

Аномальная дисперсия поперечных акустических волн в пьезоэлектрической сандвич-структуре

© В.И. Альшиц, В.Н. Любимов

Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова Российской академии наук,
117333 Москва, Россия

E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

(Поступила в Редакцию 21 октября 2002 г.)

Описана трансформация дисперсионных кривых собственных чисто поперечных (SH) акустических волн в сандвич-структуре из двух пластин под влиянием пьезоэлектрического эффекта. Пластины разделены зазором, много меньшим длины волны, так что взаимосвязь акустических полей между пластинами обусловлена исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Указанное взаимодействие ликвидирует все точки пересечения изначально (в нулевом приближении) независимых дисперсионных кривых, расталкивая и „перепутывая“ их. В результате каждая „новая“ дисперсионная ветвь строится из сопряженных отрезков множества исходных ветвей. При этом с изменением волнового числа (или частоты) основная зона локализации акустического поля с определенной периодичностью плавно переходит от пластины к пластине.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01-02-16228).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, как относительно слабое электромеханическое взаимодействие — пьезоэлектрический эффект — приводит к радикальным изменениям в спектре собственных чисто поперечных (SH) акустических волн в сандвич-структуре и к существенным изменениям в самих волновых полях. Новые качества возникают в результате возмущения, снимающего вырождение, когда исчезают точки пересечения дисперсионных кривых. Подобный механизм, в частности, описан для лэмбовских волн в уединенных анизотропных пластинах [1,2], когда возмущением является отклонение направления распространения волнового поля от симметричной ориентации.

Рассматриваемая далее сандвич-структура образована двумя пьезоэлектрическими пластинами, разделенными зазором, много меньшим, чем длина волны. При этом взаимосвязь акустических полей в пластинах полностью обусловлена пьезоэффектом. Роль зазора сводится к исключению влияния сухого трения между пластинами. В этом смысле можно в равной степени говорить как о зазоре, так и о скользящем контакте пластин: результаты расчетов одновременно описывают оба случая, поскольку относятся к поперечным SH-волнам с полями смещений, параллельными границе.

При отсутствии пьезоэлектрического взаимодействия волновые поля в пластинах независимы друг от друга. Соответственно каждая из множества дисперсионных кривых описывает SH-волны в какой-то одной из пластин рассматриваемой структуры. При этом точкам пересечения кривых двух семейств отвечают невзаимодействующие волновые поля одновременно в двух пластинах. „Включение“ пьезоэффекта порождает взаимопроникновение волновых полей и, следовательно, взаимодействие между SH-волнами, распространяющимися в граничащих друг с другом пластинах. В результате в каждой из точек пересечения дисперсионных кривых двух семейств должно произойти расталкивание, а следовательно, и

„перепутывание“ ветвей. Дисперсионные ветви измененного пьезоэффектом спектра строятся из сопряженных отрезков множества исходных ветвей. Поэтому при сканировании волнового числа вдоль одной из новых дисперсионных кривых волновое поле должно попеременно „погасать“ то в одной пластине, то в другой. Рассмотрим эту картину более детально.

1. Постановка задачи

Исследуемая сандвич-структура образована двумя пластинами, выполненными из поперечно-изотропных пьезоэлектрических материалов (рис. 1). Симметрия материалов может быть любой из трех групп: ∞mm , $6mm$, $4mm$ [3]. В наше рассмотрение войдут следующие компоненты тензоров пьезоэлектрических коэффициентов e , диэлектрических проницаемостей ϵ и упругих модулей c :

$$e_{15} = e_{24} \equiv e, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 \equiv \epsilon, \quad c_{44} = c_{55} \equiv c. \quad (1)$$

Эти параметры характеризуют нижнюю пластину, имеющую толщину d , плотность ρ и занимающую область $0 \leq y \leq d$. Соответствующие параметры в верхней пластине ($-\tilde{d} \leq y \leq 0$) будем обозначать \tilde{e} , $\tilde{\epsilon}$, \tilde{c} , $\tilde{\rho}$. Главные оси симметрии пластин предполагаются параллельными друг другу, а сагиттальная плоскость xu (плоскость, в которой лежат все волновые векторы) выбрана перпендикулярной этим осям.

