

Поляризационная томография остаточных напряжений в цилиндрических граданах

© А.Э. Пуро¹, Д.Д. Каров²

¹Евроакадемия,
10621 Таллинн, Эстония

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: alfredpuro@gmail.com, dmkarov@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.12.2017 г.

В большинстве случаев цилиндрические структуры с градиентным показателем преломления (граданы) формируются на основе диффузионной технологии. Показатель преломления и остаточные напряжения в них носят аксиально симметрический характер. Дисторсия, обусловленная диффузией, и температурные внутренние напряжения в них моделируются фиктивной температурой остаточных напряжений. Применение интегральной фотоупругости для реконструкции остаточных напряжений в граданах обычно ограничивается случаем плоского деформированного состояния. В работе этот алгоритм обобщается на случай аксиального изменения остаточных напряжений. Предполагается, что просвечивание проводится в сечении образца. Решение оптической задачи проводится в рамках квазиизотропного приближения. Реконструкция основана на измерении характеристических параметров поляризованного света, прошедшего через образец и совместном решении задачи термоупругости.

DOI: 10.21883/OS.2018.05.45956.305-17

Введение

Объектом исследования работы является круглый прозрачный цилиндр, показатель преломления и остаточные напряжения которого имеют аксиально симметричную структуру. В частности, к таким объектам относятся стержневые линзы (граданы), световоды и заготовки для них и т. д. Изменяющийся показатель преломления является для них одним из основных функциональных свойств. Чаще всего показатель преломления этих объектов создается специальным распределением химического состава стекла, который формируется соответствующими технологическими процессами (ионообменной диффузией, парофазным осаждением) при высоких температурах (выше интервала стеклования). В зависимости от технологии изменение показателя преломления может иметь различную степень гладкости. Для заготовок световодов на границе сердцевины с оболочкой имеется довольно сильное изменение показателя преломления, связанное с резким изменением состава стекла. Для граданов это изменение носит плавный характер по всему сечению и обусловлено диффузионными процессами. Измеряя томографическим методом отклонение луча, в принципе возможно реконструировать показатель преломления. В первом случае эта задача несколько сложнее [1,2], чем во втором [3]. В случае осевой симметрии показателя преломления траектория луча описывается формулой Бугера [4] и томографическая задача реконструкции показателя преломления значительно упрощается [5,6].

Другой функционально важный фактор (остаточные напряжения) влияет как на механическую прочность изделия, так и на его оптические свойства. Оптическая

тензорная томография (интегральная фотоупругость) — один из неразрушающих перспективных методов, базирующийся на использовании эффекта изменения двулучепреломления под воздействием напряжения (эффект фотоупругости).

История использования этого метода восходит к тридцатым годам прошлого столетия [7]: к задаче определения аксиально симметрических термоупругих напряжений в круглом цилиндре. В дальнейшем задачи интегральной фотоупругости [8,9] послужили стимулом для развития обширного математического направления тензорной томографии [10]. В томографии векторного поля разложение на соленоидальную и потенциальную части в простейшем случае является основой для разработки метода реконструкции [11]. В томографии симметричных тензорных полей аналогичную роль играет разложение, первоначально разработанное в теории упругости для представления тензора напряжений [12–14]. При прямой линии распространения лучей томографическая задача реконструкции температурных напряжений фактически разделяется на два последовательных этапа: 1) сведение тензорных лучевых интегралов к скалярным и 2) нахождение всех компонент тензора напряжений на основе обращения лучевых интегралов и решения соответствующей задачи термоупругости [9,14]. При искривлении лучей решение скалярной и тензорной томографических задач усложняется (томографическая задача на римановой поверхности) [15,16]. Томография градана представляет один из простейших вариантов такой задачи. Достаточно просто определяется метрика поверхности (траектория лучей). Следствием аксиальной симметричности оптической задачи является возможность применения разделения по угловым гармо-

никам лучевых интегралов. Такое разделение несколько упрощает обращение лучевых интегралов, но алгоритм Кормака применим для них только к очень ограниченному классу показателей преломления [17].

