

05

## Аналитический подход к определению влияния теплового шума на среднюю частоту и амплитуду спинового генератора

© А.В. Половинкин, К.Г. Мишагин

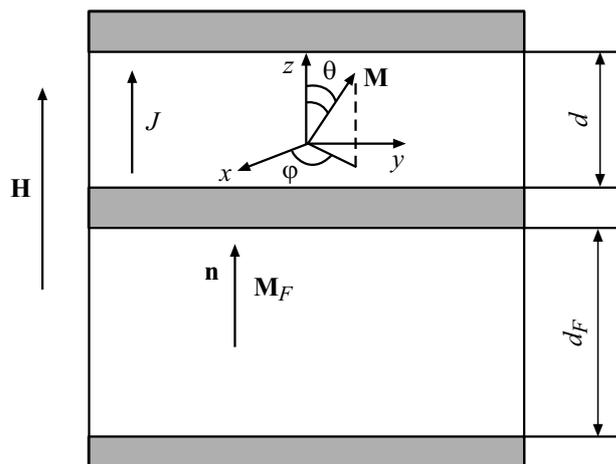
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Россия  
E-mail: polovinkin@rf.unn.ru

Поступило в Редакцию 9 октября 2017 г.

Рассматривается аксиально-симметричная модель спинового генератора при статистически изотропном воздействии флуктуаций магнитного поля. Для данной модели аналитически получено выражение стационарной плотности вероятности распределения угловых координат вектора намагниченности, с помощью которого найдены зависимости среднего и стандартного отклонения амплитуды и средней частоты колебаний от величины протекающего тока. Обнаружены эффекты шумоиндуцированного смещения средних значений амплитуды и частоты колебаний. Последний эффект позволяет качественно объяснить наблюдаемые экспериментально зависимости частоты генерации от тока.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.08.45962.17072

Одним из перспективных направлений повышения быстродействия и миниатюризации схмотехнических решений является спинтроника, в которой используются эффекты переключения намагниченностей и генерации сверхвысокочастотных колебаний в тонких слоистых наноструктурах с различными магнитными свойствами [1]. Типичный спиновый наногенератор имеет небольшой размер ( $\sim 10^1 - 10^2$  nm), малое рабочее напряжение ( $\sim 0.25$  V) и широкий диапазон перестройки частоты ( $f \sim 10^1 - 10^2$  GHz). Одной из особенностей спиновых наногенераторов является зависимость частоты генерации от амплитуды колебаний. Данная особенность приводит к уширению спектральной линии генерации (по сравнению с линией изохронного генератора), а также зависимости ширины спектральной линии от величины приложенного спинполяризованного тока и направления внешнего магнитного поля [2,3].



**Рис. 1.** Структура спинового генератора.

Задача настоящей работы — исследовать влияние теплового шума на зависимости усредненных характеристик колебаний спинового наногенератора от управляющих параметров, таких как плотность спин-поляризованного тока и напряженность внешнего магнитного поля. Проведенное нами аналитическое исследование влияния тепловых флуктуаций магнитного поля на распределение сферических координат вектора намагниченности свободного слоя наногенератора позволило получить в случае полной аксиальной симметрии модели простые аналитические выражения для еще одного интересного эффекта, заключающегося в шумоиндуцированном отклонении средней амплитуды и средней частоты колебаний вектора намагниченности от соответствующих значений в отсутствие флуктуаций [4]. Результаты численного моделирования стохастического уравнения движения наноосциллятора подтверждают корректность применения выбранных аналитических методов. Отметим, что изучение шумовых характеристик спиновых генераторов важно с прикладной точки зрения, в частности для использования в системах фазовой автоподстройки частоты [5].

Рассмотрим тонкую слоистую структуру (рис. 1) из двух слоев ферромагнетика, разделенных немагнитным проводящим материалом

(толщиной меньше спин-диффузионной длины). Нижний слой (фиксированный) является более толстым по сравнению с верхним (свободным) слоем ( $d_F \gg d$ ), за счет этого его намагниченность можно приближенно считать постоянной. Как оказывается [6], намагниченностью  $\mathbf{M}$  свободного слоя в подобной структуре можно управлять с помощью электрического тока  $J$ , протекающего перпендикулярно границе слоев в результате действия внешнего источника напряжения.

