

Дисперсия и затухание волн Рэлея на статистически шероховатой, свободной поверхности гексагонального кристалла

© В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет),
115409 Москва, Россия

E-mail: kosachev@pc1k32.mephi.ru

(Поступила в Редакцию 30 октября 2001 г.
В окончательной редакции 11 марта 2002 г.)

Для Z-среза гексагонального кристалла с помощью модифицированного метода среднего поля в рамках теории возмущений аналитически исследованы дисперсия и затухание поверхностных акустических волн Рэлея на свободной статистически шероховатой поверхности. В области частот, достижимых по теории возмущений, выполнены численные расчеты с использованием выражений для действительной и мнимой частей комплексного сдвига частоты волн Рэлея, вызванного слабой шероховатостью поверхности. Показано, что для Z-среза гексагонального кристалла характер дисперсии и затухания рэлеевских волн качественно совпадает со случаем изотропной среды, отличаясь в количественном отношении. В длинноволновом пределе $\lambda \gg a$, где a — поперечная корреляционная длина шероховатости, в явном аналитическом виде получены выражения для относительного изменения фазовой скорости и обратной длины затухания волн Рэлея, с использованием которых также были выполнены численные расчеты.

На протяжении последних двадцати пяти лет в литературе появилось большое число работ, как теоретически, так и экспериментальных, посвященных исследованию распространения поверхностных акустических волн (ПАВ) вдоль статистически шероховатой поверхности твердого тела. Внимание исследователей объясняется высокой чувствительностью ПАВ к различным возмущениям поверхности, по которой они распространяются. А случайная шероховатость является одним из наиболее распространенных видов возмущения, которое присутствует в той или иной степени на поверхности любого образца и обусловлено технологией его приготовления. Это послужило причиной широких технических применений ПАВ в сейсмологии, ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике.

Основное внимание уделялось рэлеевским волнам, которые, как известно [1], могут существовать в полубесконечной упругой среде, ограниченной плоской поверхностью, распространяясь вдоль нее без дисперсии и затухания. В случае, когда поверхность является слабошероховатой (характерные высоты шероховатости малы по сравнению с длиной исследуемой волны), в законе дисперсии рэлеевской волны появляется малая добавка, обусловленная шероховатостью, — частотный комплексный сдвиг. При этом вещественная часть сдвига частоты описывает дисперсию фазовой скорости волн Рэлея, в то время как мнимая характеризует ее затухание.

Первой работой, в которой теоретически получено дисперсионное соотношение для ПАВ Рэлея, распространяющейся вдоль статистически шероховатой свободной поверхности изотропного твердого тела, была работа [2]. Закон дисперсии получен в интегральном виде с помощью метода среднего поля (метода Рэлея). Поскольку интеграл в явном виде вычислить не удастся, авторы [2] оценили его по порядку величины для мнимой

части сдвига частоты, т. е. для затухания. В работах [3–5] исследовано затухание ПАВ Рэлея на основе подхода теории рассеяния методом функции Грина. Заметим, что метод среднего поля в отличие от подхода теории рассеяния позволяет определить не только мнимую, но и действительную часть сдвига частоты. В работах [6–8] закон дисперсии рэлеевских волн на статистически шероховатой поверхности получался путем решения уравнения Дайсона для средней функции Грина. При этом дисперсионные соотношения также имели интегральный вид, а дисперсия и затухание оценивались по порядку величины в предельных случаях коротких и длинных (по сравнению с поперечной корреляционной длиной шероховатости) волн Рэлея.

Наиболее полно, с нашей точки зрения, дисперсия и затухание ПАВ Рэлея на слабошероховатой свободной поверхности изотропного упругого полупространства исследованы в работе [9]. С помощью метода среднего поля авторам удалось получить в явном аналитическом виде действительную и мнимую части сдвига частоты. Поскольку выражения для дисперсии фазовой скорости и коэффициента затухания были достаточно сложными и содержали интегралы, авторы [9] просчитали их численно в широком диапазоне частот. В работе [10] обобщены приближения, развитые в [9], на случай слоистых сред с учетом пьезоэффекта. Заметим, что в работах [2–10] рассматривалась в основном шероховатость трехмерного типа $x_3 = \xi(x_1, x_2)$. Важный класс задач, связанный с исследованием дисперсии и затухания волн Рэлея на шероховатости двумерного типа $x_3 = \xi(x_1)$, рассмотрен в работах [10–14].

