01

Эффект отдачи ядра для g-фактора легких бороподобных ионов*

© Д.А. Глазов, А.В. Малышев, В.М. Шабаев, И.И. Тупицын

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: d.glazov@spbu.ru

Поступила в редакцию 25.11.2017 г.

Поправка на отдачу ядра к g-фактору бороподобных ионов вычислена в низшем релятивистском (брейтовском) приближении. Влияние межэлектронного взаимодействия учтено в первом порядке теории возмущений по $1/Z$. Высшие порядки по $1/Z$ частично учтены с помощью эффективного экранирующего потенциала. В результате представлены наиболее точные на сегодняшний день значения поправки на отдачу ядра для бороподобных ионов в диапазоне $Z = 10-20$.

DOI: 10.21883/OS.2018.04.45740.271-17

1. Введение

За последние двадцать лет g-фактор связанного электрона стал объектом интенсивных экспериментальных и теоретических исследований. Высокоточные измерения для водородоподобных ионов [1–4] вместе с теоретическими расчетами (см. [5] и ссылки там) позволили существенно уточнить массу электрона [6,7]. Ожидаемые в ближайшем будущем эксперименты с водородо-, литие- и бороподобными ионами могут обеспечить независимое определение постоянной тонкой структуры [8–10] при условии соответствующего прогресса со стороны теории. В то же время достигнутое к настоящему времени согласие между теорией и экспериментом демонстрирует наиболее точную проверку квантовой электродинамики (КЭД) для связанных состояний в присутствии магнитного поля [4,5,11–14]. Еще более нетривиальная проверка КЭД связана с эффектом отдачи ядра, полное описание которого требует выхода за рамки картины Фарри, т.е. за рамки приближения внешнего поля. В частности, измерение изотопического сдвига для g-фактора литиеподобного кальция [15] позволило непосредственно наблюдать вклад эффекта отдачи. В нашей недавней работе [16] двухэлектронный вклад в этот эффект был вычислен заново в рамках релятивистского подхода, что позволило улучшить согласие между теорией и экспериментом. Более того, в работе [17] мы показали, что нетривиальный КЭД-вклад в эффект отдачи может быть протестирован с погрешностью порядка нескольких процентов в специфической разности g-факторов тяжелых водородо- и литиеподобных ионов.

Первое измерение g-фактора для бороподобных ионов, достаточно точное для наблюдения КЭД-поправок, было выполнено в Институте Макса Планка (MPIK) в Гейдельберге [18]. Эксперимент ARTEMIS, осуществляемый в настоящее время в Институте физики тяжелых ионов (GSI) в Дармштадте [19], нацелен на определение g-факторов основного и первого возбужденного состояний в ионе Ar^{13+} с точностью порядка 10^{-9}. Все это привлекло особое внимание к зеемановскому расщеплению в бороподобных ионах, как к g-фактору, так и к нелинейным по магнитному полю эффектам [20–24]. Теоретическая погрешность g-фактора в настоящее время значительно больше для бороподобных ионов, чем для литиеподобных. В частности, для бороподобного аргона она составляет $0.7 \cdot 10^{-6}$ [21]. В то же время и эффект отдачи для p-состояний значительно сильнее ($-9.1 \cdot 10^{-6}$ для аргона) благодаря вкладам, которые исчезают для s-состояний. Таким образом, исследования g-фактора бороподобных ионов перспективны не только для определения α [8], но и для проверки КЭД теории эффекта отдачи ядра.

В данной работе мы представляем наиболее точный на сегодняшний день релятивистский расчет поправки на отдачу ядра к g-фактору бороподобных ионов. Использование дираковских волновых функций и соответствующих 4-компонентных операторов обеспечивает полный учет всех вкладов порядка m/M и $(\alpha Z)^2 m/M$. Поправка на межэлектронное взаимодействие первого порядка вычислена в рамках приближения Брейта. Численные результаты представлены для ионов в диапазоне $Z = 10-20$.

В работе используется релятивистская система единиц ($\hbar = c = 1$).