Следуя [7], но учитывая также добавочное слагаемое Слончевского, описывающее эффект переноса магнитного момента спин-поляризованным током [6], запишем уравнения Ланжевена стохастической динамики вектора намагниченности свободного слоя для структуры, показанной на рис. 1, в присутствии внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  и с учетом флуктуаций магнитного поля в безразмерных переменных в виде

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = (\mathbf{h}_{eff} + \tilde{\mathbf{h}}(\tau)) \times \mathbf{m} - \lambda(\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff})) + \beta(\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{n})). \quad (1)$$

Здесь  $\tau = |\gamma| M_S t$  — безразмерное время,  $M_S = |\mathbf{M}|$  — величина намагниченности насыщения,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение электрона,  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$  — единичный вектор, указывающий направление вектора намагниченности свободного слоя,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, ортогональный граничным поверхностям слоистой структуры и указывающий направление намагниченности фиксированного слоя,

$$\mathbf{h}_{eff} = \frac{\mathbf{H}_{eff}}{M_S} = \frac{\mathbf{H} + k(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{M_S} = \mathbf{h} + k(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

— нормированная на  $M_S$  детерминированная составляющая эффективного магнитного поля, обусловленная внешним магнитным полем  $\mathbf{H}$  и учитывающая магнитную анизотропию среды,  $k$  — коэффициент магнитной анизотропии,

$$\tilde{\mathbf{h}}(\tau) = \frac{\tilde{\mathbf{H}}(\tau)}{M_S} = \{\tilde{h}_x \mathbf{e}_x, \tilde{h}_y \mathbf{e}_y, \tilde{h}_z \mathbf{e}_z\}$$

— относительная флуктуационная часть магнитного поля,  $\lambda \sim 10^{-2}$  — нормированный параметр магнитной релаксации Ландау–Лифшица,  $\beta \sim 10^{-2}$  — параметр, пропорциональный плотности спин-поляризованного тока  $J$ . Отметим, что в уравнении (1) во втором слагаемом

пренебрегается флуктуационной компонентой магнитного поля в силу малости параметра магнитной релаксации  $\lambda$ .

Следуя [7] и учитывая взаимосвязь релаксационных и флуктуационных характеристик движения магнитного момента, будем предполагать флуктуации магнитного поля изотропным белым гауссовым шумом с функцией корреляции

$$\langle \tilde{h}_i(\tau_1)\tilde{h}_j(\tau_2) \rangle = D_h\delta_{ij}\delta(\tau_2 - \tau_1). \quad (2)$$

В (2)  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака. Отметим, что, как показано в работе [7], величина  $D_h \sim k_B T \lambda$  ( $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура).

Динамика модели (1) в отсутствие шумов и при произвольном направлении внешнего магнитного поля рассмотрена в [8]. Для анализа эффектов, связанных с воздействием шума, рассмотрим наиболее простой для аналитического исследования случай аксиальной симметрии (рис. 1), когда внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$  и намагниченность фиксированного слоя параллельны вектору  $\mathbf{n}$ . Учитывая, что воздействие магнитного поля приводит лишь к поворотам вектора намагниченности свободного слоя, перейдем от векторного уравнения (1) к уравнениям Ланжевена стохастической динамики сферических координат  $\theta$  и  $\varphi$  вектора  $\mathbf{m}(\tau)$  (рис. 1)

$$\dot{\theta} = \lambda \sin \theta \left( \frac{\beta}{\lambda} - (h + k \cos \theta) \right) - \tilde{h}_x \sin \varphi + \tilde{h}_y \cos \varphi, \quad (3a)$$

$$\dot{\varphi} = h + k \cos \theta - (\tilde{h}_x \cos \varphi + \tilde{h}_y \sin \varphi) / \tan \theta + \tilde{h}_z. \quad (3b)$$

