04

Усиление альфвеновских волн в результате нелинейного взаимодействия с быстрой магнитоакустической волной в акустически активной проводящей среде

© *С.А. Белов, Н.Е. Молевич, Д.И. Завершинский*

Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия
Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, Россия
E-mail: mr_beloff@mail.ru

Поступило в Редакцию 6 июля 2017г.

Показано, что в изоэнтропически неустойчивой тепловыделяющей плазме возможно биэкспоненциальное усиление альфвеновских волн. Усиление происходит благодаря параметрической перекачке энергии к альфвеновским волнам от быстрых магнитоакустических волн, направленных ортогонально альфвеновским волнам.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.05.45706.16954

Перенос энергии из нижних слоев солнечной атмосферы альфвеновскими волнами давно рассматривается как один из возможных механизмов нагрева солнечной короны. Причиной этого является то, что альфвеновские волны не образуют резкого ударного фронта из-за своей несжимаемости, в результате чего могут распространяться на большие расстояния без существенного затухания. Согласно волновой модели нагрева солнечной короны, мощные альфвеновские волны в короне параметрически распадаются на альфвеновские волны меньшей частоты и магнитоакустические (МА) волны, которые быстро диссипируют, приводя таким образом к ее нагреву [1].

Альфвеновские волны с энергией, достаточной для разогрева спокойной солнечной короны и ускорения солнечного ветра, были зафиксированы сравнительно недавно [2]. Природа возникновения подобных альфвеновских волн в нижних слоях атмосферы до сих пор не выяснена полностью. Одним из возможных механизмов возникновения альфвеновских волн большой амплитуды является параметрическая перекачка энергии от сильных МА-волн к слабым альфвеновским. Пример такого взаимодействия был рассмотрен в работах [3,4], где показано, что в изоэнтропически неустойчивой тепловыделяющей плазме в областях с доминирующим газодинамическим давлением возможно эффективное усиление альфвеновских волн в результате параметрического распада МА-волн, распространяющихся вдоль магнитного поля. Другим примером подобного параметрического взаимодействия является взаимодействие между быстрыми МА-волнами, ориентированными ортогонально направлению магнитного поля, и альфвеновской волной, распространяющейся вдоль магнитного поля [5,6]. Механизм данного взаимодействия, названного в [5] свинг-волновым взаимодействием (swing wave-wave interaction), заключается в том, что МА-волна влияет на компоненту магнитного поля, вдоль которой распространяется альфвеновская волна, тем самым периодически воздействуя на скорость распространения альфвеновской волны.

В настоящей работе рассмотрено влияние тепловыделения и конечной электрической проводимости на развитие свинг-волнового взаимодействия.

Рассмотрим полностью ионизированную плазму, описываемую системой магнитогидродинамических уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta B, \ \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla P - \frac{1}{4\pi}[\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\mathbf{B}],$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0,$$

$$C_\infty\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T\right) - \frac{k_\mathrm{B}T}{m}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\rho\right) = -\rho\mathfrak{J}(\rho, T) + \frac{j^2}{\sigma},$$

$$P = \frac{k_\mathrm{B}T\rho}{m}, \qquad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B}. \tag{1}$$

В (1) ρ, T, P — плотность, температура и давление в плазменной среде соответственно, $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ — векторы скорости и магнитного поля соответственно, k_{B} — постоянная Больцмана, C_{V_∞} — высокочастотная теплоемкость при постоянном объеме, m — средняя масса молекулы, $\mathbf{j}$ — вектор плотности электрического тока, c — скорость света в вакууме, σ — коэффициент электрической проводимости, $\mathfrak{J}(\rho, T) = L(\rho, T) - Q(\rho, T)$ — обобщенная функция тепловых потерь, широко применяемая при исследовании тепловых неустойчивостей начиная с пионерских работ [7,8]. Эта функция феноменологически учитывает как мощность охлаждения в среде в расчете на единицу объема $L(\rho, T)$ (например, излучательной природы), так и мощность нагрева среды $Q(\rho, T)$ в результате различных экзотермических процессов. В стационарных условиях считается, что отток энергии уравновешен притоком тепла, т. е. $\mathfrak{J}(\rho_0, T_0) = 0$. Известно, что в тепловыделяющих средах магнитоакустические и акустические волны могут стать неустойчивыми и усиливаться. Альфвеновские волны остаются при этом устойчивыми [9–15]. Условием усиления МА-волн в идеальной тепловыделяющей плазме является условие изоэнтропической (акустической) неустойчивости

$$\frac{\mathfrak{J}_{0p}}{(\gamma_\infty - 1)} + \mathfrak{J}_{0T} < 0, \quad \mathfrak{J}_{0T} = \frac{T_0}{Q_0}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial T}\right)_{\rho=\rho_0, T=T_0},$$

$$\mathfrak{J}_{0\rho} = \frac{\rho_0}{Q_0}\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0, T=T_0}. \tag{2}$$

