

01

## Оптимизация режимов стабилизации оптических стандартов частоты, основанных на резонансе насыщенного поглощения\*

© Д.В. Коваленко<sup>1,2,3</sup>, М.Ю. Басалаев<sup>1,2,3</sup>, В.И. Юдин<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Институт лазерной физики Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>3</sup> Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия

e-mail: dvk.laser@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.12.2017 г.

В рамках формализма атомной матрицы плотности проводится теоретическое исследование наклона сигнала ошибки для стандартов частоты, основанных на резонансе насыщенного поглощения, возбуждаемого в поле двух встречных волн. Рассмотрены две схемы формирования сигнала ошибки: в первом случае модулируется частота только пробного поля, а во втором случае осуществляется частотная модуляция обеих волн. На основе проведенных расчетов определены оптимальные параметры гармонической модуляции, при которых наклон имеет максимальное значение.

DOI: 10.21883/OS.2018.05.45938.309-17

### Введение

В настоящее время стандарты частоты и атомные часы на их основе являются важными и востребованными квантовыми устройствами, которые имеют широкий спектр приложений во многих областях науки (проверка фундаментальных теорий, высокоточные измерения) и техники (навигация, системы связи и передачи информации) [1]. Одними из широко распространенных оптических (в том числе транспортируемых) стандартов частоты являются He–Ne- и Nd:YAG-лазеры, стабилизируемые по резонансам насыщенного поглощения (РНП) на колебательно-вращательных переходах молекул метана и йода [2–4]. Преимуществами данных стандартов являются малые габариты в сочетании с достаточно высоким значением стабильности частоты (на уровне  $10^{-15}$  за 100 с) [5–7]. Чаще всего РНП используется на практике в конфигурации из двух встречных световых волн одинаковой частоты (стоячая волна), взаимодействующих с общим переходом в атоме (молекуле). При этом в спектре поглощения одной из волн (пробной) РНП наблюдается в виде узкого провала (в центре широкого доплеровского контура), который может использоваться в качестве частотного репера для стабилизации оптических стандартов частоты [8].

Основной целью исследований, посвященных стандартам частоты, является повышение их стабильности, что может достигаться путем оптимизации режимов стабилизации частоты. В работах [9–13] показано, что наклон сигнала ошибки существенно зависит от параметров гармонической частотной модуляции (индекса и

частоты модуляции), используемой в системах стабилизации. Данный наклон является одним из основных параметров, определяющих метрологические характеристики (стабильность и точность) частотных стандартов [14]. Поэтому важной задачей является максимизация наклона. Однако детальное теоретическое исследование данного вопроса, которое требует нахождения динамического решения для матрицы плотности, ранее не проводилось. В настоящей работе мы восполняем этот пробел, используя для вычислений недавно разработанный нами метод [15], который позволяет конструировать точное периодическое решение уравнения для матрицы плотности без применения Фурье-анализа. При этом мы численно рассчитываем сигнал ошибки в широком диапазоне параметров частотной модуляции лазерного поля и находим оптимальные режимы стабилизации частоты, для которых сигнал ошибки имеет максимальный наклон.

### Теория и расчеты

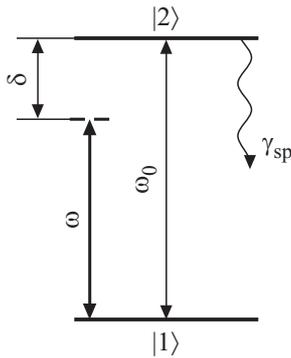
В качестве модели мы рассматриваем взаимодействие двухуровневой системы газа атомов (молекул) (рис. 1) с частотно-модулированным лазерным полем двух встречных волн (пробная волна + волна накачки):

$$E(t) = E_1 e^{-i(\omega t - kz + \Phi_1(t))} + E_2 e^{-i(\omega t + kz + \Phi_2(t))} + \text{к. с.}$$

$$\Phi_{1,2}(t) = \mu_{1,2} \sin(f_m t), \quad (1)$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  — амплитуды пробной волны и волны накачки соответственно,  $\omega$  — частота электромагнитного поля,  $k$  — волновое число,  $f_m$  — частота модуляции,  $\mu_{1,2}$  — индексы модуляции пробной волны и волны

\* X Международная конференция молодых ученых и специалистов „Оптика 2017“, 16–20 октября 2017 г., Санкт-Петербург, Россия



**Рис. 1.** Схема двухуровневой квантовой системы.  $|1\rangle$  — основной энергетический уровень,  $|2\rangle$  — возбужденный энергетический уровень,  $\omega$  — частота поля,  $\omega_0$  — частота перехода,  $\delta$  — отстройка частоты поля  $\omega$  от частоты перехода  $\omega_0$ ,  $\gamma_{sp}$  — скорость спонтанной релаксации верхнего уровня  $|2\rangle$ .