Анализ работ [2–14] показывает, что полученные в них результаты часто серьезно различаются, а иногда и противоречат друг другу. Причем это относится к выводам, полученным как различными методами, так и в рамках одного и того же метода. С целью прояснить

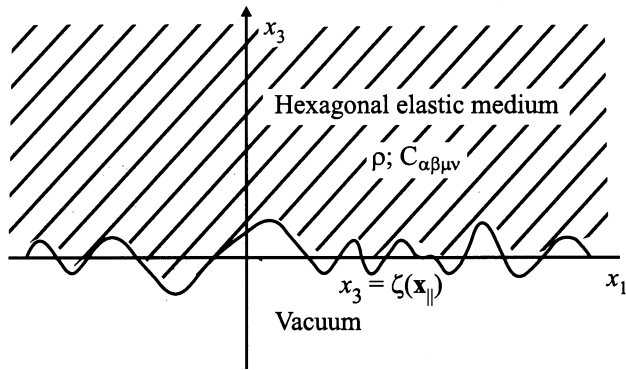


Рис. 1. Геометрия полубесконечной однородной упругой гексагональной среды с трехмерно-шероховатой свободной поверхностью $x_3 = \xi(\mathbf{x}_{\parallel})$.

создавшуюся ситуацию, в работе [15] был предложен модифицированный метод среднего поля, позволивший получить выражение для дисперсии и затухания, которые вместе с соотношениями из [5] подтвердили результаты работы [9].

Следует отметить, что большинство цитируемых выше работ связано с рассмотрением именно изотропных сред. В работах же [10,15], результаты которых включали гриновский тензор для анизотропной упругой среды, занимающей полупространство $x_3 > 0$, численные вычисления проделаны только для изотропного случая. Вместе с тем подавляющее большинство материалов, используемых в практических применениях ПАВ, являются анизотропными кристаллами. Однако здесь в отличие от изотропных сред вычислительные сложности возникают даже для идеально гладкой поверхности. Работа [16] является, по-видимому, первой работой, в которой в длинноволновом пределе были получены частотные зависимости для дисперсии и затухания ПАВ Рэлея. Для различных срезов анизотропной среды численные кривые для относительного изменения фазовой скорости ПАВ Рэлея построены в зависимости от угла распространения.

В настоящей работе исследуется распространение ПАВ Рэлея вдоль статистически шероховатой свободной поверхности гексагонального кристалла (шероховатость трехмерного типа). При этом статистическая шероховатость предполагается слабой, а поверхность $x_3 = 0$ совпадает с базисной плоскостью кристалла (Z -срез). В качестве метода исследования выбран модифицированный метод среднего поля [15], позволяющий получать дисперсионные соотношения для ПАВ различных поляризований на свободной слабошероховатой поверхности твердого тела с произвольной симметрией. Мы получим в аналитическом виде дисперсионное соотношение для сдвига частоты волн Рэлея и исследуем его численно во всем диапазоне частот, достижимых в рамках теории возмущений. Кроме того, мы получим аналитические выражения для дисперсии фазовой скорости и коэффициента затухания волн Рэлея в длинноволновом пределе

и сравним их с результатами работы [16]. Что касается исследования дисперсии и затухания волн Рэлея, распространяющихся вдоль Z -среза шероховатой поверхности $x_3 = \xi(x_1)$ гексагональной упругой среды в произвольном направлении, то этому будет посвящена отдельная статья.

1. Постановка задачи. Эффективные граничные условия для упругой полубесконечной гексагональной среды, ограниченной свободной слабошероховатой поверхностью

Геометрия задачи изображена на рис. 1. Гексагональный кристалл, рассматриваемый в приближении упругого континуума, с осью симметрии шестого порядка, параллельной оси x_3 , ограничен свободной, шероховатой поверхностью $x_3 = \xi(\mathbf{x}_{\parallel})$ и занимает полупространство $x_3 > \xi(\mathbf{x}_{\parallel})$, где $\mathbf{x}_{\parallel} = (x_1, x_2, 0)$. Гексагональная упругая среда характеризуется плотностью массы ρ и тензором модулей упругости $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. Вдоль статистически шероховатой поверхности гексагональной среды (Z -срез) распространяется волна Рэлея. Требуется найти дисперсию фазовой скорости и затухание рэлеевской волны, обусловленные шероховатостью поверхности.

Для случайно шероховатой поверхности мы не знаем точного выражения для функции профиля поверхности $\xi(\mathbf{x}_{\parallel})$, поэтому будем описывать поверхность ее статистическими свойствами

$$\langle \xi(\mathbf{x}_{\parallel}) \rangle = 0, \quad \langle \xi(\mathbf{x}_{\parallel}) \xi(\mathbf{x}'_{\parallel}) \rangle = \delta^2 W(|\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}'_{\parallel}|), \quad (1)$$

где $\delta = \sqrt{\langle \xi^2 \rangle}$ — среднеквадратичная амплитуда шероховатости, угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций функций профиля $\xi(\mathbf{x}_{\parallel})$, а $W(|\mathbf{x}_{\parallel}|)$ — корреляционная функция, которая в дальнейшем будет выбираться в гауссовом виде

$$W(|\mathbf{x}_{\parallel}|) = \exp(-|\mathbf{x}_{\parallel}|^2/a^2), \quad (2)$$

где a — поперечная корреляционная длина шероховатости, характеризующая среднее расстояние между последовательными пиками или впадинами на поверхности.

