

Природа упругопластического инварианта деформации

© Л.Б. Зуев, В.И. Данилов, С.А. Баранникова, Н.А. Плосков

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
634055 Томск, Россия
e-mail: lbz@ispms.tsc.ru

(Поступило в Редакцию 3 ноября 2017 г.)

Рассмотрен автоволновой механизм развития локализованной пластической деформации кристаллических твердых тел разной природы. Установлено, что явление локализации пластического течения определяется связью упругих и пластических явлений в деформируемых материалах. Показано, что основной характеристикой деформационных процессов является упругопластический инвариант деформации — безразмерная величина, количественно связывающая параметры упругих волн и автоволн локализованной пластической деформации. Справедливость этого положения проверена в экспериментах, проведенных на металлах, щелочно-галогидных кристаллах и горных породах. Физическая природа инварианта объясняется на основании термодинамических соображений.

DOI: 10.21883/JTF.2018.06.46016.2542

Введение

Пластическая деформация твердых тел представляет собой сложное физическое явление, за развитие которого ответственны кристаллическая решетка и дефекты кристаллического строения. Процесс пластического течения обычно описывается зависимостью деформирующего напряжения от деформации $\sigma(\epsilon)$. Существенно, что этот процесс на всех стадиях от начала пластического течения (предел текучести) до разрушения (предел прочности) сопровождается локализацией пластической деформации [1].

Предложенная в [1] модель развития локализованной пластической деформации предполагает, что в процессе пластического течения происходит самоорганизация дефектной структуры [2], которая реализуется в форме автоволн локализованного пластического течения [1,3], возникающих в деформируемой среде вследствие взаимодействия упругих волн и релаксационных актов распада концентраторов упругих напряжений. Каждый акт релаксации дает вклад в общую пластическую деформацию и порождает новые концентраторы напряжений. Роль упругих волн в деформируемой среде сводится к инициированию актов релаксации концентраторов. При этом автоволновая картина распределения локализованной пластичности закономерно изменяется в соответствии со стадийностью кривой $\sigma(\epsilon)$, так что деформационный процесс может рассматриваться как закономерная эволюция автоволн локализованной пластичности [1].

Таким образом, в пластически деформируемой среде сосуществуют автоволновые (локализованная пластичность) и волновые (упругость) деформационные явления. Первые характеризуются длиной автоволны локализованной пластичности λ и скоростью ее распространения V_{aw} , а вторые — межплоскостным расстоянием в кристаллической решетке исследуемого материала χ и скоростью распространения поперечных упругих волн в нем V_t .

В проведенных ранее на ряде металлов экспериментах [1,4,5] было обращено внимание на то, что образованное из этих четырех характеристик безразмерное отношение $\lambda V_{aw}/\chi V_t$ одинаково для всех случаев деформации разных металлов на стадиях линейного деформационного упрочнения, когда $\sigma \sim \epsilon$. Это позволило предположить общий характер постоянства отношения $\lambda V_{aw}/\chi V_t$. Цель настоящей работы состоит в проверке выполнения этой закономерности не только в металлах, но и в других материалах, упрочняющихся по линейному закону. Важно также выяснение природы этого соотношения на базе общих термодинамических представлений.

Экспериментальные данные

Экспериментальная оценка количественных данных о картинах локализованной пластичности производилась для линейных стадий процесса, для которых характерна линейная связь деформирующих напряжений и деформаций. В этих случаях наблюдается фазовая автоволна локализованной пластичности, отвечающая условию постоянства фазы $2\pi(t/T - x/\lambda) = \text{const}$, где T — период колебаний в автоволне, x — координата, t — текущее время. Возникающая в этих случаях картина локализованной пластичности устойчива и сравнительно легко наблюдается [1].