накачки соответственно. Атомная среда предполагается достаточно разреженной, что позволяет пренебречь эффектами межатомного взаимодействия и решать задачу в одноатомном приближении. Также рассматривается случай достаточно нагретых атомов (например, при комнатной температуре), что позволяет пренебречь интерференцией пробного и накачивающего полей. Для математического описания взаимодействия атомов с резонансным электромагнитным полем будем использовать стандартный формализм атомной матрицы плотности

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,k} |j\rangle \rho_{jk}(t) \langle k|, \quad (2)$$

удовлетворяющей следующему операторному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{\rho} + \hat{\Gamma}_{sp} \{\hat{\rho}\} + \hat{\Gamma}_{opt} \{\hat{\rho}\} \\ = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - \frac{i}{\hbar} [\hat{V}, \hat{\rho}], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\hat{H}_0$  — гамильтониан невозмущенного атома,

$$\hat{H}_0 = W_1 |1\rangle \langle 1| + W_2 |2\rangle \langle 2|, \quad (4)$$

$W_m$  — энергия  $m$ -го состояния (рис. 1),  $\mathbf{v}$  — вектор скорости атома,  $\hat{V} = -(\hat{d}E)$  есть оператор взаимодействия атомов с полем (где  $\hat{d}$  — оператор электрического дипольного момента), который в приближении вращающейся волны имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{V} = -d_{21} (E_1 e^{-i(\omega t - kz + \Phi_1(t))} \\ + E_2 e^{-i(\omega t + kz + \Phi_2(t))}) |2\rangle \langle 1| + \text{э. с.}, \end{aligned} \quad (5)$$

$d_{21}$  — матричный элемент оператора электрического дипольного момента  $\hat{d}$ ; оператор  $\hat{\Gamma}_{sp} \{\hat{\rho}\}$  описывает спон-

танную релаксацию возбужденного состояния,

$$\hat{\Gamma}_{sp} \{\hat{\rho}\} = -\frac{\gamma_{sp}}{2} \rho_{22} |1\rangle \langle 1| + \frac{\gamma_{sp}}{2} \rho_{22} |2\rangle \langle 2|, \quad (6)$$

оператор  $\hat{\Gamma}_{opt} \{\hat{\rho}\}$  определяет затухание оптических когерентностей,

$$\hat{\Gamma}_{opt} \{\hat{\rho}\} = \gamma_{opt} (\rho_{12} |1\rangle \langle 2| + \rho_{21} |2\rangle \langle 1|), \quad (7)$$

где постоянные  $\gamma_{sp}$ ,  $\gamma_{opt}$  — скорости соответствующих релаксационных процессов. В настоящей работе мы ограничиваемся одномерным движением атома, т.е. с вектором скорости  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ . Подставляя выражения (4)–(7) в уравнение (2) и исключая из недиагональных элементов матрицы плотности быстрые осцилляции:

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}^{(1)} e^{-i(\omega t - kz + \Phi_1(t))} + \tilde{\rho}_{21}^{(2)} e^{-i(\omega t + kz + \Phi_2(t))}, \quad (8)$$