Шероховатость поверхности предполагается слабой, т.е. считаем, что характерные высоты неровностей δ малы по сравнению с длинами исследуемых волн $(\delta/\lambda) \ll 1$. Зависимость поля смещения $u(\mathbf{x}, t)$ от времени предполагается гармонической

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}|\omega) \exp(-i\omega t).$$

С учетом сделанных предположений уравнения движения среды имеют вид

$$\left(\omega^2 \delta_{\alpha\mu} + \frac{1}{\rho} C_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta} \partial x_{\nu}} \right) u_{\mu}(\mathbf{x}|\omega) = 0, \quad x_3 > \xi(\mathbf{x}_{\parallel}), \quad (3)$$

где малые греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma \dots$ пробегает значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\hat{n}_\beta\left.\frac{\partial u_\mu(\mathbf{x}|\omega)}{\partial x_\nu}\right|_{x_3=\xi(\mathbf{x}_\parallel)}=0, \quad a=1,2,3, \quad (4)$$

где \hat{n} — единичный вектор нормали к поверхности, зависящий от двумерного вектора \mathbf{x}_\parallel .

Чтобы получить дисперсионное соотношение для ПАВ (а таковой может быть как ПАВ Рэлея, так и ПАВ сдвиговой — горизонтальной (SH) поляризации), необходимо решить уравнения движения (3) в полупространстве $x_3 > \xi(\mathbf{x}_\parallel)$ с учетом граничных условий (4) на свободной поверхности $x_3 = \xi(\mathbf{x}_\parallel)$. Эту задачу будем решать с помощью модифицированного метода среднего поля, развитого в [15], где показано, что в случае слабощероховатой поверхности эта задача может быть сведена к более простой, а именно к тем же уравнениям движения (3), но в полупространстве $x_3 > 0$, и эффективным граничным условиям на плоской поверхности $x_3 = 0$. Эти эффективные граничные условия для фурье-компонент поля смещения во втором порядке по ξ получены в работе [1] (см. выражения (2.19)).

Как отмечалось в [15], при выводе эффективных граничных условий использовано лишь предположение о слабой шероховатости поверхности, а симметрия среды не конкретизировалась. Таким образом, эффективные граничные условия справедливы и для рассматриваемого случая Z-среза гексагональной упругой среды.

2. Система уравнений для среднего поля смещения

Для получения дисперсионного уравнения для волн Рэлея предварительно получим систему уравнений для среднего поля смещения. Для этого удобно перейти от системы дифференциальных уравнений движения (3) в полупространстве $x_3 > 0$ и эффективных граничных условий на плоской поверхности $x_3 = 0$ к системе интегральных уравнений. С этой целью вводится функция Грина $D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega)$, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\omega^2\delta_{\alpha\mu} + \frac{1}{\rho}C_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\partial x_\nu}\right)D_{\mu\beta} \times (\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega) = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad x_3, x'_3 \geq 0 \quad (5)$$

и граничным условиям на плоскости $x_3 = 0$ и на бесконечности

$$C_{\alpha 3 \mu \nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} D_{\mu \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega)|_{x_3=0} = 0, \quad D_{\alpha \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega)|_{x_3 \rightarrow \infty} = 0.$$

Используя далее факт убывания поля смещения при удалении от поверхности, а также свойство симметрии гриновского тензора

$$D_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega) = D_{\gamma\alpha}(\mathbf{x}', \mathbf{x}|\omega),$$

с помощью интегральной теоремы Грина получаем

$$\theta(x_3)u_\alpha(\mathbf{x}|\omega) = \int d^2x'_\parallel \left\{ D_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega) \frac{1}{\rho} C_{\gamma 3 \mu \nu} \frac{\partial u_\mu(\mathbf{x}'|\omega)}{\partial x'_\nu} \right\}_{x'_3=0}, \quad (6)$$

где $\theta(x_3)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

В соответствии с постановкой задачи гексагональный кристалл ориентирован так, что поверхность $x_3 = 0$ совпадает с базисной плоскостью кристалла (Z-срез). На базисной плоскости гексагонального кристалла все направления эквивалентны для упругих волн. Иными словами, в плоскости $x_3 = 0$ гексагональный кристалл обладает трансляционной инвариантностью в направлениях, параллельных плоскости $x_3 = 0$. Поэтому получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel; x_3, x'_3|\omega),$$

а функцию Грина удобно представить в виде фурье-интеграла

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\omega) = \int \frac{d^2k_\parallel}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k}_\parallel(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel)) D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3, x'_3).$$

Тогда система интегральных уравнений (6) в фурье-представлении имеет вид

$$\theta(x_3)u_\alpha(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3) = D_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3, 0) \times \left\{ \frac{1}{\rho} \left[C_{\gamma 3 \mu \Phi} i k_\Phi + C_{\gamma 3 \mu 3} \frac{\partial}{\partial x'_3} \right] u_\mu(\mathbf{k}_\parallel\omega|x'_3) \right\}_{x'_3=0}, \quad (7)$$

где индекс Φ пробегает значения 1, 2.

