

Сравнительные особенности электромагнитного рассеяния на невидимой сферически симметричной линзе с отрицательным показателем преломления

© О.Н. Смольникова^{1,2}, С.П. Скобелев^{2,3}✉

¹ Московский авиационный институт (НИУ),
125080 Москва, Россия

² ПАО „Радиофизика“,
125363 Москва, Россия

³ Московский физико-технический институт (ГУ),
141700 Долгопрудный, Россия

✉ e-mail: s.p.skobelev@mail.ru

Поступила в редакцию 26.01.2018 г.

Рассмотрена сферически симметричная линза с отрицательным показателем преломления, которая может быть невидимой с точки зрения геометрической оптики. Приведены выражения, описывающие профиль показателя преломления и траектории лучей в линзе, а также результаты численного моделирования рассеяния плоской волны на линзе в строгой постановке задачи. Обнаружено, что в отличие от невидимой линзы с положительным показателем преломления минимумы поперечного сечения рассеяния в переднем направлении, соответствующие невидимости, для линзы с отрицательным показателем преломления имеют место при целых, а не полуцелых значениях электрического радиуса, и что их глубина меньше из-за наличия астигматизма при фокусировке лучей на оси. Приведены также результаты, характеризующие влияние потерь в линзе на уровень минимумов поперечного сечения рассеяния.

DOI: 10.21883/OS.2018.07.46271.25-18

Введение

Исследования и разработки, связанные с метаматериалами, представляющими собой искусственные среды с различными свойствами, в частности, с отрицательным показателем преломления [1], являются одним из бурно развивающихся современных научных направлений. Наряду с работами по созданию таких материалов большой интерес также представляют исследования, связанные с их возможными применениями и с созданием новых устройств на их основе. Примерами таких, пока гипотетических, устройств являются линза Итона–Липмана и две модификации линзы Лüneберга, описанные в [2], а также плащи-невидимки различных типов [3].

В рамках исследований по проблеме невидимости в [4,5] была предложена сферическая линза из изотропного материала с положительным показателем преломления, зависящим только от радиальной координаты. Невидимость линзы с точки зрения геометрической оптики обеспечивается тем фактом, что луч, входящий в линзу без отражения, делает петлю вокруг центра и выходит из линзы также без отражения в том же самом направлении, как и в отсутствие линзы. Показатель преломления в этой линзе изменяется от единицы на поверхности линзы до бесконечности в ее центре. Еще одна модификация невидимой линзы, в отличие от линзы [4,5], на основе материала с отрицательным показателем преломления, недавно была предложена в [6], где показано, что

показатель преломления в ней изменяется в конечных пределах.

Указанные линзы могут быть невидимыми с точки зрения законов геометрической оптики. Однако геометрическая оптика является приближенной теорией, и поэтому представляет интерес исследовать характеристики рассеяния на невидимых линзах при строгой постановке электродинамической задачи. Такие исследования невидимой линзы с положительным показателем были проведены в [7,8] с использованием приближенного метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ-метод) и коммерческого пакета COMSOL.

Основной целью настоящей работы является численный анализ характеристик рассеяния плоской электромагнитной волны на невидимой линзе с отрицательным показателем преломления в строгой постановке задачи и сравнение полученных результатов с аналогичными результатами для невидимой линзы с положительным показателем преломления.

Геометрооптические характеристики

Невидимая линза, предложенная в [4,5], характеризуется положительным показателем преломления

$$n(r) = \left(Q - \frac{1}{3Q}\right)^2, \quad Q = \left(-\frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{27}}\right)^{1/3}, \quad (1)$$

который равен единице на поверхности линзы при $r = a$, где a — радиус линзы, и стремится к бесконечности