Для исследования статистических характеристик движения изображающей точки наногенератора в пространстве  $(\theta, \varphi)$  запишем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x^i} (K_i^{(1)} W) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (K_{ij}^{(2)} W), \quad i, j = 1, 2, \quad (4)$$

где

$$K_\theta^{(1)} = \lambda \sin \theta \left( \frac{\beta}{\lambda} - (h + k \cos \theta) \right) + \frac{D_h}{2 \tan \theta}, \quad K_\varphi^{(1)} = h + k \cos \theta,$$

$$K_{\theta\theta}^{(2)} = D_h, \quad K_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{D_h}{\sin^2 \theta}, \quad K_{\theta\varphi}^{(2)} = K_{\varphi\theta}^{(2)} = 0.$$

— кинетические коэффициенты  $K_i^{(1)}$  и  $K_{ij}^{(2)}$ , полученные с помощью известной методики [9].

В (4) предполагается суммирование по повторяющимся индексам  $i, j$ ;  $x^1 = \theta$ ,  $x^2 = \varphi$ . Отметим, что уравнение Фоккера–Планка (4) записывается для плотности вероятности  $W(\theta, \varphi)$ , которая связана очевидным соотношением с плотностью вероятности случайного распределения на поверхности единичной сферы:  $W(\theta, \varphi) = W_{sphere}(\theta, \varphi) \sin \theta$ .

Далее найдем выражение для стационарной плотности вероятности  $W_{st}(\theta, \varphi)$ . Вследствие очевидной инвариантности задачи относительно поворотов на произвольный азимутальный угол  $\varphi$  плотность вероятности не зависит от азимутального угла:  $W_{st}(\theta, \varphi) = W_{\theta, st}(\theta)/2\pi$ . Решая стационарное уравнение Фоккера–Планка, получим

$$W_{\theta, st}(\theta) = C \exp \left\{ \frac{\lambda}{kD_h} \left[ \frac{\beta}{\lambda} - h - k \cos \theta \right]^2 \right\} \sin \theta, \quad (5)$$

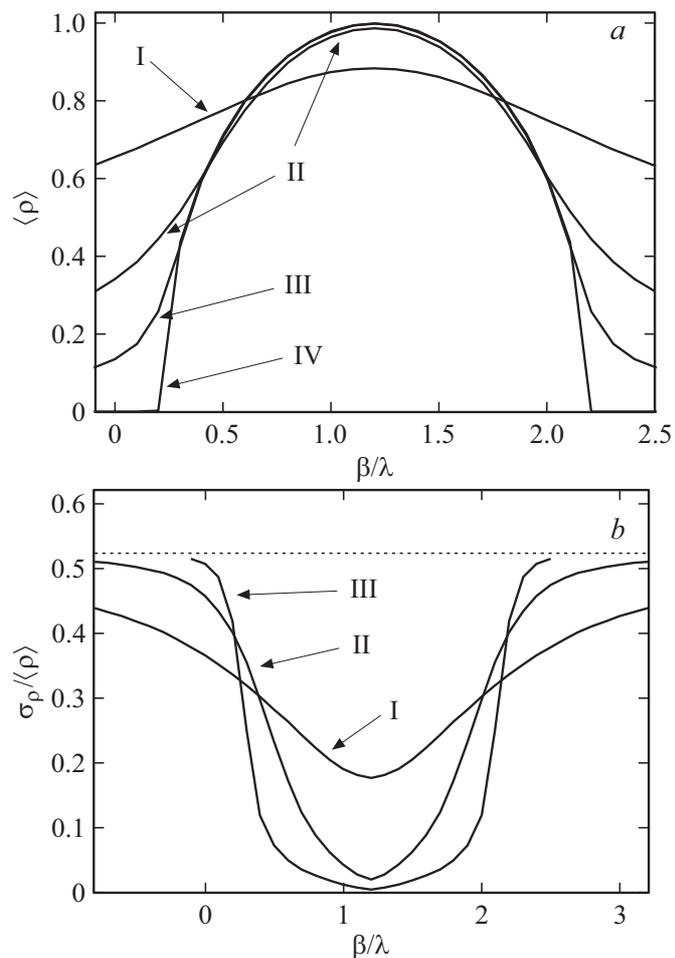
где  $C$  — константа нормировки.