Выражение в фигурных скобках в правой части (7) совпадает с левой частью выражения для эффективных граничных условий. Таким образом, мы приходим к однородному интегральному уравнению для $u_\alpha(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3)$ во втором порядке по ξ

$$\begin{aligned} \theta(x_3)u_\alpha(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3) &= \int \frac{d^2q_\parallel}{(2\pi)^2} D_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3, 0) \\ &\times \xi(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) M_{\gamma\mu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel|\omega) u_\mu(\mathbf{q}_\parallel\omega|0) \\ &+ \int \frac{d^2q_\parallel}{(2\pi)^2} D_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}_\parallel\omega|x_3, 0) \xi^{(2)}(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) \\ &\times N_{\gamma\mu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel|\omega) u_\mu(\mathbf{q}_\parallel\omega|0). \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) можно существенно упростить, если ввести вещественную ортогональную 3×3 матрицу $S(\hat{\mathbf{k}}_\parallel)$ и обратную ей $S^{-1}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel)$

$$S(\hat{\mathbf{k}}_\parallel) = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & 0 \\ -\hat{k}_2 & \hat{k}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel) = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & -\hat{k}_2 & 0 \\ \hat{k}_2 & \hat{k}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{k}_\Phi = \frac{k_\Phi}{k_\parallel}, \quad \Phi = 1, 2, \quad (9)$$

а также следующие определения:

$$F_\alpha(\mathbf{k}_\parallel \omega | x_3) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel) u_\mu(\mathbf{k}_\parallel \omega | x_3), \quad (10)$$

$$d_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\parallel \omega | x_3 x'_3) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel) D_{\mu\nu}(\mathbf{k}_\parallel \omega | x_3 x'_3) S_{\nu\beta}^{-1}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel), \quad (11)$$

$$X_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel) M_{\mu\nu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) S_{\nu\beta}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_\parallel), \quad (12)$$

$$Y_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}_\parallel) N_{\mu\nu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) S_{\nu\beta}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_\parallel). \quad (13)$$

Что касается матриц X и Y , то исходя из свойств симметрии тензора модулей упругости $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta}$ легко показать, что они обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} X^T(\mathbf{k}_\parallel, \mathbf{q}_\parallel | \omega) &= X(\mathbf{k}_\parallel, \mathbf{q}_\parallel | \omega), \\ Y^T(\mathbf{k}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) &= -Y(\mathbf{k}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega), \end{aligned} \quad (14)$$

где символ „ T “ обозначает операцию транспонирования. Матрицы X, Y по виду совпадают с выражениями (A.7a)–(A.8e) работы [15] и зависят от ω и компонент тензора модулей упругости для гексагональной среды. Умножая обе части уравнения (8) слева на $S(\hat{\mathbf{k}}_\parallel)$, с учетом (9)–(13) получим

$$\begin{aligned} \theta(x_3) F_\alpha(\mathbf{k}_\parallel \omega | x_3) &= \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} \xi(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) \\ &\times d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega | x_3 0) X_{\beta\mu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) F_\mu(\mathbf{q}_\parallel \omega | 0) \\ &+ \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} \xi^{(2)}(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega | x_3 0) \\ &\times Y_{\beta\mu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) F_\mu(\mathbf{q}_\parallel \omega | 0). \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношение (15) справедливо для всех значений $x_3 = 0+$. Положив в (15) $x_3 = 0+$, получим систему уравнений для компонент поля смещения $F_\alpha(\mathbf{k}_\parallel \omega | x_3)$ вблизи поверхности кристалла

$$\begin{aligned} F_\alpha(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) &= \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} \xi(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) \\ &\times d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega) X_{\beta\mu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) F_\mu(\mathbf{q}_\parallel \omega | 0) \\ &+ \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} \xi^{(2)}(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega) \\ &\times Y_{\beta\mu}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) F_\mu(\mathbf{q}_\parallel \omega | 0), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega) = d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega | 0+, 0). \quad (17)$$

Явный вид функции профиля поверхности $\xi(\mathbf{x}_\parallel)$ неизвестен, известны лишь ее статистические свойства, поэтому систему уравнений (16) необходимо усреднить по ансамблю реализаций функции $\xi(\mathbf{x}_\parallel)$. С этой целью мы в соответствии с [9] введем оператор \hat{P} , усредняющий все величины, на которые он действует, по ансамблю реализаций функции профиля $\hat{P}f = \langle f \rangle$ и оператор $\hat{Q} = I - \hat{P}$, где I — единичный оператор.