Будем рассматривать SH-волны с упругими смещениями \mathbf{u} и $\tilde{\mathbf{u}}$, перпендикулярными сагиттальной плоскости. Единственной отличной от нуля компонентой \mathbf{u} является $u_z = u(x, y, t)$. Точно так же $\tilde{\mathbf{u}} = (0, 0, \tilde{u}_z)$, $\tilde{u}_z = \tilde{u}(x, y, t)$. Векторы смещения \mathbf{u} и $\tilde{\mathbf{u}}$ параллельны границе между пластинами и при рассматриваемом типе контакта через зазор (или скользящего контакта) чисто механическая связь между ними отсутствует. Однако пьезоэффект

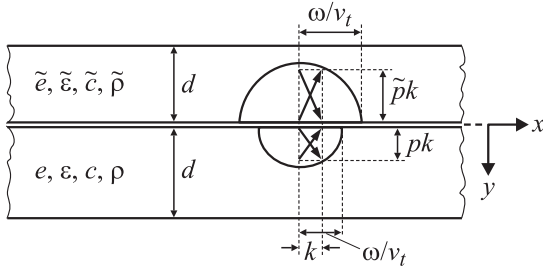


Рис. 1. Исследуемая сандвич-структура и ее акустические параметры. Полуокружности — сечения изочастотных поверхностей объемных поперечных волн, стрелками показаны волновые векторы парциальных волн волноводной моде.

порождает электромеханическую связь, и акустические поля в граничащих пластинах оказываются взаимосвязанными. Волны упругих смещений \mathbf{u} в силу пьезоэффекта индуцируют квазистатические электрические поля, характеризуемые потенциалом $\Phi_u = (e/\epsilon)u(x, y, t)$. Кроме того, в общее волновое поле вносят вклад кулоновские неоднородные волны электрического поля, характеризуемые потенциалом Φ_c (см. [4]). Таким образом, суммарный потенциал $\Phi(x, y, t)$ должен быть равен сумме $\Phi = \Phi_u + \Phi_c$. При этом волновое поле в нижней пластине можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ \Phi(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(y) \\ (e/\epsilon)u(y) + \Phi_c(y) \end{pmatrix} \exp[ik(x-vt)]. \quad (2)$$

Здесь k — волновое число, $v = \omega/k$ — фазовая скорость распространения волнового поля вдоль оси x , ω — частота, t — время. Введенные в (2) функции $u(y)$ и $\Phi_c(y)$ могут быть представлены в виде

$$u(y) = a^+ \exp[ipk(y-d/2)] + a^- \exp[-ipk(y-d/2)], \quad (3)$$

$$\Phi_c(y) = b^+ \exp[-k(y-d/2)] + b^- \exp[k(y-d/2)]. \quad (4)$$

В (3), (4) использован безразмерный параметр p , определяющий направление распространения двух объемных парциальных волн,

$$p \equiv p(v) = \sqrt{v^2/v_t^2 - 1}, \quad v_t^2 = (c + c^2/\epsilon)/\rho \quad (5)$$

(рис. 1). В (5) v_t — скорость SH-волны в материале пластины. Волновое поле в верхней пластине определяется аналогичными соотношениями после замены в них $u, \Phi, \Phi_c, e, \epsilon, a^\pm, b^\pm, p, v_t, c, \rho \rightarrow \tilde{u}, \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_c, \tilde{e}, \tilde{\epsilon}, \tilde{a}^\pm, \tilde{b}^\pm, \tilde{p}, \tilde{v}_t, \tilde{c}, \tilde{\rho}$ соответственно.