с учетом только первых пространственных гармоник получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = \gamma_{sp} \rho_{22} + i(\Omega_1^* \tilde{\rho}_{21}^{(1)} - \tilde{\rho}_{12}^{(1)} \Omega_1) \\ \quad + i(\Omega_2^* \tilde{\rho}_{21}^{(2)} - \tilde{\rho}_{12}^{(2)} \Omega_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = -\gamma_{sp} \rho_{22} + i(\Omega_1 \tilde{\rho}_{12}^{(1)} - \tilde{\rho}_{21}^{(1)} \Omega_1^*) \\ \quad + i(\Omega_2 \tilde{\rho}_{12}^{(2)} - \tilde{\rho}_{21}^{(2)} \Omega_2^*), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{21}^{(1)} = -\gamma_{opt} \tilde{\rho}_{21}^{(1)} + i[\delta_1(t) - kv_z] \tilde{\rho}_{21}^{(1)} + i\Omega_1 (\rho_{11} - \rho_{22}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{21}^{(2)} = -\gamma_{opt} \tilde{\rho}_{21}^{(2)} + i[\delta_2(t) + kv_z] \tilde{\rho}_{21}^{(2)} + i\Omega_2 (\rho_{11} - \rho_{22}), \\ \tilde{\rho}_{12} = \tilde{\rho}_{21}^*, \\ \text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $\delta_{1,2}(t) = \delta + \partial \Phi_{1,2}(t) / \partial t = \delta + \Delta_{1,2} \cos(f_m t)$  есть законы модуляции отстройки  $\delta = \omega - \omega_0$  частоты поля  $\omega$  от частоты перехода  $\omega_0$  для пробного поля и накачивающего поля соответственно,  $\Delta_{1,2} = \mu_{1,2} f_m$  — амплитуды модуляции пробной волны и волны накачки соответственно. Далее,  $\Omega_1 = d_{21} E_1 / \hbar$  и  $\Omega_2 = d_{21} E_2 / \hbar$  — частоты Раби для перехода  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ .

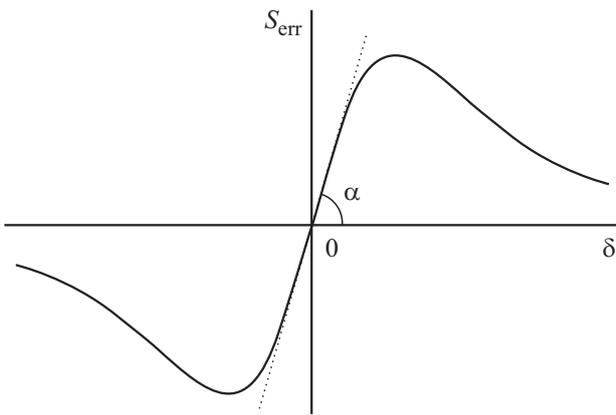
В качестве исследуемого сигнала рассматривается поглощение пробной волны, которое в приближении оптически тонкой среды определяется как

$$A(t, kv_z) = 2\text{Im}\{\Omega_1^* \rho_{21}^{(1)}(t, kv_z)\}. \quad (10)$$

Для стабилизации частоты обычно используется техника синхронного детектирования. Применительно к нашему случаю это приводит к следующему выражению для сигнала ошибки как функции отстройки  $\delta$ :

$$\begin{aligned} S_{err}(\delta) = \frac{1}{T} \frac{k}{\sqrt{\pi} \omega_D} \int_0^T \cos(f_m t + \phi) dt \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} A(t, kv_z) e^{-\frac{(kv_z)^2}{\omega_D^2}} d(v_z), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\omega_D$  — доплеровская ширина спектральной линии,  $T = 2\pi / f_m$  — период модуляции,  $\cos(f_m t + \phi)$  —



**Рис. 2.** Схематическое изображение зависимости сигнала ошибки  $S_{\text{err}}$  от отстройки  $\delta$ ,  $\alpha$  — угол наклона линейного участка сигнала ошибки в центре линии.

опорный сигнал,  $\phi$  — фазовый сдвиг опорного сигнала (фаза синхронного детектирования) по отношению к законам модуляции отстройки  $\delta_{1,2}(t)$ . При  $\phi = 0^\circ$  сигнал ошибки определим синфазным, а для  $\phi = -\pi/2$  — квадратурным.

Типичный вид сигнала ошибки (11) представлен на рис. 2 и имеет форму дисперсионной кривой. Наклон кривой в центре линии определяется как

$$K = \tan(\alpha) = \left. \frac{\partial S_{\text{err}}}{\partial \delta} \right|_{\delta=0}. \quad (12)$$

Относительная стабильность частоты пропорциональна величине  $|K|/N(f_m)$ , где  $N(f_m)$  есть спектральная плотность шумов на частоте  $f_m$  [14]. В настоящей работе мы исследуем и максимизируем величину  $|K|$ , которая зависит от конкретных параметров теоретической модели  $\{\Omega_1, \Omega_2, \mu_{1,2}, f_m, \phi, \gamma_{\text{sp}}, \gamma_{\text{opt}}, \omega_D\}$ .

