \varepsilon_2^0 \omega^2 - \lambda_n^2. \tag{19}$$

Переходя в волновых уравнениях (10) и (11) к новой переменной $s = (k_0 z/2)$ с одновременным разложением коэффициентов при $\widetilde{H}_n(z)$ и $\widetilde{E}_n(z)$ в ряд Фурье и подставляя (16)–(19) в (10) и (11), в первом приближении по m_ε и m_μ (ограничиваемся рассмотрением трех пространственных гармоник) получим неоднородные дифференциальные уравнения типа Матье–Хилла [17]

$$\frac{d^2\widetilde{H}_n(s)}{ds^2} + \left(\sum_{k=-1}^{1} \hat{\theta}_k^n e^{2iks} \right) \widetilde{H}_n(s) = -\frac{q\mu_1}{\sqrt{2\pi}} \hat{B}_n \delta(s), \tag{20}$$

$$\frac{d^2\widetilde{E}_n(s)}{ds^2} + \left(\sum_{k=-1}^{1} \hat{\theta}_k^n e^{2iks} \right) \widetilde{E}_n(s) = \frac{q}{\sqrt{2\pi} v \varepsilon_0} B_n \delta'(s), \tag{21}$$

где

$$\hat{\theta}_0^n = \frac{4\mu_1 (\hat{\chi}_n^0)^2}{k_0^2 \mu_2^0}, \quad \hat{\theta}_{\pm 1}^n = \frac{2\mu_1 \hat{\lambda}_n^2}{k_0^2 \mu_2^0} m_\mu,$$

$$\theta_0^n = \frac{4\varepsilon_1 (\chi_n^0)^2}{k_0^2 \varepsilon_2^0}, \quad \theta_{\pm 1}^n = \frac{2\varepsilon_1 \lambda_n^2}{k_0^2 \varepsilon_2^0} m_\varepsilon.$$

Решения соответствующих однородных уравнений

$$\frac{d^2\widetilde{H}_n(s)}{ds^2} + \left(\sum_{k=-1}^{1} \hat{\theta}_k^n e^{2iks} \right) \widetilde{H}_n(s) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d^2\widetilde{E}_n(s)}{ds^2} + \left(\sum_{k=-1}^{1} \theta_k^n e^{2iks} \right) \widetilde{E}_n(s) = 0, \tag{23}$$

будем искать в виде

$$\widetilde{H}_n(s) = e^{i\hat{\mu}_n s} \sum_{k=-1}^{1} \hat{C}_k^n e^{2iks}, \tag{24}$$

$$\widetilde{E}_n(s) = e^{i\mu_n s} \sum_{k=-1}^{1} C_k^n e^{2iks}, \tag{25}$$

где характеристические числа $\hat{\mu}_n, \mu_n$ и амплитуды $\hat{C}_k^n, C_k^n$ пока неизвестные величины. Подстановка (24) и (25) в (22) и (23) приводит к дисперсионным уравнениям для определения $\hat{\mu}_n, \mu_n$ и к системам уравнений для определения $\hat{C}_k^n, C_k^n$. Решая эти уравнения в области слабого (не резонансного) взаимодействия между волной излучения и волной модуляции ($\hat{\theta}_0^1 \neq 1$, $\theta_0^n \neq 1$), для величин $\hat{\mu}_n, \mu_n$ и $\hat{C}_k^n, C_k^n$ в первом приближении по индексам модуляции получим

$$(\hat{\mu}_n)^2 \simeq \hat{\theta}_0^n, \quad (\mu_n)^2 \simeq \theta_0^n,$$

$$\hat{C}_{\pm 1}^n \cong \frac{\hat{\theta}_1^n \hat{C}_0^n}{4\left(1 \pm \sqrt{\hat{\theta}_0^n}\right)}, \quad C_\pm^n \cong \frac{\theta_1^n C_0^n}{4(1 \pm \sqrt{\theta_0^n})},$$

где величины $\hat{C}_0^n$ и C_0^n можно найти из условия нормировки.