В силу вышеуказанных особенностей решение задачи ниже ограничивается осесимметричным распределением напряжения (фактически существующее в большинстве граданов). Более того, в отличие от постоянного показателя преломления [9] оптическая задача и обратная задача термоупругости не разделяются, и их приходится решать одновременно. Исследование основывается на полученном ранее решении осесимметричной задачи термоупругости для изотропной среды [14]. В Приложении 1 в сжатой форме приводятся основные результаты этого решения, в Приложение 2 приводится разложение скалярного лучевого интеграла по угловым гармоникам и трансформация тензорных лучевых интегралов к виду, используемому в рассматриваемом алгоритме. Используемые ниже физические оценки параметров граданов приведены в работе одного из авторов [5] и далее приводятся без ссылок.

Лучевые интегралы при трансверсальном просвечивании градана

Обычно при просвечивании граданов в плоскости, ортогональной к его оси, выполняются условия применимости квазиизотропного приближения геометрической оптики [18]: 1) масштаб изменения показателя преломления много больше длины волн используемого света, 2) анизотропия тензора диэлектрической проницаемости много меньше его изотропной части. Для граданов изменение показателя преломления в образце может составлять 0.1–0.2, в то время как анизотропия показателя преломления, обусловленная остаточными напряжениями, имеет масштаб 10^{-5} – 10^{-4} . В этом случае решение задачи распространения поляризованного света разделяется на задачу определения траектории лучей в оптически изотропной среде и последующую задачу определения поляризации на этих лучах. Решение задачи будем проводить для цилиндрического образца единичного радиуса. Воспользуемся одновременно декартовой (x, y, z) и цилиндрической (r, φ, z) системами координат, направив ось z вдоль оси цилиндра. Одновременно в томографической плоскости будем использовать подвижную систему координат (s, φ) , непосредственно связанную с лучом, на котором производится измерение поляризационных параметров света (рис. 1). Траекторию луча в оптически аксиально симметричной среде можно выразить [1,4] через показатель преломления $n(r)$, $u(r) = rn(r)$,

$$\alpha(r, s) = u(s) \int_{|s|}^r \frac{d\rho}{\rho \sqrt{u(\rho)^2 - u(s)^2}}, \quad (1)$$

где s — кратчайшее расстояние от начала координат до луча, θ — угол между осью x и осью s , $\varphi = \theta \pm \alpha$.

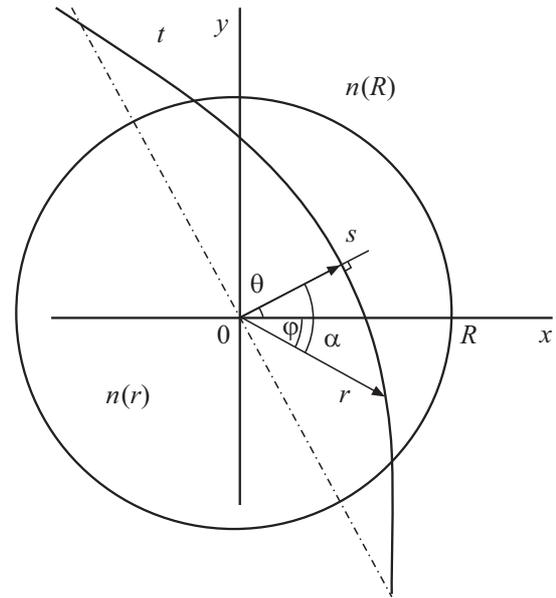


Рис. 1.

Предполагается, что $u(r)$ — монотонная функция и существует взаимно однозначное соответствие между $u(r)$ и r на отрезке $[0,1]$. Радиус цилиндра принят за единицу. Изменение поляризации на луче определяется системой уравнений [18]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{2cn} \mathbf{P} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_z \\ E_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{nn})/2 & \varepsilon_{zn} \\ \varepsilon_{zn} & (\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{zz})/2 \end{bmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Здесь E_z, E_n — амплитуды напряженности электрического поля вдоль осей z и нормали к лучу, c — скорость света, ω — круговая частота излучения, ε_{ij} — компоненты тензора анизотропии диэлектрической проницаемости. В рассматриваемом случае лучи являются плоскими кривыми, и уравнение не содержит слагаемого, пропорционального радиусу кручения. Решение уравнения двулучепреломления в первом приближении можно выразить через лучевые интегралы [19]

$$2\gamma \cos(\beta_0 + \beta_1) = \int C(\sigma_{zz} - \sigma_{nn}) dt = H_0(s, \theta), \quad (2)$$

$$\gamma \sin(\beta_0 + \beta_1) = \int C(\sigma_{zn}) dt = H_1(s, \theta). \quad (3)$$