Представленные далее графически аналитические и численные результаты получены при следующих значениях параметров:  $k = -1$ ,  $h = 1.2$ .

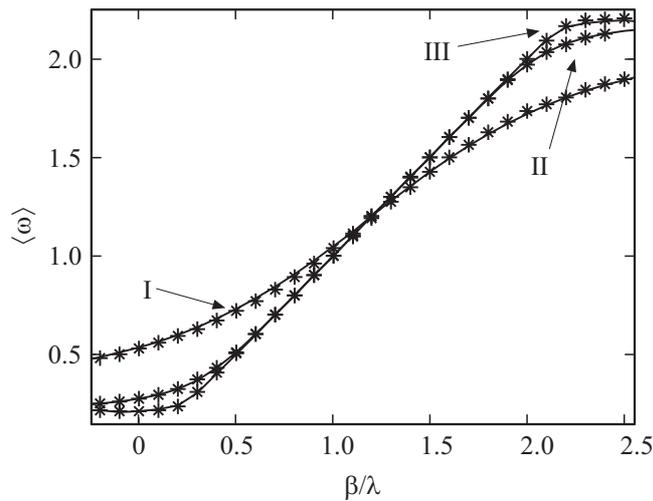
На рис. 2 приведены найденные с применением (5) зависимости средней амплитуды  $\langle \rho \rangle = \langle \sin \theta \rangle$  (рис. 2, *a*) и нормированного стандартного отклонения амплитуды  $\sigma_\rho / \langle \rho \rangle$  (рис. 2, *b*) колебаний магнитного момента спинового генератора от отношения  $\beta/\lambda$  для различных значений интенсивности шума. На рис. 2, *a* наглядно проявляется эффект шумоиндуцированного увеличения амплитуды колебаний около границ области генерации  $|\beta/\lambda - h| < |k|$  (для бесшумового случая), при этом в середине области наблюдается некоторое уменьшение амплитуды колебаний.

Отметим, что при удалении параметра  $\beta/\lambda$  от центра области генерации вместе с уменьшением среднего значения амплитуды возрастает ее флуктуационная составляющая (рис. 2, *b*), а величина  $\sigma_\rho / \langle \rho \rangle$  асимптотически приближается к предельному значению, не зависящему от интенсивности флуктуаций магнитного поля:

$$\frac{\sigma_\rho}{\langle \rho \rangle} \rightarrow \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \approx 0.5227.$$



**Рис. 2.** Зависимости средней амплитуды колебаний (*a*) и относительной дисперсии амплитуды колебаний (*b*) от отношения  $\beta/\lambda$ .  $D_h = 10^{-2}$  (I),  $10^{-3}$  (II),  $10^{-4}$  (III), 0 (IV). Пунктиром на части *b* отмечена асимптота кривых.



**Рис. 3.** Зависимость средней частоты колебаний от отношения  $\beta/\lambda$ . Сплошные линии получены по аналитической формуле (6), точки — результаты численного расчета.  $D_h = 10^{-2}$  (I),  $10^{-3}$  (II),  $10^{-4}$  (III).

Далее, используя (3b) и (5), получим аналитическое выражение для средней частоты вращения магнитного момента

$$\langle \omega \rangle = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\pi b}} \frac{\exp\{-b(1-a)^2\} - \exp\{-b(1+a)^2\}}{\operatorname{erf}\{\sqrt{b}(1-a)\} - \operatorname{erf}\{-\sqrt{b}(1+a)\}}, \quad (6)$$

где

$$a = \frac{1}{k} \left( \frac{\beta}{\lambda} - h \right), \quad b = \frac{\lambda k}{D_h}, \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Таким образом, наличие флуктуаций магнитного поля приводит к дополнительному сдвигу средней частоты спинового генератора по сравнению с детерминированным случаем ( $\omega = \beta/\lambda$ ).