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных для определения частных решений неоднородных уравнений (20), (21) и учитывая условия излучения (нет волн, распространяющихся к источнику излучения) для $\widetilde{H}_n(z)$ и $\widetilde{E}_n(z)$, получим

$$\widetilde{H}_n(z) = \frac{i\xi_n}{\hat{C}_0^n \hat{\mu}_n k_0} \sum_{k=-1}^{1} \hat{C}_k^n \cos \frac{k_0(\hat{\mu}_n + 2k)z}{2}, \tag{26}$$

$$\widetilde{E}_n(z) = \frac{k_0 \xi_n}{2C_0^n} \sum_{k=-1}^{1} C_k^n \sin \frac{k_0(\mu_n + 2k)z}{2}, \tag{27}$$

где

$$\xi_n = -\frac{q\mu_1}{\sqrt{2\pi}} \hat{B}_n, \quad \xi_n = \frac{q}{\sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon_0 v} B_n.$$

(26) и (27) указывают на то, что поперечно-электрическое (TE) и поперечно-магнитное (TM) поля переходного излучения заряженной частицы, движущейся перпендикулярно оси волновода с периодически модулированным анизотропным магнитодиэлектрическим заполнением представляют сумму пространственных гармоник с различными амплитудами. При этом на основной гармонике ($k = 0$) амплитуды не зависят от индексов модуляции, а на боковых гармониках ($k = \pm 1$) они пропорциональны индексам модуляции в первой степени.

Потери энергии на переходное излучение

Энергии переходного излучения движущейся частицы на ее траектории от x_1 до x_2 можно найти с помощью тормозящей силы $q\hat{E}_{\omega x}$, действующей на частицу со стороны создаваемого ею поля. Вычисления приводят к следующим выражениям:

$$S_n^{TE} = \frac{\mu_0\sqrt{\mu_2^0\mu_1}q^2}{4\pi\hat{\lambda}_n^2} \times \mathrm{Re}\int_0^\infty \left[1 + \frac{\mu_1\hat{\lambda}_n^2}{k_0^2\mu_2^0 - 4\mu_1(\hat{\chi}_n^0)^2} m_\mu\right] \frac{\omega}{\hat{\chi}_n^0} |\hat{B}_n|^2 d\omega, \quad (28)$$

$$S_n^{TM} = \frac{k_0 q^2}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2^0}\lambda_0^2 v^2} \times \mathrm{Re}\int_0^\infty i\left[1 + \frac{3\varepsilon_1\lambda_n^2}{k_0^2\varepsilon_2^0 - 4\varepsilon_1(\chi_n^0)^2} m_\varepsilon\right]\omega|B_n|^2 d\omega, \quad (29)$$

где из области интегрирования исключаются частоты, удовлетворяющие условиям

$$k_0^2\mu_2^0 - 4\mu_1(\hat{\chi}_n^0)^2 = 0,$$

$$k_0^2\varepsilon_2^0 - 4\varepsilon_1(\chi_n^0)^2 = 0.$$

Как следует из (28) и (29), модуляция заполнения волновода приводит к тому, что в формулах для энергии излучения под интегралами появляются члены, пропорциональные индексам модуляции в первой степени.

Теперь перейдем к рассмотрению частного случая прямоугольного волновода, стенки которого определяются уравнениями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Как известно, ортонормированные собственные функции $\hat{\Psi}_n(x, y)$, $\Psi_n(x, y)$ и собственные значения $\hat{\lambda}_n$, λ_n краевых задач Неймана и Дирихле для поперечного сечения волновода выражаются формулами [18]

$$\hat{\Psi}_n(x, y) = \hat{\Psi}_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{\delta_n\delta_m}{ab}} \cos\frac{\pi m}{a}x \cos\frac{\pi n}{b}y, \quad (30)$$

$$\Psi_n(x, y) = \Psi_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\frac{\pi m}{a}x \sin\frac{\pi n}{b}y, \quad (31)$$

$$\hat{\lambda}_n = \hat{\lambda}_{n,m} = \lambda_n = \lambda_{n,m} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