Анализируя систему (1), будем считать, что невозмущенное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ направлено вдоль оси z, а исследуемая среда ограничена вдоль оси x (l — размер среды в направлении оси x). Зависимостями возмущений параметров среды и магнитного поля от координаты y пренебрежем ($\partial/\partial y = 0$). В этом случае в линейном приближении магнитоакустические и альфвеновские волны можно описывать независимо. Для быстрой МА-волны, ортогональной вектору $\mathbf{B}_0$, после линеаризации (1) относительно возмущений ($\rho = \rho_0 + \rho'$, $B_z = B_0 + b_z, \ldots$, где

$\rho'/\rho_0 \sim b_z/B_0 \sim \dots \sim \theta \ll 1)$ получаем

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = -B_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}, \quad \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P' + \frac{B_0 b_z}{4\pi}\right),$$
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x},$$
$$C_{V\infty}\rho_0 \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{k_B T_0}{m} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Im_{0\rho}\rho' + \rho_0 \Im_{0T} T' = 0, \tag{3}$$
$$T' = \frac{m}{k_B \rho_0} P' - \frac{m P_0}{k_B \rho_0^2} \rho'.$$

Полученную систему можно свести к одному уравнению

$$C_{V\infty}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(c_\infty^2 + c_a^2\right)\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}\right) - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(\frac{\partial^2 b_z}{\partial^2} - c_\infty^2 \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}\right)\right]$$
$$+ \frac{C_{V0}}{\tau_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + c_a^2\right)\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}\right) - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 b_z}{\partial r^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}\right)\right] = 0, \tag{4}$$

которое в низкочастотном $(\omega\tau_0 \ll 1)$ и высокочастотном $(\omega\tau_0 \gg 1)$ пределах сводится к более простым по форме уравнениям соответственно

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + c_a^2\right)\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} - \left(\frac{c_a^2 \nu_m}{(c_0^2 + c_a^2)} + \frac{\xi_0}{\rho_0}\right)\frac{\partial^3 b_z}{\partial t \partial x^2} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2} - \left(c_\infty^2 + c_a^2\right)\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} - \frac{c_a^2 \nu_m}{(c_\infty^2 + c_a^2)} \frac{\partial^3 b_z}{\partial x^2 \partial t}$$
$$+ \frac{\xi_0 C_{V0}^2}{\rho_0 (c_a^2 + c_\infty^2) C_{V\infty}^2 \tau_0^2} \frac{\partial b_z}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

где $\tau_0 = k_B T_0/m Q_0$ — характерное время нагрева, $C_{P\infty} = C_{V\infty} + k_B/m$, $C_{P0} = k_B(\Im_{0T} - \Im_{0\rho})/m$ — соответственно высокочастотная и низкочастотная теплоемкости при постоянном давлении, $C_{V0} = k_B \Im_{0T}/m$ — низкочастотная теплоемкость при постоянном объеме [9,11], $c_\infty^2 = C_{P\infty} k_B T_0 / m C_{V\infty}$ и $c_0^2 = C_{P0} k_B T_0 / m C_{V0}$ — квадраты высокочастотной и низкочастотной скоростей звука соответственно, $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ — магнитная вязкость, $\xi_0 = \tau_0 \rho_0 C_{V\infty}(c_\infty^2 - c_0^2)/C_{V0}$ —

низкочастотный коэффициент второй вязкости, $c_a^2 = B_0^2/4\pi\rho_0$ — квадрат альфвеновской скорости. При выполнении условия изоэнтропической неустойчивости (2) коэффициент второй вязкости становится отрицательным [11,13–15].

Уравнения (5) и (6) имеют аналитические решения в виде слабо диссипирующей стоячей волны

$$\begin{aligned} v_x' &= \varepsilon c_{f0,\infty}\sin(\omega_n t)\sin(k_n x)\exp(-\alpha_{0,\infty}t),\\ \rho' &= \varepsilon\rho_0\cos(\omega_n t)\cos(k_n x)\exp(-\alpha_{0,\infty}t),\\ b_z &= \varepsilon B_0\cos(\omega_n t)\cos(k_n x)\exp(-\alpha_{0,\infty}t). \end{aligned} \tag{7}$$