Как уже говорилось во введении, для расчета временной зависимости матрицы плотности, описываемой уравнениями (9), мы использовали метод построения периодического решения, который подробно изложен в работе [15]. Суть этого метода состоит в следующем. Для начала необходимо представить систему дифференциальных уравнений для матрицы плотности (9) в векторном виде:

$$\partial_t \boldsymbol{\rho}(t) = \hat{L}(t) \boldsymbol{\rho}(t); \quad \text{Tr}\{\hat{\rho}(t)\} = \sum_j \rho_{jj}(t) = 1, \quad (13)$$

где вектор-столбец  $\boldsymbol{\rho}(t)$  формируется из матричных элементов  $\rho_{jk}(t)$ , а линейный оператор  $\hat{L}(t)$  построен из коэффициентов динамической системы уравнений (9). Если для некоторого момента времени  $t_1$  существует вектор  $\boldsymbol{\rho}(t_1)$ , тогда в соответствии с уравнением (13) для другого момента времени  $t_2$  мы можем написать

$$\boldsymbol{\rho}(t_2) = \hat{A}(t_2, t_1) \boldsymbol{\rho}(t_1), \quad (14)$$

где двухвременной оператор эволюции  $\hat{A}(t_2, t_1)$  определяется из матричной зависимости  $\hat{L}(t)$ . В случае условия

периодичности,  $\hat{L}(t+T) = \hat{L}(t)$ , имеет место следующее соотношение:

$$\hat{A}(t_2+T, t_1+T) = \hat{A}(t_2, t_1) \quad (15)$$

для произвольных  $t_2, t_1$ . В работе [15] было строго доказано существование периодического решения  $\boldsymbol{\rho}(t+T) = \boldsymbol{\rho}(t)$  для произвольной периодически возбуждаемой квантовой системы. Благодаря релаксационным процессам это состояние реализуется как асимптотическое ( $t \rightarrow \infty$ ) независимо от начальных условий. Таким образом, периодичность является главным свойством динамического стационарного состояния, которое удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \hat{A}(t+T, t) \boldsymbol{\rho}(t), \quad \text{Tr}\{\hat{\rho}(t)\} = \sum_j \rho_{jj}(t) = 1. \quad (16)$$

Это уравнение может быть использовано для построения универсального вычислительного алгоритма (без применения Флоке- или Фурье-формализмов). Действительно, рассмотрим некоторый выбранный временной интервал  $[t_0, t_0+T]$ , который можно разбить на  $N$  малых подынтервалов между точками:  $t_n = t_0 + n\tau$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ), где  $\tau = T/N$  есть длительность подынтервалов. Зависимость  $\hat{L}(t)$  мы аппроксимируем ступенчатой функцией, где матрица  $\hat{L}(t)$  имеет постоянное значение  $\hat{L}(t_{n-1})$  внутри подынтервала  $(t_{n-1}, t_n]$ . В этом случае вектор  $\boldsymbol{\rho}(t_0)$  в начальной точке  $t_0$  определяется уравнением (16), где оператор эволюции  $\hat{A}(t_0+T, t_0)$  имеет форму последовательного произведения матричных экспонент:

$$\hat{A}(t_0+T, t_0) \approx \prod_{n=1}^{n=N} e^{\tau \hat{L}(t_{n-1})} = e^{\tau \hat{L}(t_{n-1})} \times \dots \times e^{\tau \hat{L}(t_1)} \times e^{\tau \hat{L}(t_0)}. \quad (17)$$