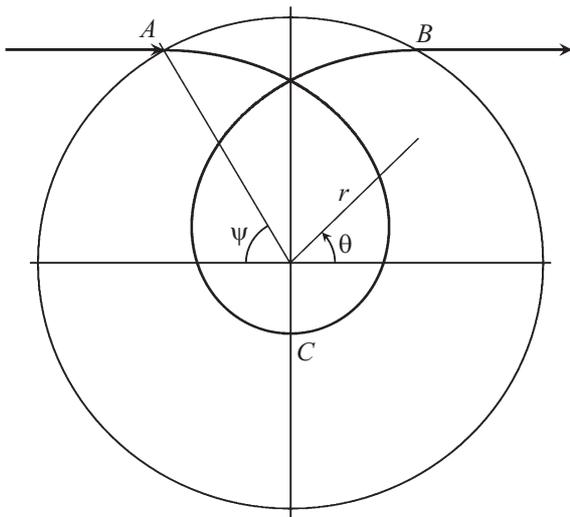


Рис. 1. Траектория луча в невидимой линзе [4,5] с положительным показателем преломления.

как $(2a/r)^{2/3}$ при $r \rightarrow 0$. Как показано в [6], траектория луча от точки входа A до точки возврата C (рис. 1) определяется формулой

$$\theta(r) = \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{ha}{rn(r)} + \arcsin \frac{2 - h^2 - h^2n(r)}{2\sqrt{1 - h^2}} - \arcsin \frac{(2 - h^2)n(r) - h^2}{2n(r)\sqrt{1 - h^2}}, \quad (2)$$

где $h = \sin \psi$ — параметр луча, определяемый угловой координатой ψ точки входа луча в линзу.

В отличие от [4,5], невидимая линза, предложенная в [6], имеет отрицательный показатель преломления, модуль которого определяется формулой

$$n(r) = \frac{4}{[(s + r/a)^{2/3} + (s - r/a)^{2/3} + 1/3]^2}, \quad (3)$$

где $s = (r^2/a^2 + 1/27)^{1/2}$. Профиль отрицательного показателя показан на рис. 2. Траектории лучей в линзе определяются формулой

$$\theta(r) = -\frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{ha}{rn(r)} + 2 \arcsin \frac{\sqrt{n(r)} - h^2}{\sqrt{n(r)}\sqrt{1 - h^2}}, \quad (4)$$

также выведенной в [6]. Пример траекторий показан во вставке к рис. 2 и на рис. 3.

Как мы видим, лучи, выходящие из невидимых линз, продолжают движение в том же направлении, как это было бы в отсутствие линзы. При этом для обеспечения невидимости фаза луча после выхода из линзы с точностью до значения, кратного 2π , должна совпадать с фазой параллельных лучей, не попадающих в линзу.

Метод расчета характеристик рассеяния

Геометрия задачи рассеяния показана на рис. 4, где сферически симметричная линза облучается плоской электромагнитной волной единичной амплитуды, поляризованной вдоль оси x и распространяющейся в положительном направлении оси z . Будем считать, что диэлектрическая проницаемость линзы зависит от радиальной координаты, а магнитная проницаемость постоянна. Для решения задачи определения поля, рассеянного линзой, и поля внутри линзы мы применяем гибридный проекционный метод, описанный в [9]. Согласно [9], представим поперечные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей в

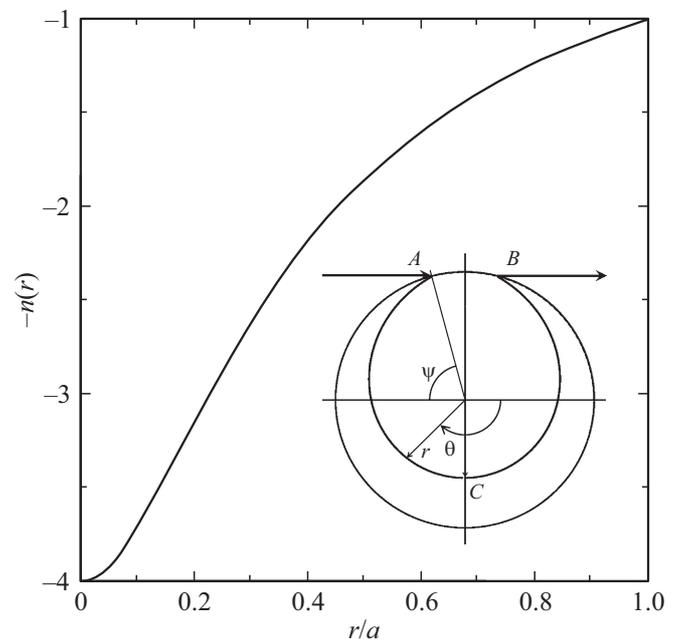


Рис. 2. Профиль отрицательного показателя преломления в невидимой линзе [6].