В (7) $c_{f0,\infty} = \sqrt{c_a^2 + c_{0,\infty}^2}$ — фазовая скорость быстрой МА-волны, $k_n = \pi n/l$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\omega_n = c_{f0,\infty}k_n$ — собственные числа и собственные частоты плазменного слоя, $\alpha_0 = \xi_0 k_n^2/2\rho_0 + c_a^2\nu_m k_n^2/2(c_0^2 + c_a^2)$ и $\alpha_\infty = \xi_0 C_{V0}^2/2\rho_0(c_a^2 + c_\infty^2)C_{V\infty}^2\tau_0^2 + c_a^2\nu_m k_n^2/2(c_\infty^2 + c_a^2)$ — низкочастотный и высокочастотный декременты затухания (или нарастания во времени при выполнении условий (2)) соответственно [14], $\varepsilon \sim \theta$ — относительная амплитуда возмущений в МА-волне. Решение (7) получено в предположении слабого усиления за период, т. е. $|\alpha_{0,\infty}/\omega_n| \sim \theta \ll 1$ (в дальнейшем опустим нижний индекс при α).

Рассмотрим теперь нелинейное влияние рассмотренной быстрой магнитоакустической волны, возбуждаемой каким-то внешним воздействием на плазменный слой, на альфвеновскую волну, распространяющуюся вдоль магнитного поля (ось z). Согласно методике, предложенной в [5,6], преобразуем исходную систему (1) к следующим уравнениям, учитывающим как нелинейное взаимодействие альфвеновских волн с быстрыми МА-волнами, так и их слабую диссипацию, обусловленную конечной проводимостью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_y}{\partial t} &= \big(B_0 + b_z\big)\frac{\partial v_y'}{\partial z} - b_y\,\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \nu_m\frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2},\\ \big(\rho_0 + \rho'\big)\frac{\partial v_y'}{\partial t} &= \frac{(b_z + B_0)}{4\pi}\,\frac{\partial b_y}{\partial z}. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) сводятся к уравнению, описывающему эволюцию возмущенной y-компоненты магнитного поля в альфвеновской волне:

$$\frac{\partial^2 b_y}{dt^2} - \frac{2\dot{b}_z}{B_0}\frac{\partial b_y}{\partial t} - \frac{\ddot{b}_z}{B_0} b_y - \left[\frac{(\rho_0 - \rho')B_0^2 + 2B_0\rho_0 b_z}{4\pi\rho_0^2}\right]$$

$$\times \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} - \nu_m \frac{\partial^3 b_y}{\partial z^2 \partial t} = 0, \tag{9}$$

где $\dot{b}_z$, $\ddot{b}_z$ — первая и вторая производные по времени от возмущенного поля в быстрой МА-волне. Введение в (9) замены переменных $b_y = h_y(z,t)\exp(b_z/B_0)$ и отбрасывание слагаемых высших параметров малости приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 h_y(z,t)}{\partial t^2} - c_a^2\left(1 + \frac{b_z}{B_0}\right)\frac{\partial^2 h_y(z,t)}{\partial z^2} - \nu_m \frac{\partial^3 h_y(z,t)}{\partial z^2 \partial t} = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (10) видно, что влияние быстрой МА-волны на альфвеновскую волну состоит в слабом изменении скорости последней. Применение преобразования Фурье $h_y(z,t) = \int \tilde{h}_y(k_z,t)\exp(ik_z z)dk_z$ к (10) позволяет получить дифференциальное уравнение, описывающее влияние МА-волны на амплитуду альфвеновской волны:

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}_y(k_z,t)}{\partial t^2} + \nu_m k_z^2 \frac{\partial \tilde{h}_y(k_z,t)}{\partial t} + \left[\omega_a^2 + \delta\exp(-\alpha t)\cos(\omega_n t)\right]\tilde{h}_y(k_z,t). \tag{11}$$

В (11) использовано обозначение $\delta = \varepsilon c_a^2 k_z^2 \cos(k_n x)$, где координата x играет роль параметра. Полученное уравнение без учета конечной проводимости и тепловыделения в плазме сводится к уравнению Матье, используемому при анализе параметрического взаимодействия быстрых МА-волн и альфвеновской волны в [5].