2. Основные формулы

Мы рассматриваем бороподобный ион в основном состоянии $(1s)^2\,(2s)^2\,2p_{1/2}$, помещенный в постоянное однородное магнитное поле $\mathscr{H}$, которое направлено по оси z. Обозначим за $|A\rangle$ многоэлектронную волновую функцию рассматриваемого состояния с энергией E_A и проекцией полного углового момента M_J, полученную в нулевом порядке по $1/Z$. Она представляет собой детерминант Слейтера из дираковских волновых функций в потенциале ядра, E_A равно сумме соответствующих одноэлектронных энергий, а M_J совпадает с проекцией

* Совещание по прецизионной атомно-молекулярной спектроскопии, 13–14 ноября 2017 г., ПИЯФ НИЦ „Курчатовский институт“, Гатчина, Россия.

состояния $2p_{1/2}$. Взаимодействие с магнитным полем описывается оператором

$$H_{\text{magn}} = \mu_0 \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \sum_j [\mathbf{r}_j \times \boldsymbol{\alpha}_j], \tag{1}$$

где μ_0 — магнетон Бора, $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор матриц Дирака.

Нерелятивистский оператор для поправки на отдачу ядра к g-фактору связанного электрона в первом порядке по отношению масс m/M был получен в работе [25]. Ведущие релятивистские и радиационные поправки, а также вклады высших порядков по параметру m/M были рассмотрены, например, в работах [26–32]. Строгая релятивистская теория эффекта отдачи для g-фактора в первом порядке по m/M и во всех порядках по αZ была развита в работе [33]. В настоящей работе мы пренебрегаем нетривиальными КЭД-вкладами ($\Delta E_{\text{H}}^{(1,2)}$, уравнения (78) и (95) в работе [33]) и рассматриваем только вклады низших порядков ($\Delta E_{\text{L}}^{(1,2)}$, уравнения (77) и (94) в работе [33]). Эта часть содержит все члены порядка $(\alpha Z)^0$ и $(\alpha Z)^2$, тогда как $\Delta E_{\text{H}}^{(1,2)}$ содержат только старшие степени αZ. Вклады низших порядков $\Delta E_{\text{L}}^{(1,2)}$ можно представить с помощью эффективных операторов, которые нужно учитывать в первом порядке теории возмущений. Первый оператор — это эффективный гамильтониан отдачи:

$$H_M = \frac{1}{2M} \sum_{j,k} \left[\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_k - \frac{\alpha Z}{r_j} \left(\boldsymbol{\alpha}_j + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{r}_j)\mathbf{r}_j}{r_j^2} \right) \cdot \mathbf{p}_k \right], \tag{2}$$

который воспроизводит соответствующую поправку к энергии [34]. Поправка к g-фактору, связанная с оператором H_M, вычисляется по формуле второго порядка теории возмущений:

$$\Delta g^{(0)}_{\text{non-magn}} = \frac{2}{\mu_0 \mathcal{H} M_J} \sum_{N \neq A} \frac{\langle A|H_M|N\rangle\langle N|H_{\text{magn}}|A\rangle}{E_A - E_N}. \tag{3}$$

Здесь суммирование идет по полному спектру многоэлектронных состояний $|N\rangle$, построенных как слейтеровские детерминанты из дираковских волновых функций, включая функции отрицательного спектра. Второй оператор [16],

$$H_M^{\text{magn}} = -\mu_0 \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \frac{m}{M} \sum_{j,k} \left\{ [\mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_k] - \frac{\alpha Z}{2 r_k} \left[\mathbf{r}_j \times \left(\boldsymbol{\alpha}_k + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{r}_k)\mathbf{r}_k}{r_k^2} \right) \right] \right\}, \tag{4}$$

возникает только в присутствии магнитного поля, его вклад в g-фактор дается матричным элементом

$$\Delta g^{(0)}_{\text{magn}} = \frac{1}{\mu_0 \mathcal{H} M_J} \langle A|H_M^{\text{magn}}|A\rangle. \tag{5}$$

Первое слагаемое в выражении (4) для H_M^{magn} определяет нерелятивистский предел поправки на отдачу к g-фактору [25]. Тогда как для s-состояний он равен нулю, для p-состояний это слагаемое дает основной вклад для малых и средних Z.