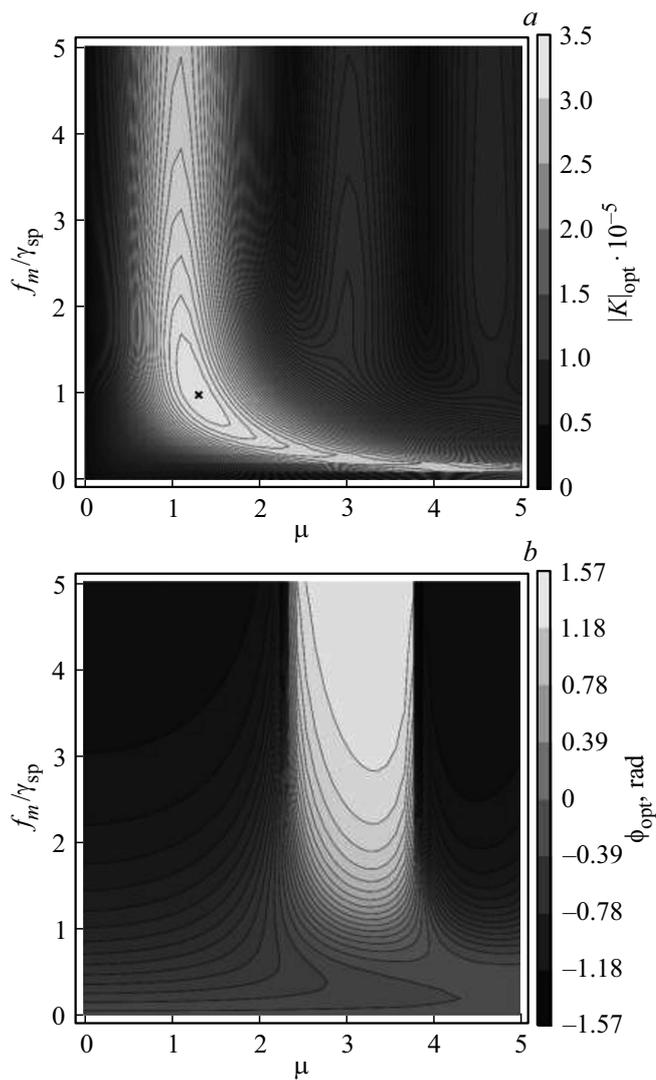
Векторы  $\boldsymbol{\rho}(t_n)$  в других точках интервала  $[t_0, t_0+T]$  определяются через рекуррентное соотношение

$$\boldsymbol{\rho}(t_n) = e^{\tau \hat{L}(t_{n-1})} \boldsymbol{\rho}(t_{n-1}). \quad (18)$$

Наш метод автоматически учитывает полный набор всех частотных компонент и значительно упрощает численные вычисления для любого типа периодической модуляции: от плавной гармонической до ультракоротких импульсов (практически без значительного изменения времени вычисления). В противоположность этому, для того чтобы численно решить уравнение (13), используя Фурье-анализ, мы должны использовать следующее разложение:

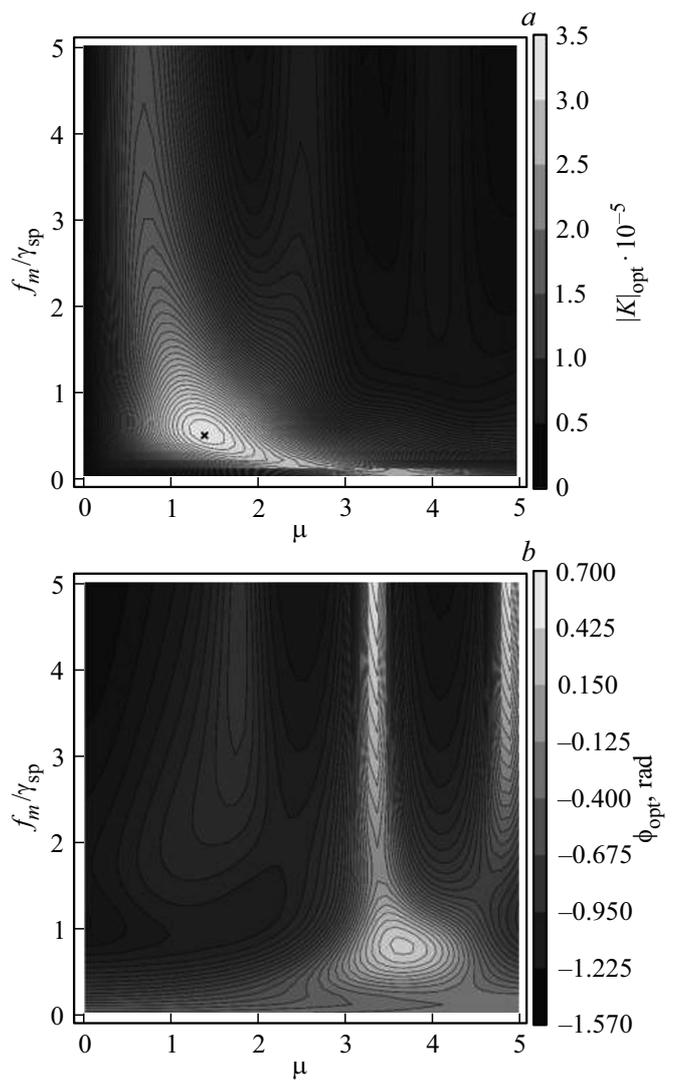
$$\boldsymbol{\rho}(t) = \sum_q \boldsymbol{\rho}_q e^{q2\pi t/T}, \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (19)$$