Здесь компоненты тензора диэлектрической проницаемости, согласно закону Максвелла, выражены через фотоупругую постоянную C , которая в общем случае зависит от координат, и компоненты тензора напряжений σ_{ij} . Непосредственно измеряемыми величинами являются первичные и вторичные характеристические направления β_0, β_1 и характеристическая разность фаз γ [8,9,19].

При просвечивании осесимметричной модели характеристические направления совпадают, $\beta_0 = \beta_1$ (параметр изоклины), что облегчает проведение измерений. Градан помещается в иммерсионную жидкость и измеряется параметр изоклины и характеристическая разность фаз. В дальнейшем для упрощения изложения считаем, что фотоупругая постоянная не зависит от координат. Интегрирование производится вдоль лучей (1). Особенности определения контурных напряжений из измерения лучевых интегралов вблизи поверхности градиентного цилиндра рассмотрены в работе [5] и здесь не разбираются. Использование решения уравнения термоупругости, выраженное посредством потенциалов τ и Φ (Приложение 1) приводит к очевидному результату (Приложение 2) с точки зрения тензорной томографии. Второй лучевой интеграл H_1 является векторным преобразованием Радона, и потенциал τ определяется с помощью интегрального преобразования Абеля (12). Имеем полную аналогию с векторным преобразованием Радона при прямолинейном распространении лучей.

Структура второго лучевого интеграла (13) практически совпадает со структурой аналогичного лучевого интеграла в случае плоской деформации. Интеграл содержит две неизвестные функции: аксиальное напряжение и производную от потенциала Φ . В общем случае реконструкция этих параметров возможна послойно, начиная с нижнего торца цилиндра, здесь аксиальное напряжение равно нулю. Вычисляется потенциал τ и его производная по z , далее из обращения второго лучевого интеграла находится потенциал Φ и все компоненты тензора напряжения на торце. Далее из уравнения (8) определяется производная по высоте от аксиального напряжения, а следовательно, значение аксиального напряжения в следующем сечении. Далее алгоритм повторяется для нахождения напряжений в следующем слое. То есть для определения напряжений в сечении цилиндра необходимо провести измерение и реконструкцию напряжений от торца до рассматриваемого сечения (интегральный подход).

В случае прямолинейного распространения лучей возможна реконструкция напряжений в сечении на основе измерения лучевых интегралов в двух близко отстоящих сечениях. Сначала поясним этот алгоритм на примере типичного градана [5,20]. Показатель преломления обычно в этом случае аппроксимируется параболой

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \mu r^2 \right). \quad (4)$$

Здесь n_0 , μ — постоянные, определяемые на основе измерения. Условие монотонности $u(r)$

$$\frac{d}{dr} n(r) > -\frac{n(r)}{r}$$

при параболическом профиле показателя преломления сводится к неравенству $\mu R \leq 0.82$. В реальных граданах из стекла $\mu R \leq 0.2$, и это условие выполняется.

Простой анализ величин слагаемых в круглых скобках первого лучевого интеграла (15) (Приложение 2)

$$\frac{H_0(s)}{C} = \int_s^R \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{r \partial r} \Phi \right) \frac{[u(s)]^2}{u(r)n^2} \frac{\partial n}{\partial r} \right) \times \frac{2u(r)dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}}$$

показывает, что третье слагаемое в этих условиях не превосходит 0.04 от первых двух. Таким образом, лучевой интеграл в первом приближении можно записать как интегральное преобразование Абеля

$$\begin{aligned} \frac{H}{C} &= \int_s^1 \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \frac{2u(r)dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}} \\ &= \int_{u(s)}^{u(1)} \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \frac{dr}{du} \frac{2udu}{\sqrt{u^2 - [u(s)]^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Его обращение

$$\sigma_{zz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{1}{\pi C} \frac{du}{dr} \int_{u(r)}^{u(R)} \frac{d}{du} H(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - [u(r)]^2}} \quad (6)$$