Для оценки значений отношения $\lambda V_{aw}/\chi V_t$, характеризующего различные материалы, прежде всего был расширен перечень исследованных металлов. Кроме того, была изучена локализация пластической деформации в щелочно-галогидных кристаллах (KCl, NaCl, LiF) и горных породах: песчанике (SiO_2) и мраморе (CaCO_2). Методика наблюдения паттернов локализованного пластического течения в деформируемых материалах, основанная на спекл-фотографии, описана ранее достаточно подробно [1] и здесь обсуждаться не будет. В качестве

Таблица 1. Сравнение величин $\chi \cdot V_t$ и $\lambda \cdot V_{aw}$ для металлов

$\times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$	Стадия линейного деформационного упрочнения											
	Cu	Zn	Al	Zr	Ti	V	Nb	α -Fe	γ -Fe	Ni	Co	Mo
λV_{aw}	3.6	3.7	7.9	3.7	2.5	2.8	1.8	2.55	2.2	2.1	3.0	1.2
χV_t	4.8	11.9	7.5	11.9	7.9	6.2	5.3	4.7	6.5	6.0	6.0	7.4
$\lambda V_{aw} / \chi V_t$	0.75	0.3	1.1	0.3	0.3	0.45	0.33	0.54	0.34	0.35	0.5	0.2

$\times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$	Стадия линейного деформационного упрочнения							Стадия легкого скольжения					
	Sn	Mg	Cd	In	Pb	Ta	Hf	α -Fe	γ -Fe	Cu	Zn	Ni	Sn
$\lambda \cdot V_{aw}$	2.4	9.9	0.9	2.6	3.2	1.1	1.0	7.4	2.9	1.9	1.0	1.3	3.3
$\chi \cdot V_t$	5.3	15.8	3.5	2.2	2.0	4.7	4.2	6.5	6.0	4.7	5.0	6.0	4.9
$\lambda V_{aw} / \chi V_t$	0.65	0.63	0.2	1.2	1.6	0.2	0.24	1.1	0.49	0.4	0.2	0.2	0.67

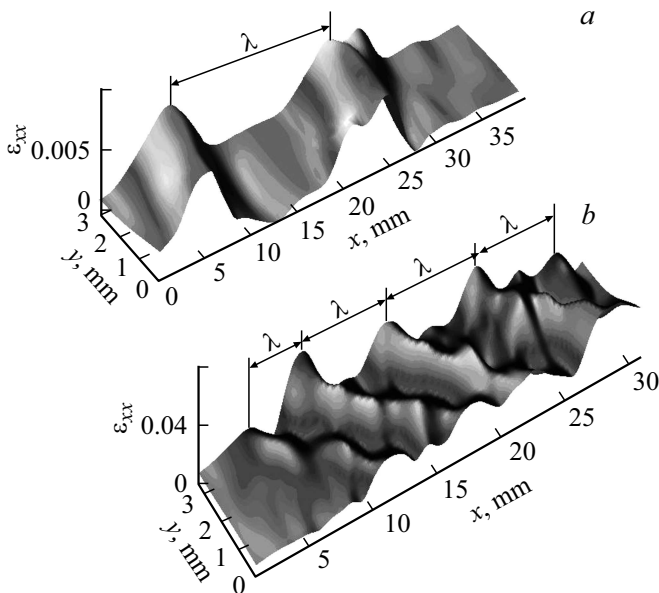


Рис. 1. Распределение деформаций по образцу из сплава Fe–12 wt.% Mn на стадии легкого скольжения (a) и стадии линейного деформационного упрочнения (b).

примера возможностей этой методики на рис. 1 представлена типичная картина распределения локализованной пластичности для последовательных стадий легкого скольжения и линейного деформационного упрочнения при растяжении с постоянной скоростью монокристаллического образца сплава Fe–12 wt.% Mn (γ –Fe).