Соотношения между амплитудными коэффициентами $a^\pm, b^\pm, \tilde{a}^\pm, \tilde{b}^\pm$ парциальных волн находятся из граничных условий. На внешних границах $y = d, y = -d$ и на внутренней границе $y = 0$ при рассматриваемом типе контакта между пластинами должны обращаться в нуль все нормальные по отношению к границам компоненты

механических напряжений: $\sigma_{yi} = 0$ и $\tilde{\sigma}_{yi} = 0$ (в рассматриваемом случае только компоненты σ_{yz} и $\tilde{\sigma}_{yz}$ не обращаются в нуль тождественно). На внутренней границе должны быть непрерывны электрические потенциалы $[\Phi(x, 0, y) = \tilde{\Phi}(x, 0, y)]$ и нормальные по отношению к этой границе компоненты электрических индукций $[D_y(x, 0, y) = \tilde{D}_y(x, 0, y)]$. Для облегчения вычислений будем считать, что внешние границы пластин металлизированы (при этом электрические поля не выходят за пределы рассматриваемой сандвич-структуры). Поэтому на этих границах будет необходимо обращение в нуль потенциалов Φ и $\tilde{\Phi}$. В результате получается система из восьми однородных алгебраических уравнений, в которой неизвестные — амплитудные коэффициенты $a^\pm, b^\pm, \tilde{a}^\pm, \tilde{b}^\pm$. Избегая громоздких выкладок, не будем приводить явный вид этих уравнений. Условие разрешимости этой системы — обращение в нуль ее детерминанта — определяет бесконечный спектр зависимостей фазовой скорости v от волнового числа: $v = v^{(n)}(k)$ ($n = 1, 2, \dots$). В основе дальнейшего анализа лежит исследование этого спектра.

2. Дисперсионные кривые при отсутствии пьезоэффекта

В этом случае акустическая связь между пластинами отсутствует, и волновые поля соседних пластин не влияют друг на друга. При выбранной нами ориентации сагиттальной плоскости описание этих полей в каждой отдельной пластине будет точно таким же, как и в пластинах из изотропного материала (см. [5,6]). Далее основной интерес для нас будут представлять структура картины, возникающей при наложении дисперсионных кривых двух пластин друг на друга, и точки пересечения дисперсионных ветвей.

В каждой из пластин собственные волны подразделяются на симметричные и антисимметричные. Для симметричных волн отражение в центральной плоскости пластины не меняет векторного волнового поля упругих смещений, а для антисимметричных это поле при таком отражении меняет знак на противоположный. Дисперсионное уравнение, одновременно описывающее оба типа этих волн в нижней пластине, имеет вид

$$\sin(pk d) = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$p(v^{(n)}) = \pi n/kd, \quad (7)$$

где $n = 0, 2, 4, \dots$ для симметричных волн (в них $a^+ = a^-$) и $n = 1, 3, 5, \dots$ для антисимметричных волн (в них $a^+ = -a^-$). Аналогичные соотношения имеем и для верхней пластины, для которой

$$\tilde{p}(v^{(\tilde{n})}) = \pi \tilde{n}/k\tilde{d}. \quad (8)$$

Дискретные параметры n и \tilde{n} здесь и далее определяют номера дисперсионных ветвей соответственно в нижней и верхней пластинах.