совместно с обращением второго лучевого интеграла (13) (Приложение 2)

$$\tau[u(r)] = \frac{-1}{C\pi u(r)} \int_{u(r)}^{u(1)} H_1(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - [u(r)]^2}}$$

позволяет определить аксиальное напряжение, а далее из решения уравнения (10), (8) (Приложение 1) найти трансверсальные компоненты тензора напряжений. Полученное значение потенциала Φ позволяет использовать его при дальнейшем уточнении решения. На рис. 2, 3 представлены графики реконструкции напряжений в граданах, изготовленных на основе цирконосиликатного ($n_0 = 1.54$) и германосиликатного (1.59) стекол соответственно. Резкое отличие в графиках напряжений подчеркивает тот факт, что оптические и механические свойства могут практически не коррелировать. Максимальное изменение показателя преломления (0.008 и 0.005) в этих граданах относительно незначительны, поэтому использование вышеуказанной аппроксимации вполне обосновано. Измерение изменения показателей преломления производилось интерференционным методом на основе продольного просвечивания [21,22]. При обращении лучевых интегралов (6), (8) использовались специальные методы регуляризации [5].

Заключение

В настоящее время имеется широкий спектр приборов с градиентным показателем преломления света,

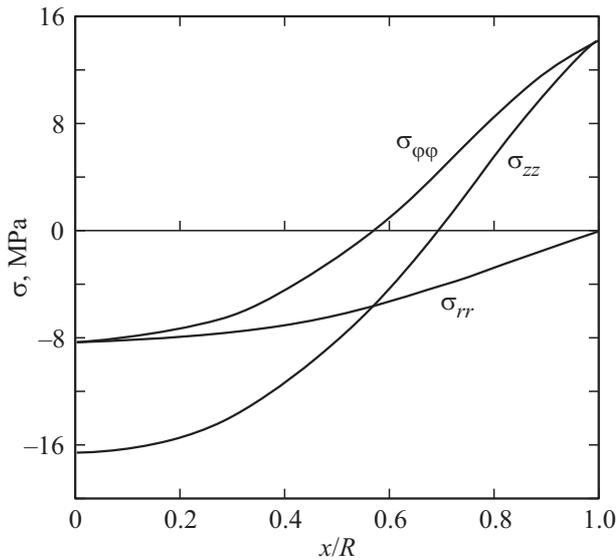


Рис. 2.

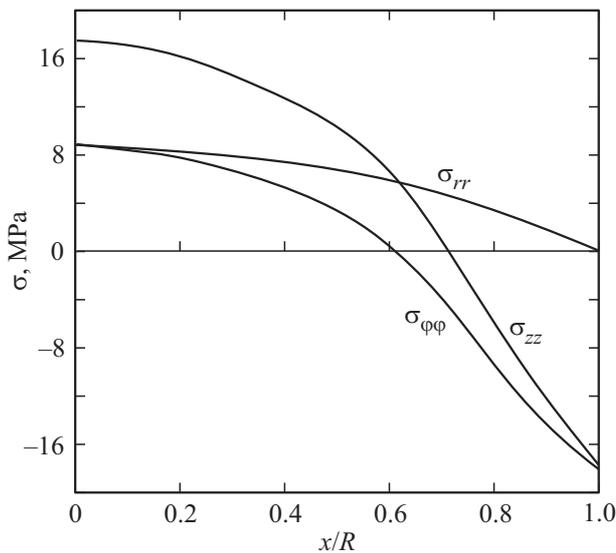


Рис. 3.