Действуя на обе части уравнения (16) последовательно операторами \hat{P} и \hat{Q} и подставляя далее второе из получающихся уравнений в первое, с учетом равенства

$$\hat{P}\xi^{(2)}(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) = \delta^2(2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel)$$

и свойства (14) матрицы X получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для компонент среднего поля

$$\begin{aligned} \langle F_\alpha(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle &= \delta^2 \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel|) d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega) \\ &\times X_{\beta\gamma}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) d_{\gamma\mu}(\mathbf{q}_\parallel | \omega) X^T(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) \langle F_\nu(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \\ &+ \delta^2 d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega) Y_{\beta\mu}(\mathbf{k}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega) \langle F_\mu(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

Для Z -среза гексагонального кристалла с плоской границей функция Грина $d_{\alpha\beta}$ получена в работе [17] для любых x_3, x'_3 . В выражение (18) входит функция Грина на поверхности кристалла (17). Поэтому после несложных алгебраических преобразований ее вид сильно упрощается по сравнению с [17].

3. Дисперсионное уравнение для волн Рэлея

Исследование интегрирования по углам в (18) показывает, что компоненты $\langle F_1(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle$ и $\langle F_3(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle$ отделяются от $\langle F_2(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle$, при этом для поверхностных волн сагиттальной поляризации (ПАВ Рэлея) получается следующее матричное уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \langle F_1(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \\ \langle F_3(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \end{pmatrix} &= \delta^2 \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel|) \\ &\times \begin{pmatrix} d_{11} X_{11}^2 \tilde{d}_{11} + d_{11} X_{12}^2 \tilde{d}_{22} + d_{13} X_{33} X_{11} \tilde{d}_{31} & d_{11} X_{11} X_{33} \tilde{d}_{13} + d_{13} X_{33}^2 \tilde{d}_{33} \\ d_{31} X_{11}^2 \tilde{d}_{11} + d_{31} X_{12}^2 \tilde{d}_{22} + d_{33} X_{33} X_{11} \tilde{d}_{31} & d_{31} X_{11} X_{33} \tilde{d}_{13} + d_{33} X_{33}^2 \tilde{d}_{33} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \langle F_1(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \\ \langle F_3(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \end{pmatrix} + \delta^2 \begin{pmatrix} d_{13} Y_{31} & d_{11} Y_{13} \\ d_{33} Y_{31} & d_{31} Y_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle F_1(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \\ \langle F_3(\mathbf{k}_\parallel \omega | 0) \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $X_{\alpha\beta} \equiv X_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega)$, $Y_{\alpha\beta} \equiv Y_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\parallel, \mathbf{k}_\parallel | \omega)$, $d_{\alpha\beta} \equiv d_{\alpha\beta}(k_\parallel \omega)$, а тильда указывает на то, что соответствующая величина должна быть взята при значениях аргумента, равных q_\parallel , например, $\tilde{d}_{\alpha\beta} \equiv d_{\alpha\beta}(q_\parallel | \omega)$.

Закон дисперсии для волн Рэлея получается из условия разрешимости матричного уравнения (19). При этом для упрощения выкладок воспользуемся соотношением

$$\det(A + \delta A) = \det A + \det A \cdot \text{Sp}(A^{-1} \delta A) + O(\delta A^2)$$

(в рассматриваемом случае A — единичная матрица 2×2). Таким образом, дисперсионное соотношение для волн Рэлея имеет вид

$$\begin{aligned} 1 &= \delta^2 \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel|) \{ d_{11} X_{11}^2 \tilde{d}_{11} \\ &+ d_{11} X_{12}^2 \tilde{d}_{22} + d_{13} X_{33} X_{11} \tilde{d}_{31} + d_{31} X_{11} X_{33} \tilde{d}_{13} \\ &+ d_{33} X_{33}^2 \tilde{d}_{33} \} + \delta^2 (d_{31} - d_{13}) Y_{13}. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя далее явные выражения для функции $d_{\alpha\beta}$, перепишем (20) в виде

$$\Delta(k_{\parallel}|\omega) = \delta^2 Z(k_{\parallel}|\omega), \quad (21)$$

где $\Delta(k_{\parallel}|\omega)$ — рэлеевский детерминант, который в случае изотропной среды переходит в выражение (4.11) работы [15]. Явный вид функции $Z(k_{\parallel}|\omega)$ ввиду громоздкости пока не приводим.

В предельном случае $\delta = 0$ уравнение (21) описывает закон дисперсии волн Рэлея, распространяющихся вдоль плоской поверхности гексагонального кристалла, параллельной базисной плоскости

$$\Delta(k_{\parallel}|\omega_R) = 0. \quad (22)$$

Его решение [17] имеет вид $\omega_R(k_{\parallel}) = k_{\parallel}c_R$, где c_R — скорость рэлеевских волн на плоской поверхности гексагонального кристалла (Z -срез). Если ввести удобное для дальнейшего рассмотрения обозначение

$$\rho\omega_R^2 = c_{44}k_{\parallel}^2\varepsilon, \quad (23)$$

то $c_R = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}\varepsilon$. Здесь ε зависит только от компонент тензора модулей упругости и определяется следующим из (22) уравнением:

$$\left(1 - \frac{c_{44}}{c_{33}}\right)\varepsilon^3 + \left(\frac{c_{11}}{c_{33}} - 1 - 2a_1\right)\varepsilon^2 + a_1(2+a_1)\varepsilon - a_1^2 = 0,$$

$$a_1 = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{44}}, \quad (24)$$

при условии $0 < \varepsilon < \min(1, a_1)$.