Для контроля корректности используемых подходов нами численно решались уравнения (3a), (3b) стохастической динамики спинового генератора для  $\lambda = 0.02$  и находились усредненные значения  $d\varphi/dt$ . Из

рис. 3 видно полное соответствие результатов численного расчета значениям  $\langle \omega \rangle$ , найденным с использованием аналитического выражения (6). Отметим, что при относительно малых флуктуациях магнитного поля ( $D_h \leq 10^{-3}$ ) эффект сдвига средней частоты наблюдается только на периферии области генерации. Однако при  $D_h \geq 10^{-2}$  флуктуации приводят к заметному дополнительному наклону зависимости  $\langle \omega(\beta/\lambda) \rangle$  при любых значениях отношения параметров  $\beta/\lambda$ .

Проведенный в работе анализ позволяет прояснить физический механизм отмеченной ранее в [3] и отраженной в результатах ряда работ (см. [10–12]) особенности перехода от квазилинейной зависимости  $\langle \omega(\beta/\lambda) \rangle$  в центральной области диапазона генерации к более плавной зависимости на периферии этой области. Он заключается в том, что флуктуации магнитного поля вызывают смещение (преимущественно в сторону больших значений) распределения амплитуд колебаний спинового генератора, а это смещение вследствие нелинейного сдвига частоты приводит к смещению средней частоты генерации.

Подводя итог, сформулируем основные результаты работы. Для случая аксиально-симметричного спинового генератора в предположении статистической изотропности флуктуаций магнитного поля получены аналитические зависимости в квадратурах среднего значения и относительной величины стандартного отклонения амплитуды колебаний от величины спин-поляризованного тока. Получена прямая аналитическая зависимость средней частоты колебаний от величины спин-поляризованного тока. Шум в модели спинового генератора приводит к „размыванию“ границ области генерации колебаний, можно говорить об увеличении по сравнению с результатом детерминистической модели диапазона изменения величины спин-поляризованного тока, при котором наблюдается генерация. Обнаруженный эффект шумоиндуцированного смещения средней частоты наиболее ярко проявляется вблизи границ области генерации. Полученная нелинейная зависимость средней частоты от величины тока качественно совпадает с экспериментально измеренными зависимостями. Данный факт позволяет полагать, что наблюдаемое отклонение от линейного закона является шумовым эффектом.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00882).

**Список литературы**

- [1] *Ферт А.* // УФН. 2007. Т. 178. № 12. С. 1336–1348.
- [2] *Kim J.-V., Tiberkevich V., Slavin A.N.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 017207.
- [3] *Kim J.-V., Mistral Q., Chappert C., Tiberkevich V., Slavin A.N.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 167201.
- [4] *Polovinkin A.V., Mishagin K.G., Pavlin A.I.* // 22nd Int. Conf. on noise and fluctuations (ICNF). IEEE, 2013. P. 345–348.
- [5] *Митрофанов А.А., Сафин А.Р., Удалов Н.Н.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 16. С. 29–35.
- [6] *Slonczewski J.* // J. Magn. Magn. Mater. 1996. V. 159. N 1-2. P. L1–L7.
- [7] *Brown W.F.* // Phys. Rev. 1963. V. 130. N 5. P. 1677–1686.
- [8] *Мишагин К.Г., Алешин К.Н.* // Вестн. ННГУ. 2011. № 5 (3). С. 270–273.
- [9] *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
- [10] *Mistral Q., Kim J.-V., Devolder T., Crozat P., Chappert C.* // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 88. P. 192507.
- [11] *Hofer M.A., Ablovitz M.J., Ilan B., Pufall M.R., Silva T.J.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 267206.
- [12] *Silva T.J., Rippard W.H.* // J. Magn. Magn. Mater. 2008. V. 320. N 7. P. 1260–1271.