включая различного вида световоды, цилиндрические, сферические и полусферические градиентные линзы. Граданы используются в качестве элементов формирования изображения в оптических трансляторах изображения в эндоскопах, копировальных аппаратах, сканерах, факсимильных аппаратах, а также в задачах коммутации и управления в устройствах волоконно-оптической связи (аттенюаторы, дефлекторы, модуляторы, смесители сигналов, переключатели каналов и т. д.), системах световой фокусировки для записи и воспроизведения информации на видеодиске. Большое количество литературы посвящено технологии производства таких приборов и определению показателя преломления в них [20,21,23,24]. Литература, посвященная определению остаточных напряжений в таких устройствах, не столь обширна. Пред-

ложенный алгоритм может применяться не только для устройств с постоянным вдоль оси показателем преломления, но и к показателям, изменяющимся вдоль оси. Единственное условие его — аксиальная симметричность, которое выполняется, в частности, для граданов, у которых коэффициент $\mu(z)$ (4) изменяется вдоль оси градана [23]. В представленном виде алгоритм может применяться к измерению напряжений вблизи торцов градана — в местах, где напряжение меняется вдоль оси. Представленный алгоритм является естественным обобщением довольно известного метода интегральной фотоупругости [24], прошедшего большую практическую проверку и нашедшего обширное применение.

Приложение 1

Остаточные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям. В обычных экспериментах внешняя поверхность свободна от нагрузок. В случае аксиально-симметричных напряжений первое уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) = 0 \quad (7)$$

можно удовлетворить введением потенциалов

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial}{r \partial r} \Phi - \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad \sigma_{\phi\phi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi - \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = \frac{\partial \tau}{\partial r}. \quad (8)$$

Тогда второе уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rz} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = 0$$

сводится к двумерному уравнению Пуассона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \tau = \Delta_+ \tau = - \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}.$$

Для полной реконструкции напряжений в интегральной фотоупругости дополнительно используется гипотеза фиктивной температуры [26]. При производстве граданов методом диффузии в стекло проникают добавочные атомы, создавая дисторсию (остаточную деформацию) в материале. Тензор дисторсии в этом случае изотропен и может моделироваться тепловым расширением (модель фиктивной температуры) [26]. Исходным в этом случае являются соотношения Дюамеля–Неймана [27]

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} + \phi) \delta_{ij}. \quad (9)$$

Здесь ε_{ij} — упругие деформации, $\phi = 3K\alpha T$ — слагаемое, связанное с остаточными деформациями, T — фиктивная температура, определяемая с точностью до аддитивного слагаемого; λ , μ — коэффициенты Ламе, K — модуль объемного сжатия, α — коэффициент теплового расширения, δ_{ij} — символ Кронекера. В используемых обозначениях (8) закон состояния (9) принимает вид

$$\Delta_+ \Phi = \sigma_{zz} + \psi(r, z). \quad (10)$$

Здесь $\psi(r, z)$ — произвольная гармоническая функция, связанная с плоским напряженным состоянием ($\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0$). Обычно в практических вычислениях этим слагаемым пренебрегают, и соотношение (10) в этом случае называется обобщенным законом суммы [25,28]. Для простоты рассмотрения в дальнейшем будем считать $\psi = 0$. На боковой поверхности цилиндра в этом случае значение потенциалов и их нормальных производных равны нулю [14].

Как было показано ранее [14], знание аксиальной компоненты напряжений позволяет определить тензор напряжений с точностью до слагаемого, обусловленного вышеуказанной гармонической функцией. Для справки приведем значение

$$\frac{\partial}{\partial r} \Psi = \frac{1}{r} \int_0^r t \sigma_{zz}(t, z) dt,$$

содержащееся в первом лучевом интеграле.

Лучевые интегралы содержат компоненты тензора напряжений в естественных координатах кривой (касательной и нормали). Для рассматриваемых кривых угол между радиусом-вектором точки на кривой и касательной к кривой v определяется формулой Бугера [4]: $\sin v = u(s)/u(r)$. Приведем соотношения компонент тензоров в цилиндрической и в подвижной системах координат:

$$\sigma_{mn} = \sigma_{rr} \sin^2(v) + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2(v), \quad \sigma_{ns} = \sigma_{rz} \sin(v),$$

используемых в лучевых интегралах. С учетом формулы Бугера выражения преобразуются:

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= \left(\frac{\partial}{r \partial r} \Phi \right) \left(\frac{u(s)}{u(r)} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi \right) \left[1 - \left(\frac{u(s)}{u(r)} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial z} \tau, \\ \sigma_{nz} &= \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{u(s)}{u(r)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Это представление позволяет преобразовать лучевые интегралы к виду, удобному для обращения.