Для того чтобы учесть эффекты межэлектронного взаимодействия, мы рассматриваем поправку первого порядка к $\Delta g^{(0)}_{\text{non-magn}}$ и $\Delta g^{(0)}_{\text{magn}}$ за счет оператора взаимодействия Кулона–Брейта:

$$H_{\text{int}} = \alpha \sum_{j<k} \left[\frac{1}{r_{jk}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \boldsymbol{\alpha}_k}{r_{jk}} + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{r}_{jk})(\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{r}_{jk})}{r_{jk}^3} \right) \right]. \tag{6}$$

Формула для поправки к магнитной части может быть записана следующим образом:

$$\Delta g^{(1)}_{\text{magn}} = \frac{2}{\mu_0 \mathcal{H} M_J} \sum_{N \neq A}^{+} \frac{\langle A|H_M^{\text{magn}}|N\rangle\langle N|H_{\text{int}}|A\rangle}{E_A - E_N}, \tag{7}$$

где суммирование идет только по состояниям положительного спектра, т.е. в детерминанты Слейтера $|N\rangle$ входят одноэлектронные состояния только с положительными энергиями. Поправка первого порядка $\Delta g^{(1)}_{\text{non-magn}}$ к немагнитной части представляется весьма длинным выражением, что связано с перестановками операторов и с корректным учетом возбуждений в отрицательный спектр, которые всегда должны сопровождать оператор H_{magn} (обсуждение этого вопроса можно найти, например, в работах [35,36]).

В дополнение к этому в уравнение Дирака, определяющее энергии E_A, E_N и волновые функции $|A\rangle$, $|N\rangle$, можно добавить эффективный экранирующий потенциал. В этом случае к оператору H_{int} следует добавить соответствующий контрчлен при вычислении $\Delta g^{(1)}_{\text{non-magn}}$ и $\Delta g^{(1)}_{\text{magn}}$. Данный подход позволяет частично учесть поправки высших порядков по $1/Z$. Мы рассматриваем хорошо известные потенциалы Хартри (CH), Кона–Шэма (KS) и локальный потенциал Дирака–Фока (LDF) (см., например, [37–41] и ссылки там).

В работах [16,42] на основе рекурсивной теории возмущений был развит метод для полного учета поправок на межэлектронное взаимодействие в брейтовском приближении во всех порядках по $1/Z$. Он был успешно применен для вычисления этих поправок к эффекту отдачи для g-фактора литиеподобных ионов [16,17]. В дальнейшем мы планируем применить его и к бороподобным ионам.

3. Результаты и обсуждение

Численный расчет ведущих вкладов эффекта отдачи, $\Delta g^{(0)}_{\text{non-magn}}$ и $\Delta g^{(0)}_{\text{magn}}$, и поправок на межэлектронное взаимодействие первого порядка, $\Delta g^{(1)}_{\text{non-magn}}$ и $\Delta g^{(1)}_{\text{magn}}$, выполнен с использованием конечного базисного набора. Спектр решений уравнения Дирака в потенциале ядра или в одном из эффективных потенциалов получен методом дуального кинетического баланса (ДКБ) [43].

Таблица 1. Отдельные части вкладов нулевого и первого порядков по $1/Z$ в поправку на отдачу ядра к g-фактору основного состояния бороподобного аргона в кулоновском (Coulomb) потенциале, потенциалах Хартри (CH), Кона–Шэма (KS) и в локальном потенциале Дирака–Фока (LDF). Коэффициенты A и B/Z определены уравнениями (8) и (9)

