

11

## Установление хаотического синхронного отклика при наличии фазового фильтра в канале связи

© Л.В. Кузьмин

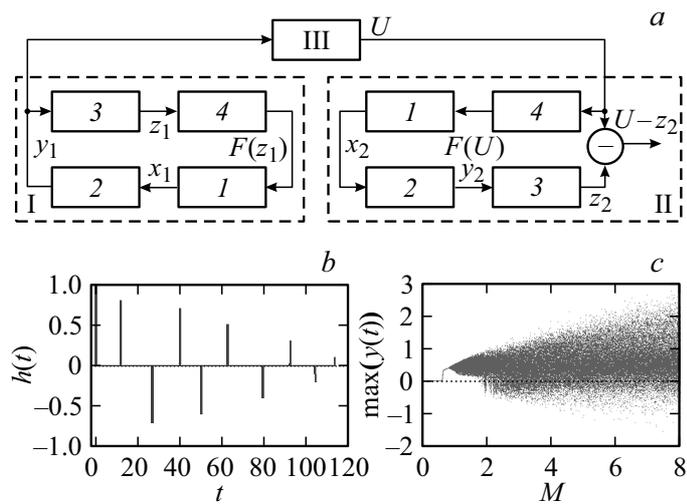
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
Москва, Россия  
E-mail: lvkuzmin@gmail.com

Поступило в Редакцию 5 сентября 2017 г.

Решается задача установления хаотического синхронного отклика между двумя хаотическими автоколебательными системами в условиях фильтрации фазовым фильтром хаотического сигнала, передаваемого от ведущей системы к ведомой. Характеристики фазового фильтра эквивалентны характеристикам фильтра канала передачи информации с многолучевым распространением.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.04.45643.17027

Хаотическая синхронизация динамических систем, связанных между собой через канал, в котором осуществляется фильтрация хаотического сигнала, передаваемого от ведущей динамической системы к ведомой, представляет собой базовую модель, при помощи которой апробируются различные методы передачи информации, основанные на хаотической синхронизации. В настоящее время существует ряд подходов, нацеленных на решение проблемы установления хаотической синхронизации при наличии фильтрации сигнала [1–5]. При этом, как правило, фильтрация хаотического сигнала осуществляется фильтром первого или второго порядков, что не всегда адекватно отражает характеристики реального канала передачи информации. Имеется ряд работ (например, [6–8]), в которых влияние фильтрации на хаотическую синхронизацию рассматривается в контексте беспроводного канала передачи информации, что существенно более близко к возможным практическим приложениям хаотической синхронизации. В [6–8] для достижения синхронизации применяются фильтры, обратные фильтру канала, которые позволяют скомпенсировать искажения сигнала на входе ведомой системы, вызванные наложением на него



**Рис. 1.** Схема модели синхронизации динамических систем при наличии фильтра в канале: *a*) I — ведущая система, II — ведомая система, III — фильтр канала, 1, 2 — линейные подсистемы (фильтры первого и второго порядков соответственно), 3 — фазовый фильтр, эквивалентный фильтру канала III, 4 — нелинейная подсистема; *b*) реализация функции-отклика фазового фильтра 3 и фильтра канала III; *c*) бифуркационная диаграмма по параметру  $M$  ведущей системы I.

нескольких реплик этого же сигнала (многолучевое распространение).

Фильтрация хаотического сигнала фазовым фильтром эквивалентна прохождению сигнала через многолучевой канал, который пропускает все частоты сигнала с равным усилением, однако изменяет фазу сигнала (вносит задержку в его распространение). В этих условиях для достижения хаотической синхронизации необходим метод, позволяющий установить хаотическую синхронизацию между ведущей и ведомой системами независимо от количества реплик сигнала в канале и величины их задержек, т.е. независимо от размерности фильтра канала и его характеристик.

В настоящей работе анализируется метод устранения влияния фазовой фильтрации на хаотическую синхронизацию на основе идеи,

изложенной в [1], которая заключается в том, что в ведущую (синхронизирующую) и в ведомую (синхронизируемую) динамические системы вводится фазовый фильтр, участвующий в динамике обеих систем (рис. 1). При этом динамические системы имеют кольцевую структуру [9].