Приложение 2

Преобразование скалярной функции $f(x, y)$ вдоль луча t представим в переменных s, θ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(s, \theta) &= \int_t f(s\vec{\theta} + \vec{x}) dl = \int_s f[r, \theta + \alpha(r, s)] \\ &\times \frac{u(r) dr}{\sqrt{u(r)^2 - u(s)^2}} + \int_s f[r, \theta - \alpha(r, s)] \frac{u(r) dr}{\sqrt{u(r)^2 - u(s)^2}} \\ &= \int_s [f[r, \theta + \alpha(t, s)] + f[r, \theta - \alpha(r, s)]] \frac{u(r) dr}{\sqrt{u(r)^2 - u(s)^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь дифференциал дуги, согласно (1),

$$dl = \pm \frac{u(r) dr}{\sqrt{u(r)^2 - u(s)^2}}.$$

Используя для функции и ее трансформанты разложение по угловым гармоникам

$$f(r, \varphi) = \sum f_n(r) \exp(in\varphi),$$

$$\hat{f}(s, \theta) = \sum g_n(s) \exp(in\theta)$$

и подставляя разложение в (10), получаем выражение угловых гармоник для трансформант

$$g_n(s) = 2 \int_s^\infty f_n(r) \cos[n\alpha(r, s)] \frac{u(r) dr}{\sqrt{u(r)^2 - u(s)^2}}. \quad (13)$$

В случае прямолинейных лучей формула (13) переходит в известные соотношения, полученные Кормаком. Обращения трансформанты (13) для определенных показателей преломления можно получить в виде соотношения, аналогичного преобразованиям Кормака [17]. При рассмотрении осесимметричной задачи лучевые интегралы не зависят от угловой переменной, задача содержит только нулевую гармонику.

Запишем выражения лучевых интегралов в цилиндрической системе координат. Второй лучевой интеграл преобразуется к интегральному преобразованию Абеля

$$\begin{aligned} H_1(s)/C &= \int_s^H \sigma_{nz} \frac{2u(r) dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}} \\ &= \int_s^R \frac{\partial \tau(r)}{\partial r} \frac{u(s)}{u(r)} \frac{2u(r) dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}} \\ &= \int_{u(s)}^{u(R)} \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{2u(s) du}{\sqrt{u^2 - [u(s)]^2}}. \end{aligned}$$

Его обращение можно записать в явном виде

$$\tau[u(r)] = \frac{-1}{C\pi u(r)} \int_{u(r)}^{u(1)} H_1(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - [u(r)]^2}}. \quad (14)$$

Напомним, что рассмотрение проводится в предположении, что $u(r)$ — монотонно возрастающая функция от r , и поэтому имеется взаимно однозначное отображение r на $u(r)$. Аналогично преобразуем первый лучевой инте-

грал:

$$\begin{aligned} \frac{H_0}{C} &= \int_0^R \frac{(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})2u(r)dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}} \\ &= \int_s^R \left[\sigma_{zz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial}{r \partial r} \Phi \left(\frac{u(s)}{u(r)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi \left[1 - \left(\frac{u(s)}{u(r)} \right)^2 \right] \right] \frac{2u(r)dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое в квадратных скобках и используя граничные условия, выделяем слагаемое, явно зависящее от изменения показателя преломления,

$$\begin{aligned} \frac{H_0(s)}{C} &= \int_s^R \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{r \partial r} \Phi \right) \frac{[u(s)]^2}{u(r)n^2} \frac{\partial n}{\partial r} \right) \\ &\quad \times \frac{2u(r)dr}{\sqrt{[u(r)]^2 - [u(s)]^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Список литературы