Вклад	Часть	Coulomb	CH	KS	LDF
A	magn 1-el	−1.331 888	−1.332 242	−1.332 252	−1.332 253
	magn 2-el	0.551 859	0.600 391	0.608 808	0.607 783
	magn 1-el-r	0.002 888	0.002 508	0.002 496	0.002 495
	magn 2-el-r	−0.002 607	−0.002 190	−0.002 161	−0.002 185
	non-magn	0.003 313	0.002 877	0.002 937	0.002 859
B/Z	magn 1-el	−0.000 347	0.000 021	0.000 031	0.000 031
	magn 2-el	0.103 704	0.067 337	0.057 242	0.059 204
	magn 1-el-r	−0.000 326	0.000 046	0.000 059	0.000 058
	magn 2-el-r	0.000 147	−0.000 286	−0.000 313	−0.000 289
	non-magn	−0.000 424	−0.000 019	−0.000 099	−0.000 003

Из этих одноэлектронных волновых функций построены (как детерминанты Слейтера) многоэлектронные волновые функции $|N\rangle$, включая основное состояние $|A\rangle = |(1s)^2\,(2s)^2\,2p_{1/2}\rangle$. В табл. 1 приведены отдельные вклады в поправку на отдачу ядра к g-фактору бороподобного аргона. Все значения даны в терминах коэффициентов нулевого и первого порядков, $A(\alpha Z)$ и $B(\alpha Z)$, которые определены следующим образом:

$$\Delta g_{\rm rec}^{(0)} = \frac{m}{M} A(\alpha Z), \tag{8}$$

$$\Delta g_{\rm rec}^{(1)} = \frac{m}{M}\,\frac{B(\alpha Z)}{Z}, \tag{9}$$

$$\Delta g_{\rm rec}^{(k)} = \Delta g_{\text{non-mang}}^{(k)} + \Delta g_{\rm magn}^{(k)}. \tag{10}$$

Заметим, однако, что эти коэффициенты представляют разложение по $1/Z$ только в случае кулоновского потенциала. Для экранирующих потенциалов они частично включают высшие порядки по $1/Z$ и должны обозначаться как $A(\alpha Z, Z)$ и $B(\alpha Z, Z)$. Вклады оператора $H_M^{\rm magn}$ разбиты на нерелятивистскую (первое слагаемое в уравнении (4)) и релятивистскую (второе слагаемое в уравнении (4)) части. Кроме того, они разделены на одноэлектронную $(j = k)$ и двухэлектронную $(j \neq k)$ части. Таким образом, всего их получается четыре: „magn 1-el", „magn 2-el", „magn 1-el-r" и „magn 2-el-r". Вклад оператора H_M („non-magn") является полностью релятивистским и приведен в табл. 1 целиком.

Результаты для четных значений Z в диапазоне $Z = 10-20$ приведены в табл. 2 в терминах коэффициентов A и B/Z для кулоновского и трех различных эффективных потенциалов. В качестве окончательного выбираем значение, полученное с локальным потенциалом Дирака–Фока (LDF). Из таблицы видно, что учет поправки первого порядка B/Z уменьшает разброс значений для различных потенциалов в несколько раз. С другой стороны, эффект экранировки в нулевом порядке (разность между значениями коэффициента A для экранирующего и кулоновского потенциалов) воспроизводит лишь около 50% полученной поправки на межэлектронное взаимодействие. Это связано со структурой двухэлектронных „лестничных" вкладов в формуле (7) с двухэлектронной частью оператора $H_M^{\rm magn}$, которые не аппроксимируются соответствующими вкладами с экранирующим потенциалом. Эта ситуация отличается от ситуации, например, с обычной (не связанной с эффектом отдачи) поправкой на межэлектронное взаимодействие к g-фактору, где экранирующий потенциал воспроизводит основную часть всей поправки, и разброс значений для разных потенциалов дает адекватную оценку неучтенных вкладов высших порядков [12]. По-видимому, в данном случае такая оценка вкладов второго и высших порядков по $1/Z$ неприменима. Мы оцениваем их исходя из отношения $\Delta g_{\rm rec}^{(1)}$ к $\Delta g_{\rm rec}^{(0)}$ для кулоновского потенциала: $\Delta g_{\rm rec}^{(2+)} \sim \Delta g_{\rm rec}^{(1)}(\Delta g_{\rm rec}^{(1)}/\Delta g_{\rm rec}^{(0)})$.