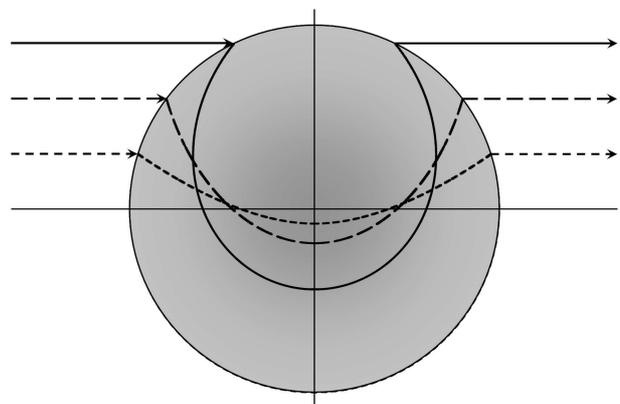


Рис. 3. Траектории лучей в невидимой линзе с отрицательным показателем преломления.

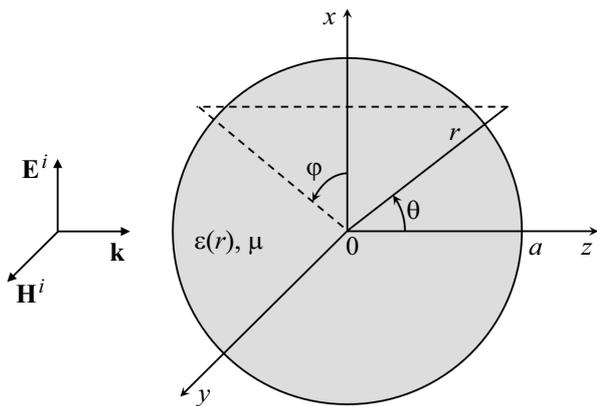


Рис. 4. Геометрия задачи рассеяния на радиально неоднородной диэлектрической сфере.

виде разложений

$$\mathbf{E}_{1r}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{kr} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ [A_l \psi_l(kr) + R_{1l} \xi_l(kr)] \mathbf{T}_{1l}^e - i [A_l \psi_l'(kr) + R_{2l} \xi_l'(kr)] \mathbf{T}_{2l}^e \right\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_{1r}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\eta kr} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ -i [A_l \psi_l'(kr) + R_{1l} \xi_l'(kr)] \mathbf{T}_{1l}^h + [A_l \psi_l(kr) + R_{2l} \xi_l(kr)] \mathbf{T}_{2l}^h \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_{2r}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} [E_{1l}(r) \mathbf{T}_{1l}^e + E_{2l}(r) \mathbf{T}_{2l}^e], \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_{2r}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\eta} \sum_{l=1}^{\infty} [H_{1l}(r) \mathbf{T}_{1l}^h + H_{2l}(r) \mathbf{T}_{2l}^h], \quad (8)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, η — волновое сопротивление свободного пространства,

$$A_l = i^l \sqrt{(2l+1)2\pi}$$

— известные коэффициенты разложения, соответствующие падающей волне, R_{jl} — неизвестные постоянные коэффициенты для поперечно-электрических (ТЕ) волн ($j = 1$) и поперечно-магнитных (ТМ) волн ($j = 2$) рассеянного поля в свободном пространстве, $E_{jl}(r)$ и $H_{jl}(r)$ — неизвестные переменные коэффициенты для полей в неоднородном слое, $\psi_l(kr)$ и $\xi_l(kr)$ — функции Риккати–Бесселя и Риккати–Ханкеля первого рода соответственно (зависимость от времени выбрана в виде $e^{-i\omega t}$),

$$\mathbf{T}_{1l}^e(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} \frac{1}{l(l+1)} \times \left(\mathbf{e}_\theta \frac{P_l^1}{\sin \theta} \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \frac{dP_l^1}{d\theta} \sin \varphi \right), \quad (9)$$

$$\mathbf{T}_{2l}^e(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} \frac{1}{l(l+1)} \times \left(\mathbf{e}_\theta \frac{dP_l^1}{d\theta} \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \frac{P_l^1}{\sin \theta} \sin \varphi \right) \quad (10)$$