Поскольку в выкладках удерживаются лишь члены $O(1)$ и $O(\delta^2)$, в правой части уравнения (21) можно положить $\omega = \omega_R(k_{\parallel}) = k_{\parallel}c_R$. Разлагая далее $\Delta(k_{\parallel}|\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности $\omega = \omega_R$, закон дисперсии волн Рэлея на статистически шероховатой поверхности запишем в виде

$$\begin{aligned} \omega(k_{\parallel}) &= \omega_R(k_{\parallel}) + \Delta\omega(k_{\parallel}) \\ &= \omega_R(k_{\parallel}) + \delta^2 \left[\frac{Z(k_{\parallel}|\omega)}{\partial\Delta/\partial\omega} \right]_{\omega=\omega_R}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если теперь подставить в $Z(k_{\parallel}|\omega)$ поверхностный рассеивающий фактор $g(|\mathbf{k}_{\parallel}|)$ в гауссовой форме (2), перейти к полярным координатам и проинтегрировать по углу θ , то для $Z(k_{\parallel}|\omega_R)$ получим

$$\begin{aligned} Z(k_{\parallel}|\omega_R) &= \frac{a^2}{2} \exp(-k_{\parallel}^2 a^2/4) \int_0^{\infty} dq_{\parallel} q_{\parallel} \frac{\exp(-q_{\parallel}^2 a^2/4)}{\Delta(q_{\parallel}|\omega_R)} \\ &\times \sum_{n=0}^4 C_n(q_{\parallel}, k_{\parallel}|\omega_R) I_n \left(\frac{k_{\parallel} q_{\parallel} a^2}{2} \right) - 2Y_{13} d_{13} \Delta(k_{\parallel}|\omega_R). \end{aligned} \quad (26)$$

В выражении (26) $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя порядка n , а коэффициенты $C_n(q_{\parallel}, k_{\parallel}|\omega_R)$ имеют вид

$$C_n(k_{\parallel}, q_{\parallel}|\omega_R) = k_{\parallel}^8 \varepsilon \alpha_i(k_{\parallel}, \omega_R) C_n(\eta), \quad (27)$$

где $\eta = q_{\parallel}/k_{\parallel}$. Знаменатель подынтегрального выражения в (26) $\Delta(q_{\parallel}|\omega_R)$ следует понимать как $\Delta(q_{\parallel}|\omega_R + i\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0+$. Как следует из (22), $\Delta(q_{\parallel}, \omega_R + i\alpha)$ обращается в нуль при $\eta = 1$ и $\alpha = 0$. Рассматривая $\Delta(q_{\parallel}|\omega_R + i\alpha)$ формально как функцию переменных q_{\parallel} и ω_R , разложим Δ в ряд Тейлора в окрестности $q_{\parallel} = k_{\parallel}$, $\alpha = 0$

$$\Delta(q_{\parallel}, \omega_R + i\alpha) = k_{\parallel} \left. \frac{\partial\Delta(q_{\parallel}, \omega_R)}{\partial q_{\parallel}} \right|_{(k_{\parallel}, \omega_R)} \times \left(\eta - 1 - i \frac{\alpha}{\omega_R} \right). \quad (28)$$

Пользуясь известным соотношением

$$\frac{1}{x + iv} = P \frac{1}{x} - i\pi \operatorname{sign}(v)\delta(x), \quad (29)$$

где символ P означает интегрирование в смысле главного значения Коши и $\operatorname{sign}(v) = \pm 1$ для $v \gtrless 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(q_{\parallel}|\omega_R + i\alpha)} &= P \frac{1}{\Delta(q_{\parallel}|\omega_R)} + i\pi \frac{\delta(\eta - 1)}{k_{\parallel} \left(\frac{\partial\Delta(q_{\parallel}|\omega_R)}{\partial q_{\parallel}} \right)_{q_{\parallel}=k_{\parallel}}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее удобно перейти к безразмерной функции ω_{12} , определяемой равенством

$$\frac{\Delta\omega(k_{\parallel})}{\omega_R} = \frac{\delta^2}{a^2} \omega_{12}(\xi), \quad (31)$$

где $\xi = k_{\parallel}a$. Учитывая (30) и сделав замену переменной интегрирования $t = \eta^2/\varepsilon$ в (26), получаем закон дисперсии $\omega_{12}(\xi)$ в окончательном виде

$$\begin{aligned} \omega_{12}(\xi) &= -\frac{d}{2} \xi^4 \exp(-\xi^2/4) \\ &\times (A(\xi) + B(\xi) + E(\xi)) + \xi^2 l, \end{aligned} \quad (32)$$