Другой источник погрешности — это нетривиальная КЭД-часть поправки на отдачу, которая может содержать вклады порядка $(\alpha Z)^3$ и выше (для s-состояний только $(\alpha Z)^5$ и выше) [33]. Первый расчет этого вклада во всех порядках по αZ был выполнен в работе [44] для состояния $1s$. Для состояния $2s$ расчеты были выполнены в работе [15] для литиеподобного кальция и в работах [16,17] для $Z = 3-92$. Оценка $(\alpha Z)^3 \Delta g_{\rm rec}^{(0)}$ дает значение 0.002 для $Z = 20$ в терминах коэффициентов A и B/Z, что значительно меньше, чем погрешность от вкладов высших порядков по межэлектронному взаимодействию ($\Delta g_{\rm rec}^{(2+)}$). Следует отметить, что в бороподобных ионах даже в нулевом порядке по $1/Z$ присутствует также двухэлектронный вклад, выходящий за рамки приближения Брейта. Он был вычислен в работе [21] для $Z = 18$. Однако ввиду его малости, мы не учитываем его в настоящей работе. Мы также пренебрегаем так называемыми радиационными поправками ($\sim \alpha\, m/M$) и вкладами высших порядков по m/M.

В табл. 3 представлена поправка на отдачу ядра $\Delta g_{\rm rec} = \Delta g_{\rm rec}^{(0)} + \Delta g_{\rm rec}^{(1)}$ к g-фактору нескольких бороподоб-

Таблица 2. Вклады нулевого и первого порядков по $1/Z$ в поправку на отдачу ядра к g-фактору основного состояния легких бороподобных ионов в кулоновском (Coulomb) потенциале, потенциалах Хартри (CH), Кона–Шэма (KS) и в локальном потенциале Дирака–Фока (LDF). Коэффициенты A и B/Z определены уравнениями (8) и (9)

Z	Вклад	Coulomb	CH	KS	LDF
10	A	−0.777 808	−0.672 183	−0.651 781	−0.656 351
	B/Z	0.185 684	0.121 905	0.093 367	0.103 124
	$A+B/Z$	−0.592 125	−0.550 278	−0.558 414	−0.553 227
12	A	−0.777 543	−0.696 297	−0.681 023	−0.683 882
	B/Z	0.154 621	0.101 798	0.081 679	0.087 482
	$A+B/Z$	−0.622 922	−0.594 499	−0.599 344	−0.596 400
14	A	−0.777 227	−0.711 306	−0.699 194	−0.701 166
	B/Z	0.132 414	0.087 011	0.071 696	0.075 548
	$A+B/Z$	−0.644 813	−0.624 295	−0.627 498	−0.625 618
16	A	−0.776 858	−0.721 440	−0.711 447	−0.712 902
	B/Z	0.115 742	0.075 821	0.063 556	0.066 313
	$A+B/Z$	−0.661 116	−0.645 619	−0.647 891	−0.646 589
18	A	−0.776 436	−0.728 656	−0.720 172	−0.721 301
	B/Z	0.102 759	0.067 099	0.056 919	0.059 002
	$A+B/Z$	−0.673 677	−0.661 557	−0.663 253	−0.662 299
20	A	−0.775 957	−0.733 979	−0.726 622	−0.727 531
	B/Z	0.092 359	0.060 121	0.051 451	0.053 088
	$A+B/Z$	−0.683 598	−0.673 858	−0.675 171	−0.674 443

Таблица 3. Поправка на отдачу ядра к g-фактору основного состояния легких бороподобных ионов, $\Delta g_{\rm rec} = \Delta g^{(0)}_{\rm rec} + \Delta g^{(1)}_{\rm rec}$. Погрешность коэффициента $A+B/Z$ (A и B/Z определены уравнениями (8) и (9)) связана с неучтенными высшими порядками по $1/Z$