— ортонормированные поперечные векторные функции, $P_l^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра, $\mathbf{T}_{jl}^h = \mathbf{e}_r \times \mathbf{T}_{jl}^e$ — также ортонормированные поперечные функции, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ — орты сферической системы координат.

Проектирование уравнений Максвелла, записанных для области внутри линзы, на поперечные векторные функции приводит к двум независимым системам обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$ik \frac{dV_1}{dr} + \left[k^2 \varepsilon(r) - \frac{l(l+1)}{r^2 \mu} \right] U_1 = 0, \quad (11)$$

$$V_1 = \frac{1}{ik\mu} \frac{dU_1}{dr}, \quad (12)$$

для ТЕ-волн и

$$ik \frac{dU_2}{dr} + \left[k^2 \mu - \frac{l(l+1)}{r^2 \varepsilon(r)} \right] V_2 = 0, \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{1}{ik\varepsilon(r)} \frac{dV_2}{dr}, \quad (14)$$

для ТМ-волн относительно функций $U_j(r) = krE_{jl}(r)$ и $V_j(r) = krH_{jl}(r)$.

Полученные дифференциальные уравнения решаем численно с использованием одномерного метода конечных элементов. Представим решение для $U_1(r)$ и $V_2(r)$ в виде

$$U_1(r) = \sum_{n=1}^N U_{1n} f_n(r), \quad (15)$$

$$V_2(r) = \sum_{n=1}^N V_{2n} f_n(r), \quad (16)$$

где U_{1n} и V_{2n} — неизвестные постоянные коэффициенты, N — число узлов, расположенных в точках с координатами $r_n = n\Delta$, $\Delta = a/N$ и $f_n(r)$ — треугольные функции [10, стр. 210] с вершинами, расположенными в указанных узловых точках. Проектирование (11) и (13) на $f_{n'}(r)$, учет (12) и (14), а также сшивание электрических полей (5) и (7) и магнитных полей (6) и (8) на поверхности линзы позволяет свести задачу к системам линейных алгебраических уравнений для каждого l :

$$\sum_{n=1}^N Z_{n'n}^{(1)} U_{1n} + R_{1l} \xi_l'(ka) \delta_{n'N} = -A_l \psi_l'(ka) \delta_{n'N}, \quad (17)$$

$$U_{1N} - R_{1l} \xi_l(ka) = A_l \psi_l(ka) \quad (18)$$

для ТЕ-волн и

$$\sum_{n=1}^N Z_{n'n}^{(2)} V_{2n} + R_{2l} \xi_l'(ka) \delta_{n'N} = -A_l \psi_l'(ka) \delta_{n'N}, \quad (19)$$

$$V_{2N} - R_{2l}\xi_l(ka) = A_l\psi_l(ka) \quad (20)$$

для ТМ-волн, где

$$Z_{n'n}^{(1)} = \int_0^a f_{n'}f_n \left[k\varepsilon - \frac{l(l+1)}{kr^2\mu} \right] dr - \frac{1}{k\mu} \int_0^a f_{n'}'f_n' dr, \quad (21)$$

$$Z_{n'n}^{(2)} = \int_0^a f_{n'}f_n \left[k\mu - \frac{l(l+1)}{kr^2\varepsilon} \right] dr - \frac{1}{k} \int_0^a \frac{1}{\varepsilon} f_{n'}'f_n' dr \quad (22)$$

— матричные элементы.