Разрешая уравнения (7) и (8) относительно фазовых скоростей (см. (5)), нетрудно получить явные выражения, описывающие все невозмущенные дисперсионные ветви для нижней и верхней пластин,

$$\begin{aligned} v^{(n)}(k) &= v_t \sqrt{(\pi n/kd)^2 + 1}, \\ v^{(\tilde{n})}(k) &= \tilde{v}_t \sqrt{(\pi \tilde{n}/k\tilde{d})^2 + 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Каждая из зависимостей в (9) описывает серию кривых, которые не пересекаются друг с другом (рис. 2). Однако для двух пластин, отличающихся численными значениями материальных характеристик ($v_t \neq \tilde{v}_t$, $d \neq \tilde{d}$), эти семейства кривых при наложении друг на друга имеют множественные пересечения (рис. 3, *a*). Из формул (9) находим координаты всего множества точек пересечения ветвей, определяемых номерами n и \tilde{n} ,

$$\begin{aligned} k^{n\tilde{n}} &= \pi \sqrt{\frac{(m v_t/d)^2 - (\tilde{n} \tilde{v}_t/\tilde{d})^2}{\tilde{v}_t^2 - v_t^2}}, \\ v^{n\tilde{n}} &= v_t \tilde{v}_t \sqrt{\frac{(n/d)^2 - (\tilde{n}/\tilde{d})^2}{(m v_t/d)^2 - (\tilde{n} \tilde{v}_t/\tilde{d})^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Требование вещественности найденных координат определяет все множество значений номеров n и \tilde{n} пересекающихся ветвей.

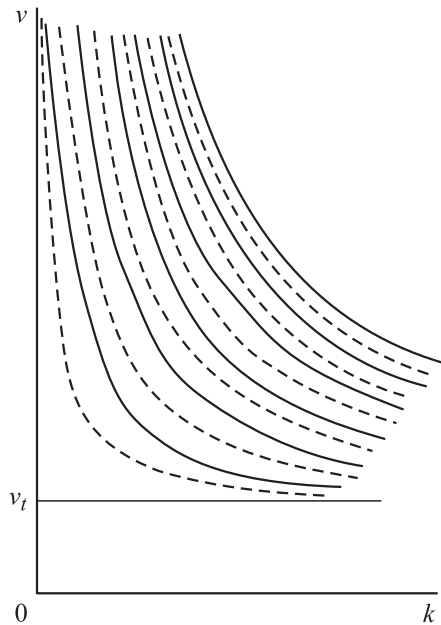


Рис. 2. Дисперсионные кривые собственных волн в нижней пластине при отсутствии пьезоэффекта. Сплошные кривые соответствуют симметричным волновым полям, а штриховые — антисимметричным.