Необходимые для анализа данных о развитии локализованной пластичности количественные характеристики автоволн λ и V_{aw} определялись при обработке так называемых X – t -диаграмм, предложенных для этих целей в [1] и показанных на рис. 2. Из рисунка ясно, что необходимые для анализа значения длины автоволны λ и периода T определяются из вертикаль-

ных и горизонтальных сечений семейств графиков $X(t)$. Характеристики автоволн локализованной пластической деформации λ и $V_{aw} = \lambda/T$ были определены для случаев линейного деформационного упрочнения металлов, легкого скольжения в монокристаллах металлов, сжатия щелочно-галоидных монокристаллов, сжатия образцов горных пород и при деформации фазового превращения монокристалла NiTi.

Проанализируем полученные при этом данные. Для восемнадцати исследованных металлов величины произведений $\lambda \cdot V_{aw}$ приведены в табл. 1. Можно видеть, что они отличаются друг от друга незначительно, а среднее значение произведений этих величин $\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{lwh} = (2.52 \pm 0.36) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Эти данные удалось дополнить результатами аналогичной обработки паттернов локализованной пластичности, наблюдавшихся на стадиях легкого скольжения в монокристаллах Cu, Ni, α -Fe, γ -Fe, Zn и Sn, для которых также выполняется пропорциональность $\sigma \sim \epsilon$

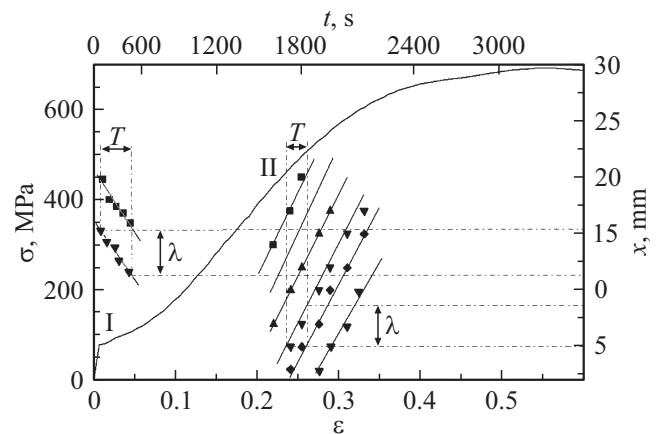


Рис. 2. X – t диаграмма для монокристалла стали Гатфильда, построенная для случая, показанного на рис. 1.

Таблица 2. Сравнение величин $\chi \cdot V_t$ и $\lambda \cdot V_{aw}$ для щелочно-галлоидных кристаллов [6] и горных пород [7]

$\times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$	KCl	NaCl	LiF	Мрамор	Песчаник
$\lambda \cdot V_{aw}$	3.0	3.1	4.3	1.75	0.6
$\chi \cdot V_t$	7.0	7.5	8.8	3.7	1.5
$\lambda V_{aw}/\chi V_t$	0.43	0.4	0.5	0.5	0.4

Таблица 3. Сравнение величин $\chi \cdot V_t$ и $l \cdot V_{disl}$, определенных при измерении пробегов индивидуальных дислокаций

$\times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$	NaCl [8]	LiF [9]	CsI [10]	KCl [11]	Zn [12]
$l \cdot V_{disl}$	4.1	4.1	1.9	4.1	1.8
$\chi \cdot V_t$	7.3	8.6	4.0	6.8	4.0
$l V_{disl}/\chi V_t$	0.56	0.47	0.47	0.6	0.45

и наблюдается фазовая автоволна. Для этой стадии $\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{eg} \sim (2.95 \pm 1.05) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ (табл. 1).

