01;02

Условия финитности движения иона в электростатической ловушке с разделением переменных в параболических координатах

© К.В. Соловьев [1,2], М.В. Виноградова [1]

[1] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
[2] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: k-solovyev@mail.ru

Поступило в Редакцию 17 января 2018 г.

Рассмотрены уточненные условия финитности движения заряженных частиц в поле ионной ловушки. Простота уравнений позволяет получить часть результатов в элементарной форме, что дает возможность детально разобраться в вопросах удержания частиц в таких системах.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.14.46342.17215

Данная публикация продолжает работу [1], уточняя и конкретизируя найденные в ней условия устойчивости движения заряженной частицы в ионной ловушке с разделением переменных в параболических координатах u, v, связанных с декартовыми координатами x, y формулами

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv. \tag{1}$$

Рассмотрение ведется в безразмерных переменных, использованных ранее в [1].

Напомним, что исследуется движение заряженной частицы в электростатическом поле

$$\varphi = z^2 - \frac{4}{5}(u^2 - v^2)^2 - \frac{4}{5}(uv)^2 + \mu(u^2 - v^2) + \frac{\varepsilon u + \delta v}{u^2 + v^2}. \tag{2}$$

Движение разделено по координатам z, u, v. Частица совершает гармонические колебания по z. Для построения ионной ловушки дополнительно требуется обеспечение финитности движения по u и v.

В связи с этим возникает задача определения условий существования ям эффективных потенциалов

$$U(u) = -\frac{16}{5}u^6 + 4\mu u^4 - 4gu^2 + 4\varepsilon u,$$

$$V(v) = -\frac{16}{5}v^6 - 4\mu v^4 - 4gv^2 + 4\delta v \tag{3}$$

и возможности удержания в них частицы с учетом равенства величины и противоположности знаков эффективной полной энергии по u и v

$$\frac{p_u^2}{2} + U(u) = C, \qquad \frac{p_v^2}{2} + V(v) = -C. \tag{4}$$

Заметим, что в (3) восстановлены опущенные в формулах (12) работы [1] коэффициенты при членах $\varepsilon\, u$, $\delta\, v$.

В [1] показана возможность трехмерного финитного движения частицы в ловушке при выполнении для констант μ, g условий (15) из работы [1] и отличии от нуля хотя бы одной из констант ε, δ. Более внимательный взгляд на структуру потенциалов (3) позволил уточнить условия финитности.

Одномерные потенциалы по обеим координатам описываются полиномами шестого порядка с отрицательными коэффициентами при старших членах. Следовательно, при стремящемся к плюс либо минус бесконечности аргументе определяющие вид потенциальных ям функции стремятся к минус бесконечности. Соответственно $U(u)$, $V(v)$ имеют по крайней мере один максимум. Однако для наличия потенциальной ямы в таком случае необходимо наличие у функций хотя бы трех экстремумов: двух максимумов и одного минимума между ними (рис. 1). Поиск экстремумов $U(u), V(v)$ как нулей функций $U'(u), V'(v)$ наталкивается на неразрешимость в радикалах уравнений пятой степени общего вида, коими являются уравнения $U'(u) = 0$, $V'(v) = 0$ (теорема Абеля, см., например, [2]). Поэтому полезно использовать информацию об экстремумах функций $U'(u)$, $V'(v)$, базируясь на известной теореме математического анализа о наличии по крайней мере одного экстремума на интервале (a, b) у непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции, принимающей в точках a и b равные значения (теорема Ролля, см., например, [3]). Тогда требование о наличии хотя бы трех нулей у каждой из функций $U'(u)$, $V'(v)$ приводит к необходимости наличия хотя бы