где компоненты  $\boldsymbol{\rho}_q$  удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям, которые в общем случае могут быть очень сложными и могут привести к огромным вычислительным затратам.



**Рис. 3.** Зависимость (а) наклона сигнала ошибки  $|K|_{\text{opt}}$  и (b) соответствующей оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  опорного сигнала от индекса  $\mu$  и частоты  $f_m$  модуляции (модулируется частота только пробного поля). Положение максимального наклона отмечено крестиком. Численные параметры модели:  $\gamma_{\text{opt}} = 0.5\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\omega_D = 250\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Omega_1 = 0.1\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Omega_2 = 0.5\gamma_{\text{sp}}$ .

В настоящей работе мы рассматриваем два разных варианта гармонической частотной модуляции лазерного поля: 1)  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = 0$  (модулируется частота только пробной волны) и 2)  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  (осуществляется одинаковая модуляция частоты как пробного поля, так и поля накачки, которая образует частотно-модулированную стоячую волну). Все расчеты были проведены при доплеровской ширине  $\omega_D = 250\gamma_{\text{sp}}$ , соответствующей переходу в молекуле йода  $I_2$  на длине волны  $\lambda \approx 532 \text{ nm}$ . Наклон  $|K|$  сигнала ошибки (11) для заданных индекса и частоты модуляции можно максимизировать путем выбора оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  опорного сигнала. На рис. 3 и 4 представлены рассчитанные зависимости наклона сигнала ошибки  $|K|_{\text{opt}}$  (рис. 3, а и 4, а) и соответствующей ему оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  (рис. 3, б



**Рис. 4.** Зависимость (а) наклона сигнала ошибки  $|K|_{\text{opt}}$  и (b) соответствующей оптимальной фазы  $\phi_{\text{opt}}$  опорного сигнала от индекса  $\mu$  и частоты  $f_m$  модуляции (случай частотно-модулированной стоячей волны). Положение максимального наклона отмечено крестиком. Численные параметры модели:  $\gamma_{\text{opt}} = 0.5\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\omega_D = 250\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Omega_1 = 0.1\gamma_{\text{sp}}$ ,  $\Omega_2 = 0.5\gamma_{\text{sp}}$ .

и 4, б) от параметров модуляции  $(\mu, f_m)$ . Как видно из приведенных рисунков, зависимость наклона от параметров модуляции для обоих вариантов имеет вид параллельных „хребтов“. При этом главный „хребет“ (т.е. с наибольшим  $|K|_{\text{opt}}$ ) вытянут в области высоких частот ( $f_m > 2\gamma_{\text{sp}}$ ) вдоль линии с индексом модуляции  $\mu \approx 1.1$  для первого варианта (т.е. когда гармонически модулируется частота только пробного поля) и  $\mu \approx 0.7$  для второго варианта (случай частотно-модулированной стоячей волны). Соответствующая этой области оптимальная фаза опорного сигнала близка к  $-\pi/2$ , т.е. в области высоких частот максимум наклона наблюдается для квадратурного сигнала ошибки. Для двух рассматриваемых вариантов модуляции частоты максимальные значения наклона  $|K|_{\text{max}} = \max\{|K|_{\text{opt}}\}$  сопоставимы, од-

