

01

## Метод расчета спектральных характеристик по сигналам малой длительности и нестационарным процессам

© Г.М. Шихалов<sup>1</sup>, О.Н. Павлова<sup>1</sup>, А.Н. Павлов<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

\* E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступило в Редакцию 16 мая 2017 г.

Предлагается применение альтернативного варианта проведения спектральных оценок по сигналам малой длительности и процессам с меняющимися во времени характеристиками, который основан на использовании метода максимумов модулей вейвлет-преобразования. Показано, что данный подход позволяет существенно снизить погрешность вычислений по сравнению с классическим спектральным анализом.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.02.45458.16870

Во многих областях науки и техники возникает необходимость изучения степенных закономерностей частотной зависимости спектра мощности. Примером служит низкочастотный  $1/f$ -шум, который проявляется на самых разных уровнях организации природы: от космических явлений до нанoeлектроники [1]. Изменение показателя  $\beta$  функции спектральной плотности  $S(f) \sim 1/f^\beta$  отражает изменения режима функ-

ционирования анализируемой системы, и неслучайно этот показатель служит диагностическим маркером в физиологии, позволяющим выявлять функциональные нарушения в динамике сердечно-сосудистой системы [2]. Но, несмотря на то что спектральный анализ является стандартной процедурой цифровой обработки сигналов, проведение оценок частотной зависимости функции  $S(f)$  имеет ограничения в тех случаях, когда анализируются нестационарные процессы. Если нестационарность характеризуется медленным изменением во времени характеристик системы или исследуемого процесса, применяется квазистационарное приближение, т.е. предполагается, что на небольших интервалах времени процесс можно рассматривать как стационарный, используя для его анализа любые классические методы цифровой обработки сигналов. В этом случае спектральные оценки должны осуществляться по небольшому объему выборки, что может приводить к существенным погрешностям вычисления показателя  $\beta$ . Если погрешность превышает допустимое значение, анализ закономерностей степенной зависимости функции  $S(f)$  можно провести с использованием альтернативных вариантов расчета, к числу которых относится метод максимумов модулей вейвлет-преобразования [3–9], не только являющийся мощным инструментом диагностики функционального состояния систем со сложной динамикой [10–12], но и демонстрирующий высокую скорость сходимости при изменении объема выборки [13]. Традиционно, этот метод применяется для расчета спектра сингулярностей и показателей Гёльдера. В настоящей работе показано, что метод [3] целесообразно использовать для проведения спектральных оценок по сигналам малой длительности, и продемонстрировано, что он обеспечивает существенное улучшение точности определения показателя степенной зависимости функции спектральной плотности.

Детали метода максимумов модулей вейвлет-преобразования изложены в обзорной работе [5]. Вначале осуществляется непрерывное вейвлет-преобразование сигнала  $x(t)$

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (1)$$

где параметры  $a$  и  $b$  характеризуют масштаб и смещение базисной функции  $\psi$ . В отличие от других применений вейвлет-анализа [14–17]

в рамках рассматриваемого подхода [3] выбор базисной функции не является принципиальным: от нее зависят абсолютные значения вейвлет-коэффициентов  $W(a, b)$ , но закономерности их степенного поведения в зависимости от масштаба  $a$  не меняются для разных  $\psi$  (если не принимать в расчет погрешности, обусловленные конечным объемом выборки). По этой причине в качестве  $\psi$  выбирают вещественные функции, такие как вейвлет МНАТ:

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]. \quad (2)$$

Отметим также, что на низких частотах погрешности вычисления вейвлет-преобразования увеличиваются из-за граничных эффектов, и этот эффект особенно заметен для малых выборок.