Коэффициенты разложения рассеянного поля R_{1l} и R_{2l} , найденные в результате решения систем (17), (18) и (19), (20), используются для расчета двухпозиционного поперечного сечения рассеяния линзы

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \varphi) &= \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}^s|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{\pi} \left| \sum_{l=1}^L (-i)^l (R_{1l}\mathbf{T}_{1l}^e + R_{2l}\mathbf{T}_{2l}^2) \right|^2, \quad (23) \end{aligned}$$

полученного с использованием рассеянного поля в (5) и (6), а также асимптотических выражений $\xi_l(kr) \approx (-i)^{l+1}e^{ikr}$ и $\xi_l'(kr) \approx (-i)^l e^{ikr}$ для функций Риккати–Ханкеля и их производных при больших kr и учете конечного числа L сферических гармоник каждого типа.

Численные результаты

Метод, описанный выше, был реализован в двух программах на языке MATLAB, одна из которых соответствует линзе с положительным показателем преломления, а другая — линзе с отрицательным показателем преломления. Интегралы в (21) и (22) от слагаемых, не содержащих $\varepsilon(r)$, вычислялись по аналитическим формулам, выведенным для них, а интегралы от слагаемых с $\varepsilon(r)$ вычислялись численными методами. В случае линзы с положительным показателем преломления вычисления производились с выделением и аналитическим интегрированием особенности, указанной после формул (1).

Далее мы предполагаем, что диэлектрическая проницаемость определяется квадратом показателя преломления (1) и $\mu = 1 + i\mu''$ в линзе с положительным показателем преломления, и квадратом (3) со знаком минус и $\mu = 1 + i\mu''$ в линзе с отрицательным показателем преломления, где μ'' — параметр, учитывающий потери. Как и в [9], работа программ контролировалась точностью выполнения оптической теоремы в случае среды без потерь, а также сходимостью результатов при увеличении числа узлов N и числа учитываемых волн L каждого типа.

Расчеты поперечного сечения рассеяния (23) показали, что уровень обратного рассеяния линзы при $\theta = \pi$ для обоих случаев положительного и отрицательного

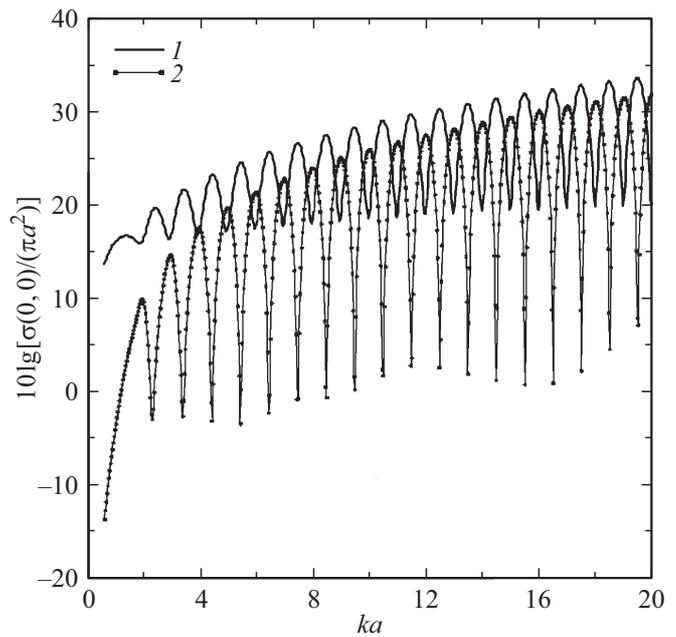


Рис. 5. Поперечное сечение рассеяния вперед для невидимых линз без потерь с отрицательным (1) и положительным (2) показателями преломления.

показателей преломления оказывается очень низким при любом радиусе линзы. Поэтому указанный уровень не подходит в качестве параметра, характеризующего линзу с точки зрения ее невидимости. Более демонстративным параметром является уровень (23) в прямом направлении при $\theta = 0$. Зависимости указанного параметра от ka , нормированные на πa^2 в децибелах, т.е. $10 \lg[\sigma(0, 0)/(\pi a^2)]$, приведены на рис. 5. Приведенные результаты были получены при расстоянии между узлами $\Delta = 0.005\lambda$. Число учитываемых сферических гармоник L определялось как целая часть от величин $2ka + 5$. Погрешность выполнения оптической теоремы не превышает 10^{-13} .