где коэффициенты $A(\xi), B(\xi), E(\xi), l, d$ приведены в Приложении А. Выражение (32) комплексное, поэтому $\omega_{12}(\xi)$ можно записать в виде

$$\omega_{12}(\xi) = \omega_1(\xi) - i\omega_2(\xi), \quad (33)$$

где $\omega_1(\xi)$ и $\omega_2(\xi)$ — вещественные функции. Вещественная часть $\omega_{12}(\xi)$ определяет дисперсию фазовой скорости

$$\frac{\Delta c}{c_R} = \frac{d^2}{a^2} \omega_1(\xi), \quad (34)$$

а мнимая — обратную длину затухания волн Рэлея

$$\frac{1}{l} = \frac{\delta^2}{a^3} 2\xi \omega_2(\xi). \quad (35)$$

Выражение (32) содержит комплексные функции $\tilde{\alpha}_{t1,t2}(t)$, которые входят в функцию Грина [17]. Исходя из условий, что поверхностная волна должна исчезать на бесконечной глубине и должна быть уходящей от поверхности, в [17] на них накладываются следующие условия:

$$\operatorname{Re} \tilde{\alpha}_{t1,t2}(t) > 0, \quad \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{t1,t2}(t) < 0. \quad (36)$$

Условия (36) могут быть выполнены только в том случае, если $\tilde{\alpha}_{t1,t2}^2(t)$ — вещественные функции, что дает следующие условия на соотношения коэффициентов модулей упругости:

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{11}}\right)^2 + \left(1 - \frac{c_{44}}{c_{33}}\right)^2 - \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{11}}\right) \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{33}}\right) \left(a_1 - 2 \frac{c_{13}}{c_{33}}\right) \leq 0,$$

если

$$\left(a_1 - 2 \frac{c_{13}}{c_{33}}\right)^2 > 4 \frac{c_{11}}{c_{33}},$$

$$2 \frac{c_{11}}{c_{33}} \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{11}}\right) - \left(a_1 - 2 \frac{c_{13}}{c_{33}}\right) \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{33}}\right) \geq 0,$$

если

$$\left(a_1 - 2 \frac{c_{13}}{c_{33}}\right)^2 - 4 \frac{c_{11}}{c_{33}} = 0. \quad (37)$$

Условия (37) выполнены для большинства известных гексагональных кристаллов (см. таблицу). В случае

Численные значения Φ , Λ и c_R для ряда гексагональных кристаллов*

Среда	Температура, К	ρ , g · cm ⁻³	c_R , km · s ⁻¹	Φ	Λ
Be	293	1.816	7.203	0.4125	0.1262
CdS	293	4.825	1.700	0.3073	0.05179
Co	298	8.836	2.808	0.3572	0.06368
Лед	257	0.960	1.768	0.3624	0.07435
Лед	248	0.960	1.730	0.3448	0.05929
Лед	263	0.960	1.703	0.3437	0.05832
Лед	268	0.960	1.702	0.3470	0.05892
Mg	0	1.799	3.006	0.4100	0.09836
SiO ₂	873	2.517	3.516	0.4257	0.1136
SiO ₂	873	2.533	3.516	0.4178	0.1159
ZnO	293	5.676	2.615	0.3587	0.07057
Y	4	4.472	2.285	0.4700	0.1149
Y	75	4.472	2.276	0.4704	0.1124
Y	200	4.472	2.225	0.4607	0.1082
Y	300	4.472	2.177	0.4479	0.1095
Y	400	4.472	2.139	0.4374	0.1045

* Коэффициенты тензора модулей упругости, входящие в c_R , Φ и Λ , взяты из [18].

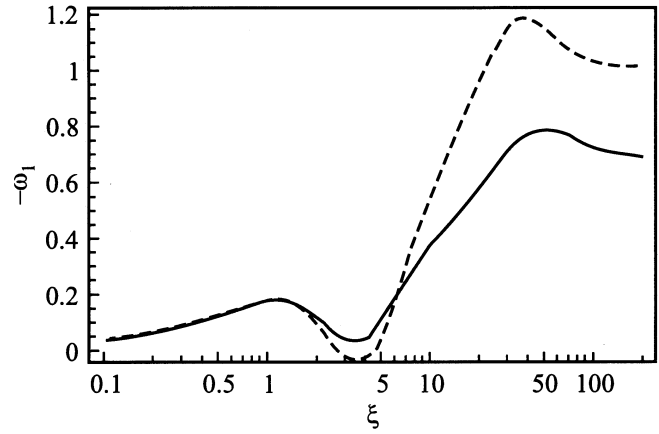


Рис. 2. График зависимости $\omega_1(\xi)$ для ZnO. Сплошная кривая — для монокристалла; штриховая — для поликристалла (с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.356$ [18]).