Ион	$(m/M)\cdot 10^6$	$A+B/Z$	$\Delta g_{\rm rec}\cdot 10^6$
${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}^{5+}$	27.447	−0.553 (44)	−15.2 (12)
${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}^{7+}$	22.878	−0.596 (31)	−13.64 (70)
${}^{28}_{14}\mathrm{Si}^{9+}$	19.614	−0.626 (23)	−12.27 (44)
${}^{32}_{16}\mathrm{S}^{11+}$	17.163	−0.647 (17)	−11.10 (30)
${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}^{13+}$	13.731	−0.662 (14)	−9.09 (19)
${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}^{15+}$	13.731	−0.674 (11)	−9.26 (15)
${}^{48}_{20}\mathrm{Ca}^{15+}$	11.443	−0.674 (11)	−7.72 (13)

ных ионов в диапазоне $Z = 10-20$. Здесь использованы значения коэффициентов A и B, полученные для потенциала LDF, оценка погрешности описана выше. Результаты для бороподобного аргона незначительно отличаются от данных из работы [21] из-за релятивистских поправок к вкладу $\Delta g^{(1)}_{\rm rec}$.

4. Заключение

Эффект отдачи ядра для g-фактора легких бороподобных ионов вычислен в первом порядке по отношению масс m/M и в нулевом и в первом порядках по $1/Z$. Ведущие релятивистские поправки порядка $(\alpha Z)^2$ учтены с помощью эффективных релятивистских операторов, полученных в работах [33,34]. Поправка на межэлектронное взаимодействие в первом порядке по $1/Z$ вычислена по теории возмущений. Вклады высших порядков по $1/Z$, которые определяют полную теоретическую погрешность эффекта отдачи, частично учтены с помощью эффективного экранирующего потенциала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-12-01097).

Список литературы

[1] *Häffner H., Beier T., Hermanspahn N., Kluge H.-J., Quint W., Stahl S., Verdú J., Werth G.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 5308.

[2] *Verdú J., Djekić S., Stahl S., Valenzuela T., Vogel M., Werth G., Beier T., Kluge H.-J., Quint W.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 093002.

[3] *Sturm S., Wagner A., Schabinger B., Zatorski J., Harman Z., Quint W., Werth G., Keitel C. H., Blaum K.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. P. 023002.

[4] *Sturm S., Wagner A., Kretzschmar M., Quint W., Werth G., Blaum K.* // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. P. 030501(R).

[5] *Shabaev V.M., Glazov D.A., Plunien G., Volotka A.V.* // J. Phys. Chem. Ref. Data. 2015. V. 44. P. 031205.

[6] *Sturm S., Köhler F., Zatorski J., Wagner A., Harman Z., Werth G., Quint W., Keitel C.H., Blaum K.* // Nature. 2014. V. 506. P. 467.