Сравнивая кривые на рис. 5, мы видим, что координаты минимумов сечения рассеяния, соответствующих невидимости линзы, для линзы с отрицательным показателем преломления не совпадают с координатами минимумов для линзы с положительным показателем преломления. Как объясняется в [7], положения минимумов во втором случае определяются дополнительным фазовым сдвигом, равным $\pi/2$, умноженным на 2, возникающим при прохождении лучей через фокальную линию, совпадающую с осью линзы [11]. В отличие от этого случая, лучи в линзе с отрицательным показателем преломления (рис. 3) испытывают фокусировку в точку на оси два раза при наличии астигматизма. При каждом случае такой фокусировки лучи получают дополнительный фазовый сдвиг, равный π [11]. В итоге суммарный фазовый сдвиг оказывается равным 2π , что и объясняет расположение минимумов для этой линзы между минимумами, соответствующими линзе с положительным показателем преломления.

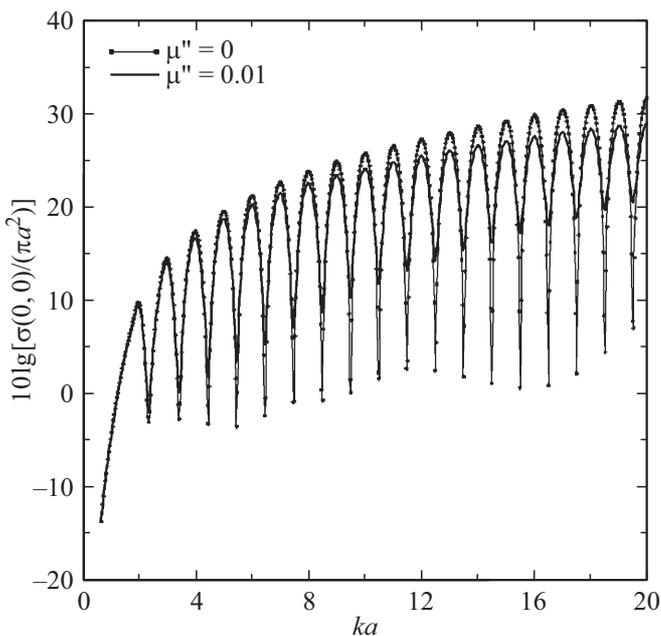


Рис. 6. Поперечное сечение рассеяния вперед для невидимой линзы с положительным показателем преломления без потерь ($\mu'' = 0$) и с потерями ($\mu'' = 0.01$).

Еще одной особенностью результатов, приведенных на рис. 5, является заметно более высокий уровень минимумов для линзы с отрицательным показателем преломления по сравнению с аналогичными уровнями для линзы с положительным показателем преломления. Указанная особенность как раз и объясняется наличием астигматизма при фокусировке лучей в линзе с отрицательным показателем преломления, приводящим к заплыванию нулей в поперечном сечении рассеяния вперед $\sigma(0, 0)$.

Интерес также представляет исследование влияния потерь в линзах на эффект невидимости. Некоторые результаты такого исследования приведены на рис. 6 для линзы с положительным показателем преломления и на рис. 7 для линзы с отрицательным показателем. Результаты соответствуют $\mu'' = 0.01$. Как мы видим, наличие потерь приводит к еще большему заплыванию нулей уровня рассеяния вперед, т.е. к ухудшению невидимости. При этом уровень минимумов повышается при увеличении радиуса линзы, что объясняется более быстрым увеличением мощности поглощения, пропорциональной объему линзы, по сравнению с возрастанием площади перехвата плоской волны линзой.