Стадии линейного деформационного упрочнения и соответствующие ей фазовые автоволны локализованной пластичности наблюдались при сжатии образцов из щелочно-галлоидных кристаллов и горных пород [6,7]. Данные о результатах этих экспериментов, представленные в табл. 2, приводят к $\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{ahc} = (3.44 \pm 0.49) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, а $\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{rock} = (1.44 \pm 0.34) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

При деформации за счет скольжения индивидуальных дислокаций процесс обычно характеризуется длиной пробега дислокаций l и скоростью их движения V_{disl} , которые были найдены при анализе литературных данных о подвижности индивидуальных дислокаций в монокристаллах [8–12] в режиме квазивязкого движения, когда $V_{disl} \sim \sigma$ [13]. В таких условиях характерные длины дислокационных пробегов составляют $10^{-5} \leq l \leq 10^{-4} \text{ m}$, а скорости движения дислокаций $10^{-3} \leq V_{disl} \leq 10^{-2} \text{ m/s}$. Оценка произведения этих величин производилась с использованием соотношения $l \cdot V_{disl} = V_{disl}^2 \cdot \tau$, где τ — длительность импульса нагрузки, действующего при нагружении кристаллов. Результаты вычислений произведений $l \cdot V_{disl}$ для этих случаев представлены в табл. 3. Как видно, для этого случая $\langle l \cdot V \rangle_{disl} = (3.2 \pm 0.35) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Экспериментальная оценка параметров автоволны локализованной пластичности для случая пластической деформации монокристалла интерметаллида TiNi эквиаомного состава (деформация фазового превращения [14]) привела к величине $\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{pt} \approx 0.85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

Сравнивая перечисленные данные друг с другом попарно путем вычисления t -критерия Стьюдента [15], можно прийти к выводу о том, что полученные зна-

чения различаются незначимо, т.е. принадлежат одной генеральной совокупности. На этом основании

$$\begin{aligned} \langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{lwh} &\approx \langle l \cdot V \rangle_{disl} \\ &\approx \langle \cdot V_{aw} \rangle_{pt} \approx \langle \cdot V_{aw} \rangle_{ahc} \approx \langle \cdot V_{aw} \rangle_{rock}. \end{aligned} \quad (1)$$

Упругие процессы в исследованных материалах характеризовались межплоскостными расстояниями в кристаллической решетке χ [16] и скоростями распространения поперечных упругих волн V_t [17]. Как следует из табл. 1–3, $\langle \chi V_t \rangle_{el} \approx (5.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ для всех изученных материалов.

Нормировка выражения (1) на соответствующие произведения χV_t приводит к безразмерным отношениям

$$\begin{aligned} \frac{\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{lwh}}{\langle \chi \cdot V_t \rangle_{el}} &= \hat{Z}_{lwh}, & \frac{\langle l \cdot V \rangle_{disl}}{\langle \chi \cdot V_t \rangle_{el}} &= \hat{Z}_{disl}, \\ \frac{\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{eg}}{\langle \chi \cdot V_t \rangle_{el}} &= \hat{Z}_{eg}, & \frac{\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{pt}}{\langle \chi \cdot V_t \rangle_{el}} &= \hat{Z}_{pt}, \\ \frac{\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{ahc}}{\langle \chi \cdot V_t \rangle_{el}} &= \hat{Z}_{ahc}, & \text{и} & \frac{\langle \lambda \cdot V_{aw} \rangle_{rock}}{\langle \chi \cdot V_t \rangle_{el}} = \hat{Z}_{rock}. \end{aligned}$$

Численные оценки величин \hat{Z} показывают, что

$$\hat{Z}_{lwh} \approx \hat{Z}_{disl} \approx \hat{Z}_{eg} \approx \hat{Z}_{pt} \approx \hat{Z}_{ahc} \approx \hat{Z}_{rock} \approx 1/2, \quad (2)$$

откуда следует

$$\left\langle \frac{\lambda \cdot V_{aw}}{\chi \cdot V_t} \right\rangle = \hat{Z} \approx \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Соотношение (3), названное упругопластическим инвариантом деформации, выполняется для всех случаев пластической деформации, рассмотренных выше. Оно может рассматриваться как универсальная характеристика процессов пластической деформации. Графическое представление обсуждаемых данных показано на рис. 3.