$$\delta_i = 2, \quad i \neq 0, \quad \delta_0 = 1. \quad (32)$$

Проводя интегрирование по x от 0 до a в выражениях для $\hat{B}_n$ и B_n (см. (14) и (15)) с учетом (30)–(32) и подставляя в (28) и (29), для $S_n^{(TE)}$ и $S_n^{(TM)}$ получим

$$S_{n,m}^{(TE)} = \frac{\mu_0\sqrt{\mu_2^0\mu_1}q^2\pi n^2\delta_n\delta_m k_0^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{b}y_0\right)}{ab^3v^2\hat{\lambda}_{n,m}^2} \times \mathrm{Re}\int_0^\infty \left(1 + \frac{\mu_1\hat{\lambda}_{n,m}^2}{k_0^2\mu_2^0 - 4\mu_1(\hat{\chi}_{n,m}^0)^2} m_\mu\right)\frac{\omega^3}{\hat{\chi}_{n,m}^0} \times \frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right]^2} d\omega, \quad (33)$$

$$S_{n,m}^{(TM)} = \frac{8\pi k_0 q^2 m^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{b}y_0\right)}{\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2^0}a^3bv^2\hat{\lambda}_{n,m}^2} \times \mathrm{Re}\int_0^\infty i\left(1 + \frac{3\varepsilon_1\lambda_{n,m}^2}{k_0^2\varepsilon_2^0 - 4\varepsilon_1(\chi_{n,m}^0)^2} m_\varepsilon\right) \times \frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right]^2}\omega d\omega, \quad (34)$$

Как следует из (33) и (34) (см. также [13]), в излучении могут отсутствовать моды с индексом n, которые удовлетворяют условию $\sin^2(\pi n y_0/b) = 0$, $ny_0/b = r$, $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Если, в частности, $r = 1$, то имеем $ny_0 = b$. Это условие указывает на то, что отсутствует взаимодействие между заряженной частицей и соответствующей модой (частица проходит через узел продольной составляющей электрического поля). Кроме того, в излучении будут отсутствовать частоты, удовлетворяющие условию

$$\frac{\omega a}{2v} - \frac{\pi m}{2} = p\pi, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{a}{\pi v/\omega} = m + 2p. \quad (35)$$

Теперь, если учесть, что $\pi v/\omega$ есть половина длины волны тока, создаваемого частицей, то из (35) можно сделать вывод, что когда на траектории частицы, равной a, укладывается целое число полуволн тока, то из-за интерференции излучение с такой частотой отсутствует. Это утверждение не распространяется на случай, когда $p = 0$, так как при этом $(\omega a/2v) - (\pi m/2) = 0$ и под интегралами в (33) и (34) подынтегральные функции имеют устранимый разрыв на частоте $\omega = \pi m v/a$. Здесь опять на траектории частицы укладывается целое число полуволн тока частицы. Но если раньше излучение с такой частотой гасилось из-за интерференции от отдельных частей траектории частицы, то при $p = 0$ на частоте $\omega = \pi m v/a$ начинает работать новый механизм излучения. Оказывается, что $\omega = \pi m v/a$ и есть частота черенковского излучения и подынтегральная функция

$$\frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right]^2}$$

при

$$\omega_{\text{Cher}} = \frac{\pi m v}{a} \tag{36}$$

имеет устранимый разрыв и принимает значение, пропорциональное a^2 (квадрат длины траектории частицы). При вычислении энергии излучения Вавилова–Черенкова интегралы в (33) и (34) берутся по окрестности ω_{Cher}, размер которой определяется из соотношения

$$\frac{a}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right)\Big|_{\omega=\omega_{\text{Cher}}} \Delta\omega_{\text{Cher}} \cong 2\pi,$$

$$\Delta\omega_{\text{Cher}} \cong \frac{4\pi v}{a} \tag{37}$$

Механизм возникновения излучения Вавилова–Черенкова при выполнении условия его возникновения ($\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2^0 v^2 > 1$ для TE-волны, $\varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2^0 v^2 > 1$ для TM-волны) заключается в том, что заряженная частица во время своего движения взаимодействует с сопутствующим ей полем в стоячей волне в плоскости xoy и фазовая скорость сопутствующей волны становится равной скорости частицы, т. е.