С помощью метода многих масштабов, основанного на представлении времени и искомой функции в виде рядов $t = t_0 + \theta t_1 + \theta^2 t_2 \ldots$ и $\tilde{h}_y = h_0 + \theta\tilde{h}_1 + \theta^2\tilde{h}_2 \ldots$, получим в условиях резонанса $c_a k_z = \omega_a = \omega_n/2$ следующее решение:

$$\tilde{h}_y \approx \tilde{h}_{y0}\exp\left(\frac{-\nu_m k_z^2 t}{2}\right)\left[\cosh\big(\Psi(t)\big)\cos(\omega_a t) - \sinh\big(\Psi(t)\big)\sin(\omega_a t)\right],$$

$$\Psi(t) = \frac{\delta\big(1 - \exp(-\alpha t)\big)}{2\alpha\omega_n}. \tag{12}$$

Решение (12) при ν_m, $\alpha = 0$ совпадает с полученным в [5]. Из (12) следует, что в отсутствие тепловыделения и проводимости происходит экспоненциальный рост амплитуды альфвеновской волны в результате взаимодействия с быстрой волной с параметрическим инкрементом $|\delta|/2\omega_n$. Учет конечной проводимости приводит к пороговому условию возникновения параметрического усиления $|\delta| > \omega_n \nu_m k_z^2$ и ограничению на время существования параметрического усиления $t < t_{ch}$, где $t_{ch} = \left[\phi + W\left(-\phi \exp(-\phi)\right)\right]/\alpha$, W — так называемая функция Ламберта, $\phi = |\delta|/\omega_n \nu_m k_z^2$.

В случае изоэнтропически неустойчивой тепловыделяющей среды (2), в которой инкремент $\alpha < 0$, при $t > t_{ch}$ происходит беспороговое параметрическое усиление альфвеновской волны. В этом случае, согласно виду функции $\Psi(t)$, параметрический инкремент сам растет экспоненциально со временем, в результате чего амплитуда альфвеновской волны растет биэкспоненциально из-за параметрического взаимодействия с неустойчивой быстрой МА-волной. Подобные результаты для коллинеарной геометрии взаимодействия магнитогазодинамических волн были получены ранее в [3,4].

Таким образом, учет конечной проводимости приводит к появлению порогового условия и ограничению времени существования предсказанного в [5] параметрического усиления альфвеновских волн. Учет тепловыделения в среде приводит либо к дополнительному затуханию быстрых МА-волн и уменьшению времени существования параметрического усиления, либо в условиях изоэнтропической неустойчивости, наоборот, к их усилению, сопровождающемуся в результате параметрического резонанса биэкспоненциальным ростом амплитуды альфвеновской волны. Ограничением этого роста будет не учитываемая в настоящем слабонелинейном рассмотрении потеря энергии МА-волны в результате параметрической перекачки энергии в альфвеновскую волну.

Работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы повышения конкурентоспособности СГАУ на 2013–2020 гг. и государственного задания вузам и научным организациям в сфере научной деятельности (проект № 3.1158.2017/ПЧ) и РФФИ (грант 17-42-630224 р_а).

Список литературы

[1] *Wentzel D.G.* // Solar Physics. 1974. V. 39. N 1. P. 129–140.
[2] *McIntosh S.W., de Pontieu B., Carlsson M., Hansteen V., Boerner P., Goossens M.* // Nature. 2011. V. 475. N 7359. P. 477–480.
[3] *Завершинский Д.И., Молевич Н.Е.* // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. В. 16. С. 50–57.
[4] *Zavershinsky D.I., Molevich N.E.* // Astrophys. Space Sci. 2015. V. 358. N 1. P. 22 (1–13).
[5] *Zaqarashvili T.V., Roberts B.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. N 2. P. 026401.
[6] *Shergelashvili B.M., Zaqarashvili T.V., Poedtsl S., Roberts B.* // Astron. Astrophys. 2005. V. 429. N 3. P. 767–777.
[7] *Field G.B.* // Astrophys. J. 1965. V. 142. P. 531–567.
[8] *Parker E.N.* // Astrophys. J. 1953. V. 117. P 431–436.
[9] *Heyvaerts J.* // Astron. Astrophys. 1974. V. 37. N 1. P. 65–73.
[10] *Nakariakov V. M., Mendoza-Briceño C. A., Ibáñez S., Miguel H.* // Astrophys. J. 2000. V. 528. N 2. P. 767–775.
[11] *Завершинский Д.И., Молевич Н.Е.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 15. С. 18–25.
[12] *Chin R., Verwichte E., Rowlands G., Nakariakov V.M.* // Phys. Plasmas. 2010. V. 17. N 3. P. 032107 (1–12).
[13] *Molevich N.E., Zavershinsky D.I., Galimov R.N., Makaryan V.G.* // Astrophys. Space Sci. 2011. V. 334. N 1. P. 35–44.
[14] *Molevich N.E., Zavershinskiy D.I., Ryashchikov D.S.* // Magnetohydrodynamics. 2006. V. 52. N 1. P. 191–198.
[15] *Molevich N.E., Ryashchikov D.S., Zavershinskiy D.I.* // Magnetohydrodynamics. 2006. V. 52. N 1. P. 199–208.