Ведущая система состоит из нелинейной подсистемы 4 (безынерционное нелинейное преобразование  $F$ ) и линейных подсистем: фильтров нижних частот первого и второго порядков (1 и 2 соответственно) и фильтра 3, который эквивалентен фильтру канала III. Ведомая система состоит из тех же элементов. Если подсистему 3 и фильтр канала III исключить из модели, то предлагаемая схема сводится к традиционной схеме получения хаотического синхронного отклика [1,4].

При наличии хаотического синхронного отклика сигнал  $z_2$  на выходе ведомой системы тождествен сигналу  $z_1$  ведущей системы. Действительно, сигнал на выходе ведомой системы  $z_2$  представляет собой копию сигнала  $y_1$ , пропущенного через фильтр 3.

Пусть переходная характеристика фазового фильтра 3 описывается функцией

$$h(t) = \sum_{k=0}^N a_k \delta(t - \tau_k), \quad (1)$$

где  $h(t)$  — импульсный отклик фазового фильтра на  $\delta$ -импульс,  $a_k$  — амплитуда  $k$ -й реплики,  $\tau_k$  — задержка в передаче через фильтр  $k$ -й реплики по отношению к первой реплике входного сигнала, для которой по определению  $\tau_0 = 0$ . Физически это эквивалентно формированию на выходе фильтра суммы реплик сигнала, имеющих различные задержки. Реализация сигнала  $s(t)$ , прошедшего фильтр с характеристикой (1), описывается выражением

$$\Phi(s(t)) = \int_{-\infty}^t h(\tau) s(t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

т. е. сверткой функции-отклика (1) с сигналом  $s(t)$  на входе фильтра.

В итоге модель, изображенная на рис. 1, описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} T\dot{x}_1 + x_1 &= F(z_1(t)), \\ \ddot{y}_1 + \alpha_1\dot{y}_1 + y_1 &= x_1 \\ z_1(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau)y_1(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (3a)$$

$$U(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)y_1(t-\tau)d\tau, \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} T\dot{x}_2 + x_2 &= F(U(t)), \\ \ddot{y}_2 + \alpha_1\dot{y}_2 + y_2 &= x_2, \\ z_2(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau)y_2(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3c)$$

Первые два уравнения в (3a) описывают фильтры первого и второго порядков соответственно, третье уравнение (3a) — фильтр канала. Таким образом, ведущая система на рис. 1, *a* — это колебательная система с фильтром нижних частот первого порядка, фильтром нижних частот второго порядка и фазовым фильтром  $N$ -го порядка, который реализует  $N$  различных по величине задержек по отношению к сигналу на его входе. Ведомая система (3c) является пассивной, поэтому есть основания полагать, что в системе (3) в целом удастся получить устойчивый хаотический синхронный отклик при наличии фазовой фильтрации. Для доказательства этой возможности было проведено численное моделирование процесса синхронизации. Численное моделирование проводилось в рамках дискретного представления сигналов и уравнений (3).

Дискретное представление исключает необходимость трансформации дискретной функции-отклика фазового фильтра в динамическую систему с непрерывным временем, которая при такой трансформации будет иметь высокую размерность с числом фазовых переменных,

равным числу дискретных отсчетов, амплитудами которых аппроксимируется функция-отклик фильтра канала при численном моделировании.

При переходе к дискретному представлению функции-отклика (1) задержки  $\tau_k$  в приходе реплик сигнала, принимающие непрерывный спектр значений в реальном канале, в дискретном представлении будут определяться как  $\tau_k = n_i \Delta t$ , где  $n_i$  — номер отсчета, на котором располагается  $i$ -я реплика относительно первой реплики (для первой реплики  $n_0 = 0$ ),  $\Delta t = 1/f_s$  — шаг по времени дискретизации,  $f_s$  — частота дискретизации. Таким образом, функция-отклик канала (1) примет вид

$$h(t_k) = \sum_{k=0}^N a_k \delta(t_k - n_k \Delta t). \quad (4)$$

Преобразование (2) в дискретной форме с функцией-откликом (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(s(t_k)) = & a_0 s(t_k) + a_1 s(t_k - n_1 \Delta t) + a_2 s(t_k - n_2 \Delta t) \\ & + \dots + a_N s(t_k - n_N \Delta t), \end{aligned} \quad (5)$$

т. е. по сути представляет собой нерекурсивный цифровой фильтр  $N$ -го порядка с импульсной характеристикой (4).