Заключение

В работе рассмотрены сферически симметричные линзы с отрицательным и положительным показателями преломления. Последние имеют профили, при которых линзы могут быть невидимыми с точки зрения геометрической оптики. Проведен сравнительный численный

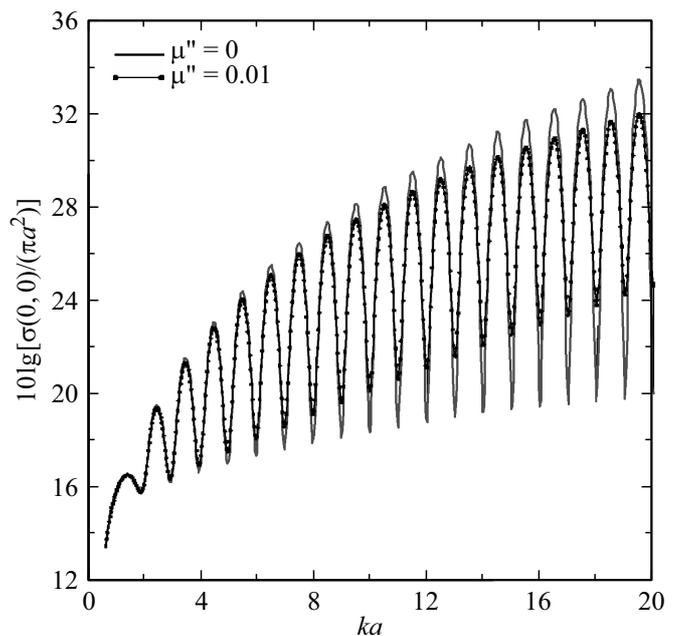


Рис. 7. Поперечное сечение рассеяния вперед для невидимой линзы с отрицательным показателем преломления без потерь ($\mu'' = 0$) и с потерями ($\mu'' = 0.01$).

анализ рассеяния плоской волны на указанных линзах с использованием алгоритма, основанного на гибридном проекционном методе.

Приведены результаты расчетов поперечного сечения рассеяния линз в переднем направлении в зависимости от электрического радиуса. Обнаружено, что в отличие от невидимой линзы с положительным показателем преломления минимумы поперечного сечения рассеяния в переднем направлении, соответствующие невидимости, для линзы с отрицательным показателем преломления имеют место при целых, а не полуцелых значениях электрического радиуса, и что их глубина меньше из-за наличия астигматизма при фокусировке лучей на оси.

Приведены также результаты, характеризующие влияние потерь в линзе на уровень минимумов поперечного сечения рассеяния. Показано, что при фиксированном постоянном значении мнимой части относительной магнитной проницаемости линзы уровень минимумов сечения рассеяния вперед повышается при увеличении радиуса линзы, что связано с возрастанием относительной мощности, поглощаемой в линзе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, грант номер МК-1468.2018.8.

Список литературы

- [1] Веселаго В.Г. // УФН. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517.
- [2] Minano J.C. et al. // Proc. SPIE. 2012. V. 8485. P. 848508. doi 10.1117/12.931505

- [3] *Kwon D.-H., Werner D.H.* // IEEE Antennas & Propagation Magazine. 2010. V. 52. N 1. P. 24.
- [4] *Hendi A., Henn J., Leonhardt U.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 073902.
- [5] *Minano J.C.* // Optics Express. 2006. V. 14. N 21. P. 9627.
- [6] *Скобелев С.П.* // Радиотехника. 2017. № 10. С. 30.
- [7] *Тус Т., Chen H., Danner A., Xu Ya.* // Phys. Rev. A. 2014. V. 90. N 5. P. 053829.
- [8] *Zuzanakova K., Тус Т.* // J. Opt. 2017. V. 19. N 1. P. 015601.
- [9] *Габдуллина А.Р., Смольникова О.Н., Скобелев С.П.* // Радиотехника. 2016. № 10. С. 70.
- [10] *Скобелев С.П.* Фазированные антенные решетки с секторными парциальными диаграммами направленности. М.: Физматлит, 2010. 320 с.; *Skobelev S.P.* Phased array antennas with optimized element patterns. Norwood, USA: Artech House, 2011. 261 p.
- [11] *Visser T.D., Wolf E.* // Opt. Commun. 2010. V. 283. P. 3371.