Чтобы проводить статистический анализ сингулярностей, выделяются линии скелетона (локальных максимумов и минимумов  $W(a, b)$ , идентифицируемых при фиксированных значениях  $a$  и изменении параметра смещения  $b$ ) и вычисляются обобщенные статистические функции

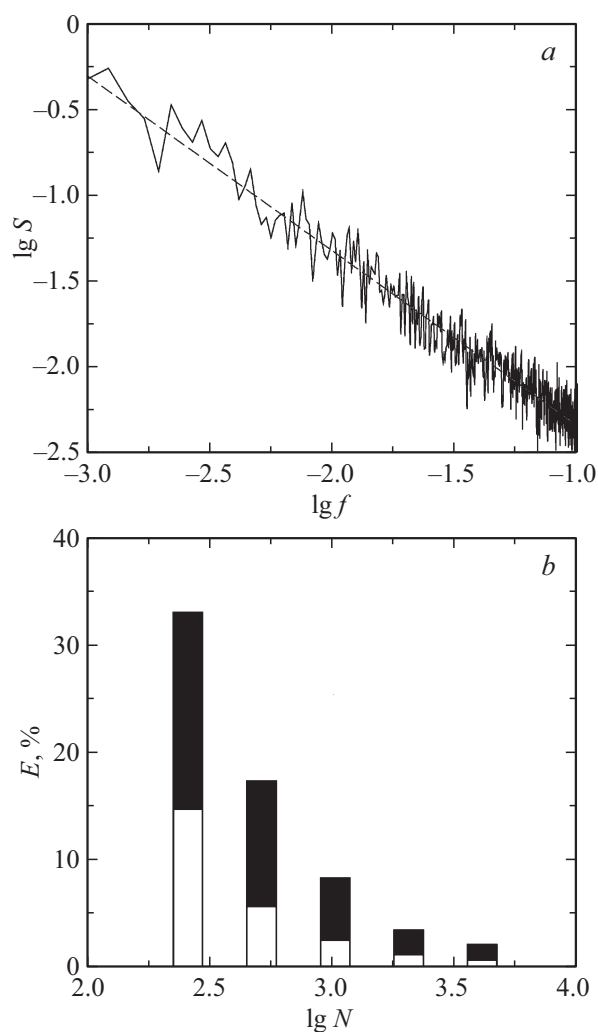
$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |W(a', b_l(a'))| \right)^q, \quad (3)$$

где  $L$  обозначает множество всех линий скелетона, существующих на масштабе  $a$ , а  $b_l$  — положение текущей линии с номером  $l$ . Функции  $Z(q, a)$  демонстрируют следующую степенную зависимость

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (4)$$

которая позволяет определить набор скейлинговых показателей  $\tau(q)$  путем перехода к двойному логарифмическому масштабу и вычисления наклонов зависимостей  $\lg Z(q, a)$  от  $\lg a$  для каждого значения  $q$ . После нахождения  $\tau(q)$  с помощью преобразования Лежандра вычисляется спектр сингулярностей [3]. Для целей настоящей работы достаточно ограничиться расчетом величины  $\tau(2)$ , которая связана с показателем  $\beta$  функции спектральной плотности  $S(f)$  выражением  $\beta = 2 - \tau(2)$  [5].

Рассмотрим применение данного подхода для анализа частотной зависимости  $S(f) \sim 1/f^\beta$  на примере фликкер-шума. С этой целью в среде Matlab был сгенерирован случайный процесс, соответствующий значению  $\beta = 1$ , и оценка показателя  $\beta$  данного процесса проводилась