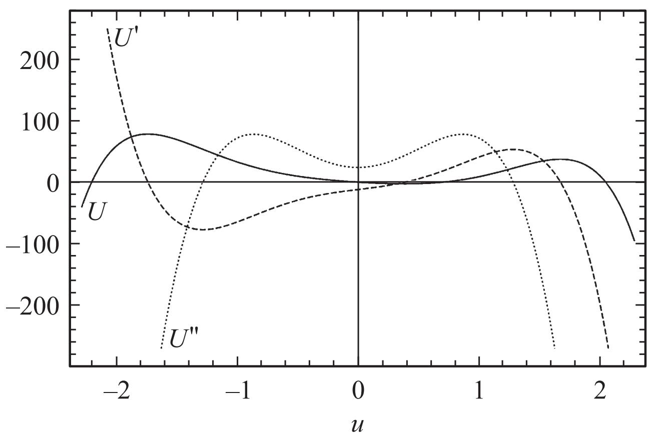

Рис. 1. Потенциал $U(u)$ (см. (3)) и его производные для случая $g = -3$, $\mu = 3$, $\varepsilon = -3$.

двух нулей у каждой из функций $U''(u)$, $V''(v)$. Уравнения $U''(u) = 0$, $V''(v) = 0$ с учетом (3) оказываются биквадратными:

$$12u^4 - 6\mu u^2 + g = 0, \qquad 12v^4 + 6\mu v^2 + g = 0, \tag{5}$$

имеющими по четыре корня, соответствующих всем возможным комбинациям знаков перед радикалами:

$$u_{1,2,3,4} = \pm\frac{\sqrt{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}}{2}, \quad v_{1,2,3,4} = \pm\frac{\sqrt{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}}{2}. \tag{6}$$

Наличие определенного числа экстремумов $U'(u)$, $V'(v)$ обеспечивается вещественностью соответствующего количества корней (6) уравнений (5). Рассмотрим возможные варианты. Заметим сразу, что отрицательность выражения под внутренним радикалом недопустима, так как ведет к отсутствию вещественных корней обоих уравнений. Следовательно, $\mu^2 - 4g/3 \geqslant 0$. При $\mu > 0$ если $\mu > \sqrt{\mu^2 - 4g/3}$, то $0 < g < 3/4\mu^2$. В этом случае все корни уравнения $U''(u) = 0$ вещественны, однако уравнение $V''(v) = 0$ не имеет вещественных корней вовсе. Аналогично для отрицательных μ при тех же условиях для g имеется четыре вещественных v-корня при отсутствии вещественных u-корней. Полученные результаты интереса не представляют. Если $|\mu| < \sqrt{\mu^2 - 4g/3}$, то $g < 0$, и в этом случае вещественными оказываются по два корня каждого из уравнений (5):

$$u_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}}{2}, \quad v_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}}{2}. \tag{7}$$

Этот вариант (рис. 1) приемлем, и именно он исследован далее.

Наличие двух экстремумов функций $U'(u)$, $V'(v)$ является необходимым, но недостаточным условием наличия у них трех корней. Рассмотрим вопрос подробнее на примере функции

$$U'(u) = -\frac{96}{5} u^5 + 16\mu u^3 - 8gu + 4\varepsilon. \tag{8}$$

Заметим, что $U'(u) \to \pm\infty$ при $u \to \mp\infty$ (рис. 1). Экстремумы $U'(u)$ симметричны относительно $u = 0$, минимум имеется при отрицательных u, максимум — при положительных:

$$\begin{aligned}(U'_{\min,\max}) &= U'(u_{3,4}) \\ &= \mp\frac{4}{5}\sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}\left(-4g + \mu\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}\right)\right) + 4\varepsilon.\end{aligned} \tag{9}$$

Достаточным условием существования трех корней функции $U'(u)$ (и соответственно наличия ямы по u) является удовлетворение параметрами μ, g, ε следующей системы неравенств:

$$(U')_{\min} < 0, \qquad (U')_{\max} > 0$$

или

$$-A < \varepsilon < A, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{5}\sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}\left(-4g + \mu\left(\sqrt{\mu^2 - 4g/3}\right)\right) \\ &= (U')_{\max}|_{\varepsilon=0} = -(U')_{\min}|_{\varepsilon=0}.\end{aligned} \tag{11}$$