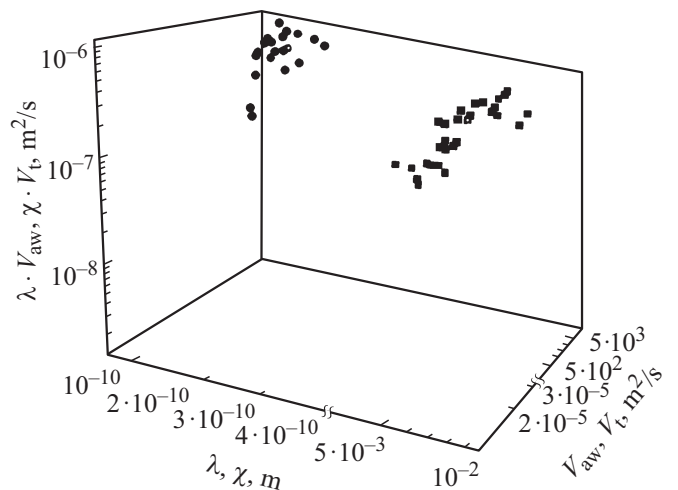


Рис. 3. Сравнение произведений (■) и (●), входящих в выражение для упругопластического инварианта.

О природе упругопластического инварианта

Рассмотрим некоторые соображения о природе инварианта (3), который играет важную роль в развитии локализованной пластичности, связывая характеристики упругой (χ и V_t) и пластической (λ и V_{aw}) деформации. Как было показано ранее [1], локализация пластической деформации является следствием самоорганизации нелинейной активной деформируемой среды, содержащей структурные дефекты [2]. Общим признаком процессов самоорганизации в открытой термодинамической системе, какой является деформируемая среда, служит уменьшение ее энтропии в таком процессе [18]. Это условие действительно выполняется при генерации автоволн локализованного пластического течения [19]. По этой причине использование энтропийного фактора для выяснения физической природы процессов локализации пластической деформации является вполне обоснованным.

При развитии локализованной пластичности конкурируют процессы рождения и релаксации концентраторов упругих напряжений с генерацией дислокаций [1,4,5]. При этом пространственно-временные распределения полей напряжений $\sigma(x, y, t)$ и пластических деформаций $\varepsilon(x, y, t)$ трансформируются взаимнообусловленным образом, причем в соответствии с упругопластическим инвариантом скорости V_t и V_{aw} контролируют кинетику трансформационных процессов соответствующих полей, а длины χ и λ задают пространственные масштабы процессов перераспределения.

По этой причине уравнение инварианта (3) удобно представить в виде

$$\frac{\lambda/\chi}{V_t/V_{aw}} = \frac{p_{scale}}{p_{kin}} = \hat{Z}, \quad (4)$$

где отношениям $\lambda/\chi = p_{scale} > 1$ и $V_t/V_{aw} = p_{kin} > 1$ придается смысл масштабной и кинетической термодинамических вероятностей соответственно [18]. Масштабная термодинамическая вероятность p_{scale} интерпретируется как число возможных мест зарождения автоволны локализованного пластического течения в деформируемой среде, т.е. она определяет существенное различие пространственных масштабов упругого и пластического деформационных процессов. Что же касается кинетической термодинамической вероятности p_{kin} , то ею определяется выбор деформируемой системой скорости автоволны из интервала ее возможных значений $0 \leq V_{aw} \leq V_t$.

С учетом сказанного из уравнения (4) следует соотношение

$$\ln \hat{Z} = \ln p_{scale} - \ln p_{kin}, \quad (5)$$

которое с помощью формулы Больцмана можно преобразовать в уравнения для изменений энтропии, связанной с различием масштабов

$$\Delta S_{scale} = k_B \ln \frac{\lambda}{\chi} = k_B \ln p_{scale} \quad (6)$$