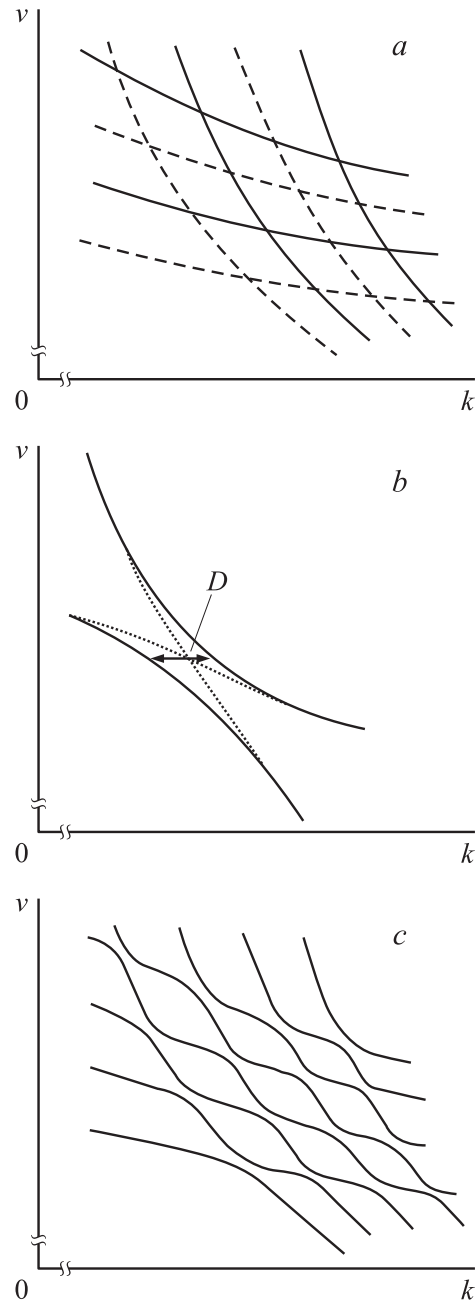


Рис. 3. Схема трансформации дисперсионных кривых под влиянием пьезоэффекта. *a* — фрагмент области пересечения дисперсионных кривых собственных волн в невзаимодействующих пластинах; *b* — трансформация в окрестности любой из точек пересечения, пунктиром показан ход кривых при отсутствии пьезоэффекта; *c* — трансформированная система дисперсионных кривых, показанных на части *a*.

Зная фазовые скорости волн, можно определить их групповые скорости, используя общее соотношение между этими двумя видами скоростей $v_g = v + k \partial v / \partial k$. При этом из формул (9) получаем

$$v_g^{(n)}(k) = v_t^2 / v^{(n)}(k), \quad \tilde{v}_g^{(\tilde{n})}(k) = \tilde{v}_t^2 / v^{(\tilde{n})}(k). \quad (11)$$

Для координат точек пересечения ветвей групповых скоростей теперь имеем

$$k_g^{m\tilde{n}} = \pi v_t \tilde{v}_t \sqrt{\frac{(n/v_t d)^2 - (\tilde{n}/\tilde{v}_t \tilde{d})^2}{v_t^2 - \tilde{v}_t^2}},$$

$$v_g^{m\tilde{n}} = v_t \tilde{v}_t \sqrt{\frac{(n/v_t d)^2 - (\tilde{n}/\tilde{v}_t \tilde{d})^2}{(n/d)^2 - (\tilde{n}/\tilde{d})^2}}. \quad (12)$$

Как следует из соотношений (10) и (12), при $v_t = \tilde{v}_t$ рассматриваемые пересечения ветвей в семействах как фазовых, так и групповых скоростей отсутствуют.

3. Трансформация спектра под влиянием пьезоэффекта

Пьезоэффект, обеспечивая взаимосвязь акустических полей в граничащих друг с другом пластинах, приводит к устранению свойств симметрии волновых полей, поскольку материальные характеристики пластин различны. Но самое существенное — это радикальная перестройка всей системы дисперсионных кривых. Опишем ее для семейства ветвей фазовых скоростей. Все точки пересечения дисперсионных кривых исчезают, кривые расталкиваются (рис. 3, *a-c*). Опуская достаточно громоздкие алгебраические выкладки и считая пьезоэффект малым возмущением, приведем величину, характеризующую расталкивание дисперсионных ветвей фазовых скоростей, имеющих номера n и \tilde{n} ,

$$D^{m\tilde{n}} = 2|\Delta k| = \frac{(k/\pi)^2}{|F_1|}$$

$$\times \sqrt{(\kappa^2 G d/n^2 + \tilde{\kappa}^2 \tilde{G} \tilde{d}/\tilde{n}^2)^2 - 8(\kappa^2 F_1 d/n^2)(\tilde{\kappa}^2 F_2 \tilde{d}/\tilde{n}^2)}. \quad (13)$$

Здесь $\kappa^2 = e^2/\epsilon c$ и $\tilde{\kappa}^2 = \tilde{e}^2/\tilde{\epsilon} \tilde{c}$ — коэффициенты электромеханической связи для нижней и верхней пластин соответственно. В (13) введены следующие функции:

$$F_1 = \epsilon g_c \tilde{g}_s + \tilde{\epsilon} g_s \tilde{g}_c, \quad F_2 = \epsilon g_s (\tilde{g}_c - 1) + \tilde{\epsilon} \tilde{g}_s (g_c - 1), \quad (14)$$

$$G = \epsilon g_s \tilde{g}_s + 2\tilde{\epsilon} \tilde{g}_c (g_c - 1), \quad \tilde{G} = \tilde{\epsilon} g_s \tilde{g}_s + 2\epsilon g_c (\tilde{g}_c - 1), \quad (15)$$

$$g_s = (-1)^n \operatorname{sh}(kd), \quad \tilde{g}_s = (-1)^{\tilde{n}} \operatorname{sh}(k\tilde{d}),$$

$$g_c = (-1)^n \operatorname{ch}(kd), \quad \tilde{g}_c = (-1)^{\tilde{n}} \operatorname{ch}(k\tilde{d}). \quad (16)$$