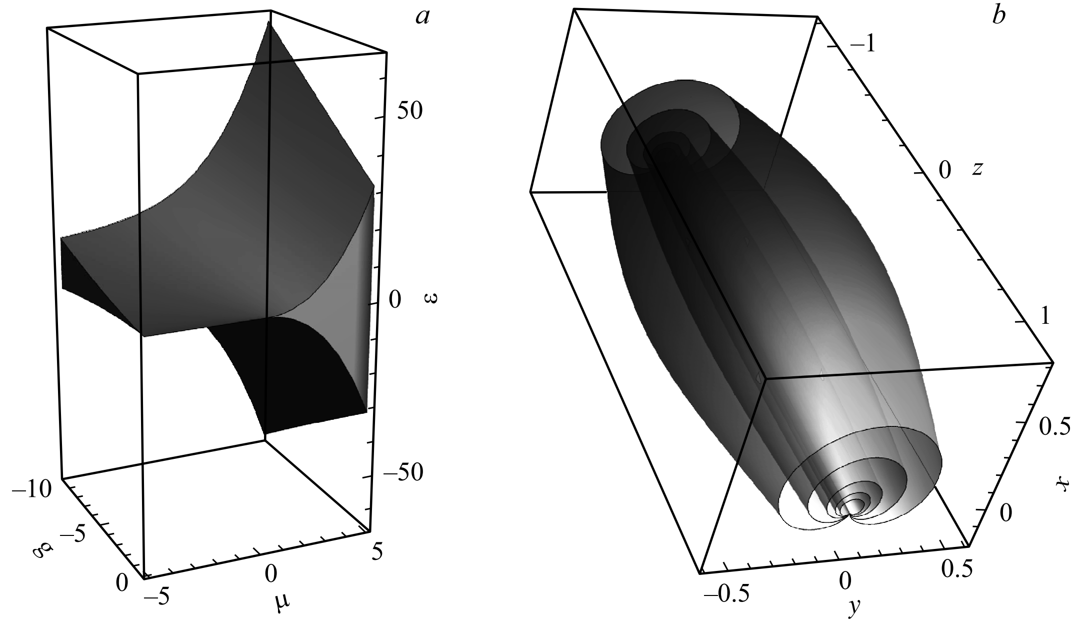

Рис. 2. *a* — область финитности движения иона по координате u в пространстве параметров (g, μ, ε); *b* — эквипотенциальные поверхности поля ловушки (см. формулу (9) в [1]), реализующего финитное движение иона (параметры потенциала $g = -4$, $\mu = 2$, $\varepsilon = -5$, $\delta = 0$).

Визуализация области, определяемой неравенствами (10), (11) и условием $g < 0$, представлена на рис. 2, *a*. Аналогичный результат для v-ямы получается заменой в (11) μ на $-\mu$ и ε на δ.

Далее на примере u-ямы определим область допустимых значений константы C (см. (4)) — константы разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби [1], имеющей здесь смысл эффективной u-энергии. Из рис. 1 видно, что финитность движения по u соблюдается при $U_{\min} \leqslant C \leqslant \min(U_{\max 1}, U_{\max 2}) = U_{\min\max}$. Искомая область, построенная на рис. 3, *a* в координатах (ε, g, C), ограничена снизу гладкой поверхностью $U_{\min}(g, \mu, \varepsilon)$, проходящей через ось 0ε, и сверху кусочно-гладкой поверхностью $U_{\min\max}(g, \mu, \varepsilon)$, множество особых точек (ребро) которой описывается уравнениями

$$C = \frac{25}{108}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 12g/5}\right)\left(-\frac{24}{5}g + \mu\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 12g/5}\right)\right), \quad \varepsilon = 0. \tag{12}$$

Сочленение верхней ($U_{\min\max}$) и нижней ($U_{\min}$) поверхностей проходит по линиям

$$C = g\mu/3 - (\mu^2 - 4g/3)(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3})/2,$$

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}}\left(-4g + \mu\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4g/3}\right)\right)/5. \tag{13}$$

Рассматривая условия одновременной финитности по u и v, следует учесть, что, согласно (4), должны совместно выполняться неравенства

$$U_{\min}(g, \mu, \varepsilon) < C < U_{\min\max}(g, \mu, \varepsilon),$$

$$-V_{\min\max}(g, \mu, \delta) < C < -V_{\min}(g, \mu, \delta). \tag{14}$$

Зафиксировав параметры g, μ можно построить область допустимых значений в пространстве ε, δ, C как результат пересечения двух цилиндров (рис. 3, *b*). В режиме удержания начальные данные задачи Коши для уравнений движения частицы в плоскости (u, v) следует выбирать таким образом, чтобы плоскость $C = \text{const}$ имела непустое пересечение с указанной областью.