Дискретные (цифровые) аналоги фильтров первого и второго порядков, входящие в уравнение (3), также могут быть представлены в виде рекуррентных соотношений [10] путем замены оператора производной  $p = d/dt$  оператором задержки на один отсчет  $q^{-1} = s(t_k - \Delta t)$  при помощи билинейного преобразования [10]

$$p = \gamma \frac{1 - q^{-1}}{1 + q^{-1}}, \quad (6)$$

где  $\gamma = 2/\Delta t$ .

После подстановки (6) в (3а) первое уравнение (3а) примет вид

$$x_1(t_k) = b_0^{(1)} F(z_1(t_k)) + b_1^{(1)} F(z_1(t_k - \Delta t)) - a_1^{(1)} x_1(t_k - \Delta t). \quad (7a)$$

Второе уравнение (3а) — фильтр второго порядка — примет вид

$$\begin{aligned} y_1(t_k) = & b_0^{(2)} x_1(t_k) + b_1^{(2)} x_1(t_k - \Delta t) + b_2^{(2)} x_1(t_k - 2\Delta t) - \dots \\ & \dots - a_1^{(2)} y_1(t_k - \Delta t) - a_2^{(2)} y_1(t_k - 2\Delta t). \end{aligned} \quad (7b)$$

Коэффициенты в (7a) и (7b) определяются как  $b_0^{(1)} = b_1^{(1)} = 1/(1 + \gamma T)$ ,  $a^{(1)} = (1 - \gamma t)b_0^{(1)}$ ,  $b_0^{(2)} = b_2^{(2)} = 1/(\gamma^2 + \alpha_1\gamma + 1)$ ,  $b_1^{(2)} = 2b_0^{(2)}$ ,  $a_1^{(2)} = 2(1 - \gamma^2)b_0^{(2)}$ ,  $a_2^{(2)} = (1 - \alpha_1\gamma + \gamma^2)b_0^{(2)}$ .

Аналогично осуществляется преобразование к дискретному представлению в уравнениях (3c).

В итоге после перехода к дискретному представлению при помощи преобразования (6) система уравнений (3) примет разностный вид

$$\begin{aligned} x_1(t_k) &= b_0^{(1)}F(z_1(t_k)) + b_1^{(1)}F(z_1(t_k - \Delta t)) - a_1^{(1)}x_1(t_k - \Delta t), \\ y_1(t_k) &= b_0^{(2)}x_1(t_k) + b_1^{(2)}x_1(t_k - \Delta t) + b_2^{(2)}x_1(t_k - 2\Delta t) - \dots \\ &\quad \dots - a_1^{(2)}y_1(t_k - \Delta t) + a_2^{(2)}y_1(t_k - 2\Delta t), \\ z_1(t_k) &= a_0y_1(t_k) + a_1y_1(t_k - n_1\Delta t) + a_2y_1(t_k - n_2\Delta t) + \dots \\ &\quad + a_Ny_1(t_k - n_N\Delta t), \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} U(t_k) &= a_0y_1(t_k) + a_1y_1(t_k - n_1\Delta t) + a_2y_1(t_k - n_2\Delta t) + \dots \\ &\quad + a_Ny_1(t_k - n_N\Delta t), \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} x_2(t_k) &= b_0^{(1)}F(U(t_k)) + b_1^{(1)}F(U(t_k - \Delta t)) - a_1^{(1)}x_1(t_k - \Delta t), \\ y_2(t_k) &= b_0^{(2)}x_2(t_k) + b_1^{(2)}x_2(t_k - \Delta t) + b_2^{(2)}x_2(t_k - 2\Delta t) - \dots \\ &\quad \dots - a_1^{(2)}y_2(t_k - \Delta t) + a_2^{(2)}y_2(t_k - 2\Delta t), \\ z_2(t_k) &= a_0y_2(t_k) + a_1y_2(t_k - n_1\Delta t) + a_2y_2(t_k - n_2\Delta t) + \dots \\ &\quad + a_Ny_2(t_k - n_N\Delta t). \end{aligned} \quad (8c)$$

Первые три соотношения (формулы (8a)) описывают ведущую систему, четвертое (8b) — фазовый фильтр канала  $N$ -го порядка, последние три (формулы (8c)) — ведомую систему. Первое уравнение в (8a) описывает последовательно соединенные безынерционное нелинейное преобразование (9) (нелинейную подсистему) и фильтр нижних частот первого порядка.