и различием скоростей

$$\Delta S_{kin} = k_B \ln \frac{V_t}{V_{aw}} = k_B \ln p_{kin}. \quad (7)$$

Окончательно из уравнений (5)–(7) получаем

$$\begin{aligned} \Delta S &= k_B \ln p_{kin} + k_B \ln p_{scale} \\ &= -\Delta S_{kin} + \Delta S_{scale} = k_B \ln \frac{1}{2} < 0, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда следует, что в процессе генерации фазовой автоволны энтропия деформируемой системы уменьшается на $-\Delta S = \Delta S_{scale} - \Delta S_{kin}$. Знаки слагаемых $\Delta S_{scale} > 0$ и $\Delta S_{kin} < 0$ в уравнении (8) подчеркивают антагонизм вкладов масштабного и кинетического факторов в природу локализованной пластической деформации. Вклад от различия масштабов $\lambda/\chi = p_{scale}$ диссипативен, поскольку он равносильен наличию структуры среды, а этот фактор является причиной возникновения дисперсии и вообще диссипативных процессов [20]. Напротив, вклад от различия скоростей $V_t/V_{aw} = p_{kin}$, уменьшающий общую энтропию системы, видимо, способствует самоорганизации среды.

Величина $\Delta S < 0$ характеризует общее уменьшение энтропии при формировании фазовой автоволны локализации пластического течения, т.е. соответствует самоорганизации деформируемой среды. Так как

$$\hat{Z} = \exp(\Delta S/k_B) \approx \frac{1}{2}, \quad (9)$$

то $\Delta S = k_B \ln 1/2 \approx -0.7k_B$ на элементарный релаксационный акт [21].

Рассмотрим связь упругих и пластических смещений при малом отклонении деформируемой системы от равновесного состояния. Вблизи энергетического минимума, соответствующего равновесию, скорости смещений при пространственно-временных трансформациях полей деформаций и напряжений в деформируемой системе с точностью до малых первого порядка линейны по градиентам пластических и упругих деформаций [22], т.е.

$$\dot{u}_{pl}^{(p)} \approx D_{\varepsilon\varepsilon} \nabla \varepsilon_{pl}, \quad (10)$$

$$\dot{u}_{el}^{(p)} \approx D_{\sigma\sigma} \nabla \varepsilon_{el} \quad (11)$$

соответственно. В этой записи принято, что $\lambda V_{aw} \equiv D_{\varepsilon\varepsilon}$ и $\chi V_t \equiv D_{\sigma\sigma}$.

Вследствие нелинейного характера связи деформации и напряжения, задаваемой кривой течения $\sigma(\varepsilon)$, следует учесть также возникновение дополнительных к (10) и (11) скоростей

$$\dot{u}_{el}^{(ad)} \approx D_{\varepsilon\sigma} \nabla \varepsilon_{pl},$$

$$\dot{u}_{pl}^{(ad)} \approx D_{\sigma\varepsilon} \nabla \varepsilon_{el}.$$

Возникает система уравнений, которая может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{pl} = D_{\epsilon\epsilon} \nabla \epsilon + D_{\epsilon\sigma} \nabla \epsilon_{cl}, \\ \dot{\epsilon}_{cl} = D_{\sigma\epsilon} \nabla \epsilon_{cl} + D_{\sigma\sigma} \nabla \epsilon. \end{cases}$$

Коэффициенты уравнений этой системы образуют матрицу $\begin{pmatrix} D_{\epsilon\epsilon} & D_{\epsilon\sigma} \\ D_{\sigma\epsilon} & D_{\sigma\sigma} \end{pmatrix}$ [22], недиагональные компоненты которой, согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [22,23], равны, т.е. $D_{\epsilon\sigma} = D_{\sigma\epsilon}$ и соответственно $\lambda V_{aw} \approx \chi V_t$. Что касается диагональных коэффициентов $D_{\epsilon\epsilon}$ и $D_{\sigma\sigma}$, которые являются коэффициентами автоволновых уравнений локализованного пластического течения [1,4,5], то они не обязаны быть равными: в [1], например, было показано, что $D_{\epsilon\epsilon} \ll D_{\sigma\sigma}$.