Таким образом, в работе удалось уточнить найденные в [1] условия финитности движения ионов в ловушке $g > 0$, $\mu \in R$ при $\varepsilon > 0$ и/или $\delta > 0$. При сохранении тех же ограничений на g, μ условия для

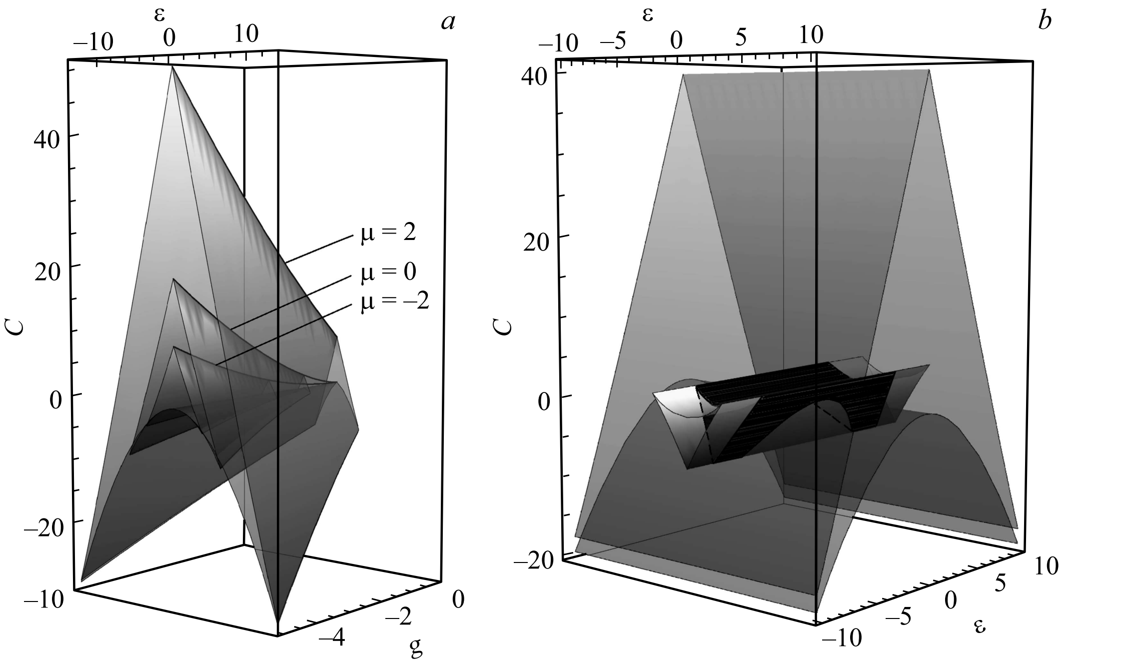

Рис. 3. Области финитности движения иона. a — по координате u в пространстве параметров (ε, g, C) для различных значений μ; b — по координатам u, v в пространстве параметров (ε, δ, C) при $g = -4$, $\mu = 2$. Область финитности — пересечение двух цилиндров — выделена темным.

ε теперь определяются неравенствами $(10), (11)$, условия для δ — аналогами $(10), (11)$, получаемыми заменой μ на $-\mu$. Кроме того, найдены границы изменения связанной с начальными данными движения (см. (17) в [1]) константы C в области допустимых (с точки зрения условий финитности) значений $g, \mu, \varepsilon, \delta$. Рис. $2, b$ иллюстрирует вид трехмерных эквипотенциальных поверхностей поля ловушки в декартовых координатах при параметрах поля, обеспечивающих финитность движения иона.

Данная работа частично выполнена в рамках гос. задания № 007-00229-18-00 ИАП РАН.

Список литературы

[1] *Голиков Ю.К., Соловьев К.В.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 7. С. 82–88.
[2] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979. С. 217.
[3] *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1. С. 194.