$$v_{n,m,\text{ph}} = \frac{\omega_{\text{Cher}}}{k} = v,$$

где $k = \pi m/a$ есть волновое число этой волны. Для получения представления о порядке величины частоты излучения Вавилова–Черенкова по формуле (36) рассмотрим следующий пример. Пусть $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2^0 \simeq 2.6$, $\mu_1 \simeq \mu_2^0 \simeq 2.1$, $m = 1$, $v \simeq 2 \cdot 10^8$ m/s (такую скорость имеет частица при энергии $7 \cdot 10^5$ eV $\simeq 10^{-13}$ J) [5]. Тогда при $a = 0.8 \cdot 10^{-3}$ m по формуле (35) получим $\omega_{\text{Cher}} \simeq 7.85 \cdot 10^{11}$ Hz, а при $a = 10^{-3}$ получим $\omega_{\text{Cher}} \simeq$ $\simeq 6.28 \cdot 10^{22}$ Hz. Отметим, что полученные оценки частоты излучения Вавилова–Черенкова по порядку совпадают со значением, полученным в работе [9].

Заключение

Полученные в работе результаты показывают, что пространственная периодическая модуляция заполнения волновода существенным образом влияет на процесс переходного излучения. Поля в волноводе представляют собой набор пространственных гармоник с различными амплитудами, при этом если на нулевой гармонике поля не зависят от индексов модуляции, то на плюс и минус первых гармониках они пропорциональны индексам модуляции в первой степени. В выражениях для энергий переходного излучения под интегралами добавляются члены, пропорциональные индексам модуляции в первой степени. В области слабого взаимодействия излучения с модулированным заполнением на определенной частоте появляется излучение Вавилова–Черенкова, что выражается резким пиком в спектре переходного излучения. Ширина частотной области черенковского излучения прямо пропорциональна скорости движения частицы и обратно пропорциональна длине траектории частицы.

Список литературы

[1] *Гинзбург В.Л., Франк И.М.* // ЖЭТФ. 1946. В. 16. С. 15–28.
[2] *Тамм И.Е., Франк И.М.* // ДАН СССР. 1937. Т. 14. В. 3. С. 107–112.
[3] *Гинзбург В.Л.* // УФН. 1996. Т. 166. № 10. С. 1033–1042.
[4] *Болотовский Б.М., Серов Ф.В.* // УФН. 2009. Т. 179. № 5. С. 517–524.
[5] *Болотовский Б.М.* // УФН. 2009 Т. 179. № 11. С. 1161–1173.
[6] *Болотовский Б.М.* // УФН. 1961. Т. 75. В. 2. С. 295–350.
[7] *Гарибян Г.М.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. В. 2(8). С. 527–533.
[8] *Барсуков К.А.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. В. 4(10). С. 1106–1109.
[9] *Cook A.M., Tikhoplav R., Tochitsky S.Y., Travish G., Williams O.B., Rosenzweig J.B.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 095003-1–095003-4.
[10] *Геворкян Э.А.* // Опт. и спектр. 2015. Т. 119. № 2. С. 302–306; *Gevorkyan E.A.* // Opt. Spectrosc. 2015. V. 119. N 2. P. 286–290.
[11] *Болотовский Б.М.* // УФН. 2009. Т. 179. № 11. С. 517–524.
[12] *Геворкян Э.А.* // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 1. С. 3–29.
[13] *Барсуков К.А., Газазян Э.Д., Лазиев Э.М.* // Известия вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 2. С. 191–195.
[14] *Gevorkyan E.A.* // Proc. 16th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Lviv. Ukraine. 2016. P. 334–336.
[15] *Gevorkyan E.A., Tatarnikov O.V.* // Proc. 21st International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. Tbilisi. Georgia. 2016. P. 17–19.
[16] *Gevorkyan E.A.* // Wave propagation / Ed. by Petrin A., IntechOpen, 2011. P. 267; [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.intechopen.com
[17] *Уиттеккер Э.Г., Ватсон Дж.Р.* Курс современного анализа. Пер. с англ. В 2 частях. М.: URSS, 2015. 864 с.
[18] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. 798 с.