Безынерционное нелинейное преобразование задается выражением того же вида, что и в [1]

$$F(z) = M \left[ |z + E_1| - |z - E_1| + \frac{1}{2} (|z - E_2| - |z + E_2|) \right], \quad (9)$$

где  $E_1, E_2$  — константы,  $M$  — коэффициент усиления. Конкретный выбор  $E_1, E_2$  и  $M$  однозначно определяет характеристику (9).

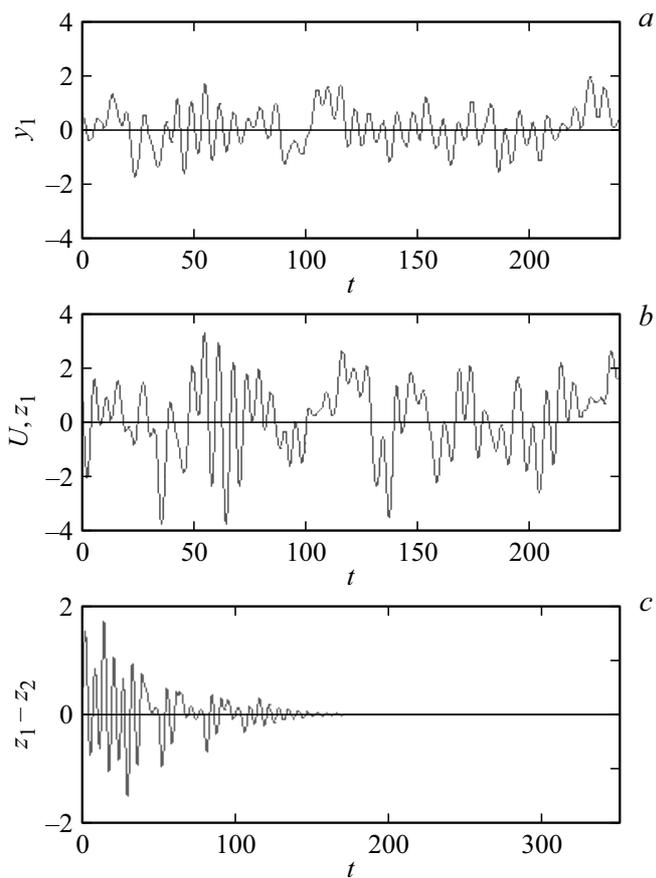
Результатом численного решения системы (8) являются реализации фазовых переменных  $x_1(t_k), y_1(t_k), z_1(t_k), U(t_k), x_2(t_k), y_2(t_k), z_2(t_k)$ , вычисленные для моментов времени  $t_k = k\Delta t$ , где  $k$  — номер отсчета. Данная реализация эквивалентна реализации фазовой траектории, полученной при помощи численного решения уравнений (3).

Известно, что билинейное преобразование (6) сохраняет основные свойства дифференциальных операторов при переходе от непрерывного представления к дискретному [10]. В частности, сохраняется свойство устойчивости, т.е. если фильтр (и оператор, ему соответствующий) был устойчив до преобразования, то он останется устойчивым и после преобразования. Также сохраняется соотношение между верхней и нижней частотой граничных частот фильтров. Поэтому есть основания полагать, что система (3), представленная в дискретной форме, сохранит свойство хаотичности и воспроизведет колебательные режимы, которые имели место в системе с непрерывным временем.