- [1] *Chu P.L.* // Electron. Lett. 1977. V. 24. N 24. P. 736–738.
- [2] *Pagnotta L., Poggialini A.* // Society for Experimental Mechanics. 2003. V. 43. N 1. P. 69–76.
- [3] *Каров Д.Д., Макушкин Б.В., Сивко С.П., Ушаков С.Н., Фадеев А.Б.* // Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. по выч. томографии. Ташкент, 1989. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 202.
- [4] *Born M., Wolf E.* Principal of Optics. Oxford, London, Edinburgh, N.Y., Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1968. 808 p.; *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
- [5] *Каров Д.Д.* Автореферат канд. дис. СПб: СПб. гос. политех. ун-т, 2012. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://fizmathim.com/read/369384/a?#?page=16>
- [6] *Teichman J.* Institute for Defense Analyses. Alexandria, Virginia, 2013. Электронный ресурс. Режим доступа: https://www.ida.org/idamedia/Corporate/Files/Publications/IDA_Documents/STD/ida-paper-ns-p-4994-final-s001
- [7] *Poritsky H.* // Physics (N.Y.). 1934. V. 5. P. 406–411.
- [8] *Абен Н.К.* Интегральная фотоупругость. Таллин: Валгус, 1975. 218 с.; *Aben H.* Integrated Photoelasticity. N.Y.: McGraw-Hill, 1979. 203 p.
- [9] *Puro A., Aben H.* // Proc. 7th Europ. Conf. On Non-destructive Testing Copenhagen. 1998. V. 3. P. 2390–2397.
- [10] *Defrise M., Gullberg G.T.* Lawrence Berkeley National Laboratory. 2005. P. 1–23. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://repositoies.cdlib.org/lbnl/LBNL-54936>.
- [11] *Braun H., Hauck A.* // IEEE Trans. Signal Process. 1991. V. 39. P. 464–471.
- [12] *Крутков Ю.А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М., Л.: Изд. АН СССР, 1949. 199 с.
- [13] *Puro A.* // Inverse Problems. 1998. V. 14. P. 1315–1330.
- [14] *Puro A., Karov D.* // J. Thermal Stresses. 2016. V. 39. N 5. P. 500. doi 10.1080/01495739.2016.1158606
- [15] *Pestov L.N.* // J. Inv. and Ill-posed Prob. 2012. V. 20. N 1. P. 103–110.
- [16] *Paternain G.P., Salo M., Uhlmann G.* // Chin. Ann. Math. Ser. B. 2014. V. 35. N 3. P. 399–428. doi 10.1007/s11401-014-0834-z
- [17] *Troung T.T., Nguyen M.K.* // Inverse Problems. 2011. V. 27. N 12. P. 125001–125023. doi 10.1088/0266-5611/27/12/125001
- [18] *Кравцов Ю.А., Найдя О.Н., Фуки А.А.* // УФН. 1996. Т. 166. № 2. С. 141; *Kravtsov Yu.A., Naida O.N., Fuki A.A.* // Physics-Uspekh. 1996. V. 39. P. 129.
- [19] *Пуро А.* // Опт. и спектр. 2013. Т. 114. № 3. С. 482–486; *Puro A.* // Opt. Spectrosc. 2013. V. 114. N 3. P. 440–443. doi 10.1134/S003040X13020239
- [20] *Gomez-Varela A.I., Flores-Arias M.T., Bao-Varela C., Gomez-Reino C.* // Opt. and Lasers in Engineering. 2012. V. 50. P. 1706–1715.
- [21] *Iga K.* // Appl. Opt. 1982. V. 21. N 6. P. 1024–1129.
- [22] *Ильин В.Г., Ремизов Н.В.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. № 2. С. 105–110.
- [23] *Lv H., Shi B., Wu J., Guo L., Liu A.* // Opt. and Lasers in Engineering. 2008. V. 46. P. 252–256.
- [24] *Yablon A.D.* // OSA/OFC/NFOEC 2011. Los Angeles, USA. doi 10.1364/OFC.2011.OMF1
- [25] *Errapart A.* Thesis of Ph. D. Work. Tallinn Univ. of Technology. Estonia, 2012.
- [26] *Lancry M., Regnier E., Poumellec B.* Fictive Temperature Measurements in Silicabased Optical Fibers and Its Application to Rayleigh Loss Reduction, Optical Fiber New Developments. / Ed. by Lethien C. 2009. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://www.intechopen.com/books/optical-fiber-new-developments/fictive-temperature-measurements-insilicabased-optical-fibers-and-its-application-to-rayleigh-loss>
- [27] *Lurie A.I.* Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 1039 p.; *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [28] *Ainola L., Aben H.* // J. Thermall Stresses. 2000. V. 23. P. 685–697.