[7] *Zatorski J., Sikora B., Karshenboim S.G., Sturm S., Köhler-Langes F., Blaum K., Keitel C.H., Harman Z.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 96. P. 012502.
[8] *Shabaev V.M., Glazov D.A., Oreshkina N.S., Volotka A.V., Plunien G., Kluge H.-J., Quint W.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 253002.
[9] *Volotka A.V., Plunien G.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 113. P. 023002.
[10] *Yerokhin V.A., Berseneva E., Harman Z., Tupitsyn I.I., Keitel C.H.* // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 116. P. 100801.
[11] *Wagner A., Sturm S., Köhler F., Glazov D.A., Volotka A.V., Plunien G., Quint W., Werth G., Shabaev V.M., Blaum K.* // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. P. 033003.
[12] *Volotka A.V., Glazov D.A., Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Plunien G.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. P. 253004.
[13] *Yerokhin V.A., Harman Z.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 95. P. 060501.
[14] *Yerokhin V.A., Pachucki K., Puchalski M., Harman Z., Keitel C.H.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 95. P. 062511.
[15] *Köhler F., Blaum K., Block M., Chenmarev S., Eliseev S., Glazov D.A., Goncharov M., Hou J., Kracke A., Nesterenko D.A., Novikov Yu.N., Quint W., Minaya Ramirez E., Shabaev V.M., Sturm S., Volotka A.V., Werth G.* // Nature Communications. 2016. V. 7. P. 10246.
[16] *Shabaev V.M., Glazov D.A., Malyshev A.V., Tupitsyn I.I.* // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. P. 263001.
[17] *Малышев А.В., Шабаев В.М., Глазов Д.А., Тупицын И.И.* // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 106. С. 731.
[18] *Soria Orts R., Crespo López-Urrutia J.R., Bruhns H., González Martínez A.J., Harman Z., Jentschura U.D., Keitel C.H., Lapierre A., Tawara H., Tupitsyn I.I., Ullrich J., Volotka A.V.* // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. P. 052501.
[19] *von Lindenfels D., Wiesel M., Glazov D.A., Volotka A.V., Sokolov M.M., Shabaev V.M., Plunien G., Quint W., Birkl G., Martin A., Vogel M.* // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. P. 023412.
[20] *Glazov D.A., Volotka A.V., Schepetnov A.A., Sokolov M.M., Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Plunien G.* // Phys. Scr. 2013. V. T156. P. 014014.
[21] *Shchepetnov A.A., Glazov D.A., Volotka A.V., Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Plunien G.* // J. Phys. Conf. Ser. 2015. V. 583. P. 012001.
[22] *Marques J.P., Indelicato P., Parente F., Sampaio J. M., Santos J. P.* // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 042504.
[23] *Agababaev V.A., Volchkova A.M., Varentsova A.S., Glazov D.A., Volotka A.V., Shabaev V.M., Plunien G.* // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B. 2017. V. 408. P. 70.
[24] *Varentsova A.S., Agababaev V.A., Volchkova A.M., Glazov D.A., Volotka A.V., Shabaev V.M., Plunien G.* // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B. 2017. V. 408. P. 80.
[25] *Phillips M.* // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 1803.
[26] *Faustov R.N.* // Nuovo Cimento A. 1970. V. 69. P. 37; Phys. Lett. B. 1970. V. 33. P. 422.
[27] *Grotch H.* // Phys. Rev. A. 1970. V. 2. P. 1605.
[28] *Grotch H., Hegstrom R.A.* // Phys. Rev. A. 1971. V. 4. P. 59.
[29] *Close F.E., Osborn H.* // Phys. Lett. B. 1971. V. 34. P. 400.
[30] *Hegstrom R.A.* // Phys. Rev. A. 1973. V. 7. P. 451.
[31] *Pachucki K.* // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 012504.
[32] *Eides M.I., Martin T.J.S.* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 100402.
[33] *Shabaev V.M.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 052104.
[34] *Shabaev V.M.* // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 59.
[35] *Glazov D.A., Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Volotka A.V., Yerokhin V.A., Plunien G., Soff G.* // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 062104.
[36] *Tupitsyn I.I., Volotka A.V., Glazov D.A., Shabaev V.M., Plunien G., Crespo López-Urrutia J.R., Lapierre A., Ullrich J.* // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 062503.
[37] *Sapirstein J., Cheng K.T.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 042501.
[38] *Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Pachucki K., Plunien G., Yerokhin V.A.* // Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 062105.
[39] *Glazov D.A., Volotka A.V., Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Plunien G.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 357. P. 330.
[40] *Sapirstein J., Cheng K.T.* // Phys. Rev. A. 2011. V. 83. P. 012504.
[41] *Malyshev A.V., Glazov D.A., Volotka A.V., Tupitsyn I.I., Shabaev V.M., Plunien G., Stöhlker Th.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 96. P. 022512.
[42] *Glazov D.A., Malyshev A.V., Volotka A.V., Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Plunien G.* // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B. 2017. V. 408. P. 46.
[43] *Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Yerokhin V.A., Plunien G., Soff G.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 130405.
[44] *Shabaev V.M., Yerokhin V.A.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 091801.