В формулах (13) и (16) величина k — координата точек пересечения ветвей, заданная соотношениями (10).

Если обе пластины имеют одинаковые материальные характеристики, то при отсутствии пьезоэффекта дисперсионные кривые этих пластин полностью совпадают — сливаются друг с другом. При включении пьезоэффекта, одинакового в обеих пластинах, происходит расщепление ветвей. Расстояние между расщепленными ветвями, для которых $n = \tilde{n}$, определяется также выражением (13), причем величину k следует считать непрерывным параметром (аргументом). Наконец, если

одна из пластин непьезоэлектрическая, пьезоэффект, существующий лишь в одной из пластин, не устраняя точки пересечения ветвей, только сдвигает их; формула (13) характеризует меру такого сдвига.

Анализ расщепления ветвей групповых скоростей показывает, что оно также реализуется, но оказывается величиной более высокого порядка малости $\sim \kappa^2 \tilde{\kappa}^2$ по сравнению с расщеплением ветвей фазовых скоростей. Мы не будем здесь приводить соответствующие громоздкие формулы.

Проведенный приближенный анализ предполагает определенную малость коэффициентов электромеханической связи, а такое предположение обычно хорошо оправдывается на практике. Однако, несмотря на слабость пьезоэффекта, его влияние на геометрию дисперсионных кривых оказалось весьма радикальным. Электромеханическое взаимодействие приводит к исчезновению точек пересечения дисперсионных кривых: они расталкиваются на величину, пропорциональную коэффициентам электромеханической связи $\kappa^2 \sim \tilde{\kappa}^2$ (см. (13)). При этом происходит перепутывание изначально независимых ветвей, каждая ветвь измененной пьезоэффектом системы дисперсионных кривых строится из сопряженных отрезков множества исходных ветвей, отвечающих волновым полям как в одной, так и в другой пластинах. В результате зависимость основных зон локализации волнового поля от волнового числа (или частоты) принципиально меняется. При плавном изменении волнового числа зоны локализации волнового поля с определенной периодичностью должны переходить от одной пластины к другой, оказываясь соразмерными в обеих пластинах вблизи точек „разрыва“. Вблизи таких точек перехода резко меняется производная $\partial v/\partial k$, т.е. небольшое изменение волнового числа влечет за собой значительное изменение групповой скорости распространения волнового поля. Естественно, ветви групповых скоростей при включении взаимодействия тоже расщепляются, но величина этого расщепления значительно меньше, чем для фазовых скоростей: она пропорциональна $\kappa^2 \tilde{\kappa}^2$.

Заметим, что выявленная картина дисперсионных аномалий качественно не изменится в электрически „открытых“ сэндвич-структурах, внешние поверхности которых не металлизированы.

Список литературы

- [1] В.Н. Любимов, В.И. Альшиц. Кристаллография **33**, 2, 279 (1988).
- [2] V.I. Alshits, M. Deschamps, G.A. Maugin. Wave Motion **37**, in press (2003).
- [3] Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. Основы кристаллофизики. Наука, М. (1975). 680 с.
- [4] М.К. Балакирев, И.А. Гилинский. Волны в пьезокристаллах. Наука, Новосибирск (1982). 240 с.
- [5] И.А. Викторов. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. Наука, М. (1966). 168 с.
- [6] И.А. Викторов. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Наука, М. (1981). 288 с.