В ходе моделирования значения параметров составили  $M = 7.3$ ,  $T = 3$ ,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $E_1 = 0.5$ ,  $E_2 = 1$ ,  $\Delta t = 0.05$ . Фазовый фильтр канала моделировался на примере импульсной характеристики (4), включающей  $N = 10$  реплик (рис. 1, *b*). Величины задержек в приходе реплик сигнала находятся в диапазоне от одного до  $\sim 20$  квазипериодов хаотических колебаний. Модель (8) является безразмерной, величина квазипериода  $T_0$  равна обратной величине резонансной частоты фильтра второго порядка (3а), т.е.  $T_0 = 1/f_0$ ,  $f_0 = \sqrt{1 - (\alpha_1/2)^2}/2\pi$ . Так как  $\alpha_1 \ll 1$ , величина  $f_0 \approx 1/(2\pi)$ .

Бифуркационная диаграмма системы (8а) по параметру  $M$  изображена на рис. 1, *с*. Ведущая система (8а) сохраняет свойство генерировать хаотические колебания, т.е. кольцевой генератор (8а) остается источником хаоса при введении дополнительного фильтра 3 (рис. 1, *а*).

На рис. 2 изображены результаты численного моделирования хаотической синхронизации в системе (8). На рис. 2, *а* представлен фрагмент реализации сигнала до, а на рис. 2, *б* — после фазового фильтра.



**Рис. 2.** Реализации сигналов в различных точках системы, изображенной на рис. 1, *a* — сигнал  $y_1$  на входе фильтра канала, *b* — сигналы  $U$  и  $z_2$  на выходе фильтра канала III и выходе ведомой системы II соответственно, *c* — разностный сигнал  $z_1(t) - z_2(t)$  между сигналом  $z_1(t)$  ведущей системы (или, что то же самое, сигналом на выходе фильтра канала) и выходным сигналом ведомой системы  $z_2(t)$ .

Поскольку система (8с) является пассивной и сигнал  $z_2$  на ее выходе претерпевает те же преобразования, что и сигнал  $z_1$  в ведущей системе,

выходной сигнал  $z_2$  ведомой системы асимптотически стремится к сигналу  $z_1$  (или к сигналу  $U$ , что то же самое) ведущей системы (рис. 2, *c*); таким образом, хаотический синхронный отклик в системе (8) может быть достигнут.

Амплитуда сигнала после фазового фильтра (рис. 2, *b*) увеличивается, так как прохождение сигнала через фазовый фильтр эквивалентно формированию на его выходе некогерентной суммы  $N = 10$  реплик хаотического сигнала с задержками, определяемыми функцией-откликом (4).

Таким образом, в работе показано, что устранение влияния фильтра канала на синхронизацию ведущей и ведомой динамических систем достигается за счет введения в их структуру фазового фильтра, эквивалентного фильтру канала. Благодаря этому ведущая динамическая система формирует сигнал, структура которого не нарушается после прохождения через фильтр канала.

Достоинством рассмотренного метода является возможность установления хаотической синхронизации для произвольного количества реплик сигнала, поступающих в ведомую систему, т.е. отсутствуют ограничения на порядок фильтра канала.

## Список литературы

- [1] Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 16. С. 71–77.
- [2] Прохоров А.А., Мчедлова Е.С. // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 4. С. 66–72.
- [3] Carroll T.L., Johnson G.A. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. N 2. P. 1555–1558.
- [4] Rulkov N.F., Tsimring L.S. // Int. J. Circ. Theor. Appl. 1997. N 27. P. 555–567.
- [5] Ren H.-P., Bai C., Liu J., Baptista M.S., Grebogi C. // Chaos. 2016. V. 26. P. 83–117.
- [6] Shaerbaq S., Seyedin S.A. // Iran. J. Electr. Electron. Eng. 2012. V. 8. N 1. P. 1–9.
- [7] Shi Z., Bi S., Zhang H., Lu R., Shen X. // Wirel. Commun. Mob. Comput. 2015. V. 15. N 10. P. 1456–1470.
- [8] Andreyev Yu.V., Kletsov A.A. Equalizer for multipath channel // Proc. ICCSC'2004. Moscow, Russia, 2004.
- [9] Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O. // Int. J. Bifurcation Chaos. 1996. V. 6. N 5. P. 851–865.
- [10] Oppenheim A.V., Schaffer R.W. // Discrete-time signal processing. 3rd ed. Upper Saddle River (N.J.): Pearson Higher Education, Inc., 2010. 1108 p.