Выводы

1. Показано, что соотношение

$$\left\langle \frac{\lambda \cdot V_{aw}}{\chi \cdot V_t} \right\rangle = \dot{\epsilon} \approx \frac{1}{2}$$

выполняется для всех исследованных случаев пластической деформации с линейным законом упрочнения и может рассматриваться как упругопластический инвариант.

2. Анализ природы инварианта указывает на справедливость предположения о самоорганизации деформируемой среды в процессе деформации.

3. Инвариант формализует связь между упругими и пластическими компонентами деформации материалов и представляется важным для решения проблем теоретической и прикладной пластичности.

4. Упругопластический инвариант указывает на необходимость учета роли, которую играют упругие (решеточные) характеристики материалов в разработке моделей и механизмов развития пластического течения.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 г., а также частично поддержана Проектом Президиума РАН № П.2П/III.23-2.

Список литературы

- [1] Зуев Л.Б., Данилов В.И., Баранникова С.А. Физика макролокализации пластического течения. Новосибирск: Наука, 2008. 327 с.
- [2] Seeger A., Frank W. // Non-linear Phenomena in Material Science. Eds. L.P. Kubin, G. Martin. N.Y.: Trans. Tech. Publ. 1987. P. 125–138.
- [3] Davydov V.A., Davydov N.V., Morozov V.G., Stolyarov M.N., Yamaguchi T. // Cond. Mat. Phys. 2004. Vol. 7. N 3. P. 565–577.
- [4] Zuev L.B., Barannikova S.A. // Sol. Stat. Phenom. 2011. Vol. 172–174. P. 1279–1283.
- [5] Zuev L.B. // Phys. Wave Phenom. 2012. Vol. 20. N 3. P. 166–173.
- [6] Баранникова С.А., Надежкин М.В., Зуев Л.Б. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 16. С. 15–21.
- [7] Zuev L.B., Barannikova S.A., Nadezhkin M.V., Gorbatenko V.V. // J. Mining World Express. 2013. Vol. 2. N 1. P. 31–39.
- [8] Курилов В.Ф., Зуев Л.Б., Громов В.Е., Сергеев В.П., Герштейн Г.И. Кристаллография. 1977. Т. 22. Вып. 3. С. 653–654.
- [9] Даринская Е.В., Урусовская А.А., Опекунов В.Н., Абрамчук Г.А., Алехин В.Ф. // ФТТ. 1978. Т. 20. Вып. 4. С. 1250–1252.
- [10] Даринская Е.В., Урусовская А.А. // ФТТ. 1975. Т. 17. Вып. 8. С. 2421–2422.
- [11] Зуев Л.Б., Громов В.Е., Алексанкина О.И. Кристаллография. 1974. Т. 19. Вып. 4. С. 889–891.
- [12] Зуев Л.Б., Громов В.Е., Курилов В.Ф., Гуревич Л.И. // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. Вып. 1. С. 84–86.
- [13] Al'shits V.I., Indenbom V.L. // Dislocations in Solids. Ed. F.R.N. Nabarro. Amsterdam: Elsevier, 1986. P. 43–111.
- [14] Otsuka K., Shimizu K. // Int. Met. Rev. 1986. Vol. 31. N 3. P. 93–114.
- [15] Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1967. 242 с.
- [16] Миркин Л.И. Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов. М.: ГИФМЛ, 1961. 863 с.
- [17] Андерсон О. // Динамика решетки / Под ред. И.Л. Фабелинского. М.: Мир, 1968. С. 62–121.
- [18] Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002. 284 с.
- [19] Зуев Л.Б. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 35. Вып. 3. С. 1–4.
- [20] Скотт Э. Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007. 559 с.
- [21] Слуцкер А.И. // ФТТ. 2005. Т. 47. Вып. 5. С. 777–787.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика М.: Наука, 1964. 567 с.
- [23] Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. 608 с.