нако достигаются при различных параметрах модуляции и фазах опорного сигнала. Для первого случая  $|K|_{\max}$  соответствует точке с  $\mu_{\text{opt}} \approx 1.3$ ,  $f_{m\text{opt}} \approx 1.1\gamma_{\text{сп}}$  и фазе  $\phi_{\text{opt}} \approx -0.78 \text{ rad} \approx 45^\circ$ , а для второго случая —  $\mu_{\text{opt}} \approx 1.4$ ,  $f_{m\text{opt}} \approx 0.6\gamma_{\text{сп}}$  и фазе  $\phi_{\text{opt}} \approx -0.94 \text{ rad} \approx 54^\circ$ . Таким образом, оптимальные режимы стабилизации, при которых достигается  $|K|_{\max}$ , находятся в промежуточной области между синфазным ( $\phi = 0^\circ$ ) и квадратурным ( $\phi = -90^\circ$ ) сигналами ошибки для обоих вариантов частотной модуляции поля двух встречных волн.

## Заключение

В настоящей работе мы провели теоретическое исследование по оптимизации параметров частотной модуляции и фазы опорного сигнала для стандартов частоты, стабилизированных по резонансу насыщенного поглощения. В качестве модели нами рассматривалось взаимодействие частотно-модулированного поля двух встречных волн с газом двухуровневых атомов. Для решения данной задачи мы использовали разработанный нами метод расчета, который позволяет находить точное периодическое решение для матрицы плотности. Было обнаружено, что наличие/отсутствие гармонической модуляции частоты в поле накачки существенно влияет на оптимальные параметры режима стабилизации, что, однако, практически не сказывается на значении максимума наклона сигнала ошибки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 16-32-60050 мол\_а\_дк, № 17-02-00570) и Министерства образования и науки РФ (грант 3.1326.2017/4.6).

## Список литературы

- [1] Ludlow A.D., Boyd M.M., Ye J., Peik E., Schmidt P.O. // *Rev. Mod. Phys.* 2015. V. 87. P. 637.
- [2] Летохов В.С., Чеботаев В.П. Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения. М.: Наука, 1990. 512 с.; Letokhov V.S., Chebotayev V.P. *Nonlinear Laser Spectroscopy*. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 466 p.
- [3] Губин М.А., Киреев А.Н., Пнев А.Б., Тюриков Д.А., Шелестов Д.А., Шелковников А.С. // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2011. Т. S2. С. 199.
- [4] Скворцов М.Н., Охупкин М.В., Невский А.Ю., Багаев С.Н. // *Квант. электрон.* 2004. Т. 34. С. 1101.
- [5] Goncharov A.N. et al. // *J. Appl. Phys. B*. 2004. V. 78. P. 725.
- [6] Zang E.J. et al. // *J. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2007. V. 56. P. 673.
- [7] Губин М.А., Киреев А.Н., Конященко А.В., Крюков П.Г., Таусенев А.В., Тюриков Д.А., Шелковников А.С. // *Квант. электрон.* 2008. Т. 38. С. 613.
- [8] Rieger T., Volz T. Doppler — Free Saturation Spectroscopy. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.ph.tum.de/studium/praktika/fopra/text/userguide-05.en.pdf>
- [9] Барашиев В.А., Семибаламут В.М., Тутов Е.А. // *Квант. электрон.* 1979. Т. 6. С. 261.
- [10] Bjorklund G.C., Levenson M.D. // *Appl. Phys. B*. 1983. V. 32. P. 145.
- [11] Jaatinen E. // *Opt. Commun.* 1995. V. 120. P. 91.
- [12] Курбатов А.А., Луговой А.А., Тутов Е.А. // *Опт. и спектр.* 2006. Т. 100. С. 400.
- [13] Eble J.F., Schmidt-Kaler F. // *Appl. Phys. B*. 2007. V. 88. P. 563.
- [14] Riehle F. *Frequency Standards: Basics and Applications*. John Wiley & Sons, Inc, 2006. 540 p.; Фриц Р. *Стандарты частоты: принципы и приложения*. Физматлит, 2009. 511 с.
- [15] Yudin V.I., Taichenachev A.V., Basalaev M.Yu. // *Phys. Rev. A*. 2016. V. 93. P. 013820.