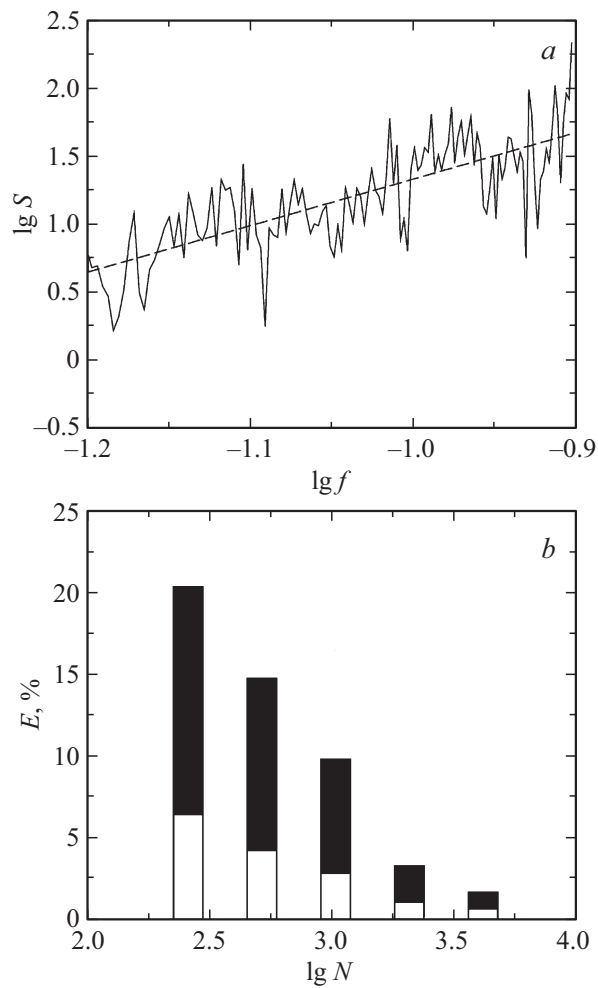
**Рис. 1.** Спектр мощности  $1/f$ -шума в двойном логарифмическом масштабе, вычисленный для  $N = 16\,384$  в диапазоне  $f < 0.15$  (a), и зависимость относительной погрешности определения показателя  $\beta$  от объема выборки (b). Темным цветом показана погрешность спектрального анализа, светлым — метода максимумов модулей вейвлет-преобразования.

путем расчета спектра мощности методом периодограмм для разного объема выборки  $N = 2^j$ . Вычисления осуществлялись для  $j \geq 8$  (т. е. для  $N \geq 256$ ); при этом число периодограмм и длина одной периодограммы варьировались, и выбирались те параметры, которые обеспечивали наименьшую ошибку нахождения  $\beta$ . Полученные результаты приведены на рис. 1, где показан вычисленный спектр мощности ( $a$ ) и относительная погрешность расчета показателя  $\beta$  ( $b$ ). При сравнительно большом объеме выборки ( $j \geq 15$ ) относительная погрешность составляет менее 1%, поэтому отсутствует необходимость в применении альтернативных вариантов оценок спектральных характеристик. Ситуация меняется, если требуется провести расчеты по сигналам малой длительности. Как видно из рис. 1,  $b$ , при выборке  $N = 512$  ошибка вычисления  $\beta$  превышает 17%, а при  $N = 216$  она становится более 33%. Применение метода [3] приводит к снижению данной ошибки в 2–3 раза: до значений менее 6% ( $N = 512$ ) и менее 15% ( $N = 216$ ). Сопоставимое уменьшение погрешности вычисления  $\beta$  происходит и для выборок большей длительности.

Аналогичное сравнение двух рассмотренных методов было проведено для других примеров. Наряду со случайными процессами (шум различной статистики) были проанализированы режимы маломерного хаоса. Рассмотрим результаты сравнительного анализа, проведенного на примере динамики модели нейрона Хиндмарш–Розе [18], описываемой следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I, \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y, \\ \frac{dz}{dt} &= r(s(x - \alpha) - z),\end{aligned}\tag{5}$$

в которой выбраны значения управляющих параметров  $a = 1.0$ ,  $b = 3.0$ ,  $I = 2.7$ ,  $c = 1.0$ ,  $d = 5.0$ ,  $r = 0.003$ ,  $s = 4.0$ ,  $\alpha = -1.6$ , соответствующие хаотическому режиму колебаний. В качестве анализируемого сигнала была выбрана последовательность межспайковых интервалов [19,20] — промежутков времени между спайками напряжения (импульсами), наблюдаемыми во временной динамике переменной  $x(t)$ .



**Рис. 2.** Спектр мощности последовательности межспайковых интервалов нейронной модели Хиндмарш–Розе в двойном логарифмическом масштабе, вычисленный для  $N = 8192$  в диапазоне  $f \in [0.05, 0.125]$  (a), и зависимость относительной погрешности определения показателя  $\beta$  от объема выборки (b). Темным цветом показана погрешность спектрального анализа, светлым — метода максимумов модулей вейвлет-преобразования.

В отличие от предыдущего примера спектральная плотность увеличивается с ростом частоты и в определенном диапазоне (в низкочастотной области) демонстрирует зависимость, которую можно приближенно описать степенным законом (рис. 2, *a*).

Чтобы определить ошибку вычисления показателя  $\beta$ , которая в отличие от предыдущего примера является неизвестной величиной, вначале были проведены расчеты спектра по большому объему выборки ( $N = 2^{16}$ ), и оценки, осуществляемые по сигналам малой длительности, сравнивались с полученным результатом. Как видно из рис. 2, *b*, непосредственное применение стандартного метода расчета спектра мощности приводит к существенным погрешностям: более 20% ( $N = 216$ ) и более 14% ( $N = 512$ ). Привлечение метода максимумов модулей вейвлет-преобразования существенно уменьшает соответствующую ошибку: до значений менее 7% ( $N = 216$ ) и менее 5% ( $N = 512$ ). Похожие результаты были получены и для других рассмотренных примеров, в частности, при анализе зашумленных последовательностей межспайковых интервалов ряда других нейронных моделей. Проведенное тестирование позволило убедиться в том, что преимущества метода максимумов модулей вейвлет-преобразования проявляются как при рассмотрении детерминированной динамики нелинейных систем, так и при анализе случайных процессов.

Таким образом, мы можем констатировать, что метод максимумов модулей вейвлет-преобразования представляет собой альтернативу стандартному методу спектрального анализа при рассмотрении сигналов малой длительности или динамики систем с меняющимися характеристиками, анализ которых ведет к ограничению объема выборки при проведении спектральных оценок.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00224).

## Список литературы

- [1] Кузовлев Ю.Е. // УФН. 2015. Т. 185. № 7. С. 773–783.
- [2] Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L. // Chaos. 1995. V. 5. P. 82–87.
- [3] Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 3515–3518.
- [4] Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. 875–884.

- [5] *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 1994. V. 4. P. 245–302.
- [6] *Arneodo A., Bacry E., Muzy J.F.* // *Physica A*. 1995. V. 213. P. 232–275.
- [7] *Arneodo A., Audit B., Bacry E., Manneville S., Muzy J.F., Roux S.G.* // *Physica A*. 1998. V. 254. P. 24–45.
- [8] *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Ziganshin A.R., Holstein-Rathlou N.-H., Mosekilde E.* // *Physica A*. 2002. V. 316. P. 233–249.
- [9] *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E.* // *Chaos Solit. Fract.* 2003. V. 16. P. 801–810.
- [10] *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Rosenblum M.G., Struzik Z., Stanley H.E.* // *Nature*. 1999. V. 399. P. 461–465.
- [11] *Stanley H.E., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Ivanov P.C., Peng C.-K.* // *Physica A*. 1999. V. 270. P. 309–324.
- [12] *Pavlov A.N., Abdurashitov A.S., Pavlova O.N., Tuchin V.V., Sindeeva O.S., Sindeev S.S., Semyachkina-Glushkovskaya O.V.* // *J. Innovative Opt. Health Sci.* 2015. V. 8. P. 1550041 (1–8).
- [13] *Павлов А.Н., Павлова О.Н.* // *Письма в ЖТФ*. 2008. Т. 34. В. 7. С. 71–78.
- [14] *Addison P.S.* *The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2016. 464 p.
- [15] *Thurner S., Feurstein M.C., Teich M.C.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 1544–1547.
- [16] *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* // *Physiol. Measurement*. 2008. V. 29. P. 945–958.
- [17] *Daubechies I.* *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia: S.I.A.M., 1992. 357 p.
- [18] *Hindmarsh J.L., Rose R.M.* // *Proc. Roy. Soc. London B*. 1984. V. 221. P. 87–102.
- [19] *Dayan P., Abbott L.F.* *Theoretical neuroscience: computational and mathematical modeling of neural systems*. Cambridge: The MIT Press, 2001. 460 p.
- [20] *Rieke F., Warland D., de Ruyter van Steveninck R., Bialek W.* *Spikes: exploring the neural code*. Cambridge: The MIT Press, 1999. 408 p.