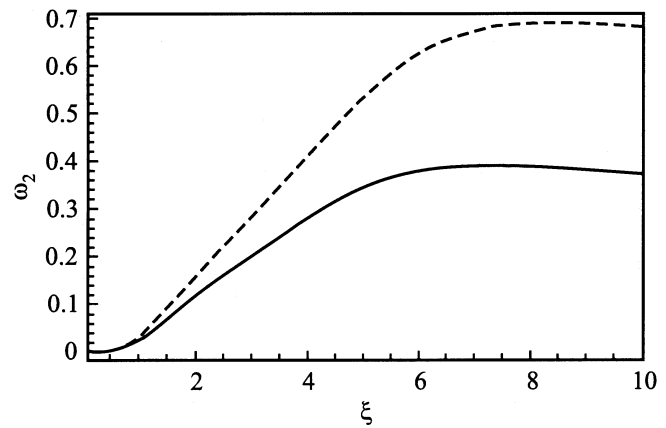


Рис. 3. График зависимости $\omega_2(\xi)$ для ZnO. Сплошная кривая — для монокристалла; штриховая — для поликристалла ($\sigma = 0.356$ [18]).

изотропной среды, когда

$$c_{11} = c_{33} = \rho c_t^2, \quad c_{44} = \rho c_t^2, \\ c_{12} = c_{13} = \rho(c_t^2 - 2c_l^2), \quad (38)$$

закон дисперсии (31) переходит в выражение (4.16) работы [15].

Численный счет функций $\omega_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ для ZnO приведен на рис. 2 и 3, где штриховые кривые соответствуют поликристаллу ZnO с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.356$. Метод расчета коэффициента Пуассона для поликристаллического вещества, по данным для монокристалла, предложен в работе [18]. Анализ рис. 2, 3 и сравнение их с соответствующими рисунками для изотропного случая [15] и для других гексагональных кристаллов из таблицы показывает, что качественно они одинаковы для всех монокристаллов и совпадают с соответствующими графиками для изотропных сред, отличаясь от них в количественном отношении.

4. Длинноволновый предел $\lambda \gg a$

Для всех известных гексагональных кристаллов выполнены соотношения

$$c_{11} > c_{12}, \quad c_{11} > c_{44}. \quad (39)$$

Из условия $c_{11} > c_{12}$ (39) следует, что $h > 0$. В выражении для $\tilde{\alpha}_{1,2}^2$ входит корень, который из условия (37) положителен $\sqrt{z^2 - 4y_2} \geq 0$. Следовательно, если $z = 0$, то $y_2 \leq 0$, отсюда получаем

$$\frac{c_{44}}{c_{11}} \leq \frac{1 + c_{44}/c_{33}}{a_1 - 2c_{13}/c_{33}} \leq 1. \quad (40)$$

Учитывая (39) и (40), легко видеть, что $\tilde{\alpha}(t)$ — чисто мнимая величина в области $0 < t < \frac{c_{44}}{c_{11}}$, а $\tilde{\alpha}_{t2}(t)$ — чисто мнимое в области $0 < t < 1$; в остальной области $\tilde{\alpha}_{1,2}(t)$ — вещественны. На основании сделанных замечаний рассмотрим $\omega_{12}(\xi)$ (32) в пределе длинных волн $\lambda \gg a$ ($\xi = ka \ll 1$). В этом случае вклад в $\omega_{12}(\xi)$ будут вносить только коэффициенты, стоящие при I_0 , так как $I_0(0) = 1$, а $I_n(0) = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Результат удобно записать, введя следующие обозначения:

$$\omega_1(\xi) = -\Phi\xi, \quad \omega_2(\xi) = \frac{\xi^4}{2} \Lambda, \quad (41)$$

где Λ и Φ являются константами, независимыми от ξ ,

$$\Phi = \frac{d\sqrt{\pi}}{2a_1} \{a_1 h^{3/2} + (2(a_1 - h)^2 + h^2) \times (\sqrt{m+n} + \sqrt{m-n})\}, \quad (42)$$

$$\Lambda = d(A + B + E). \quad (43)$$

Коэффициенты m, n, A, B, E приведены в Приложении В.

Численные значения Λ и Φ для большинства кристаллов приведены в таблице.

Таким образом, в работе теоретически исследовано распространение ПАВ Рэлея вдоль статистически шероховатой свободной поверхности $x_3 = \xi(x_1, x_2)$ гексагонального кристалла, ось симметрии шестого порядка которого перпендикулярна его поверхности, так что рэлеевская волна распространяется в базисной плоскости (Z-срез). Поскольку в подавляющем большинстве работ, посвященных обсуждаемой проблеме [2–15], твердое тело рассматривалось как изотропная среда, в настоящей работе сделана попытка выйти за рамки такого „изотропного“ рассмотрения. Шероховатость поверхности предполагалась слабой ($\delta/\lambda \ll 1$), а задача решалась с помощью модифицированного метода среднего поля [15] в рамках теории возмущений. Выбор данного метода определялся тем, что результаты, полученные с его помощью, включают гриновский тензор, который в настоящее время известен только для изотропной среды [3] и для Z-среза гексагонального кристалла [17].

В явном аналитическом виде в интегральной форме получено дисперсионное соотношение для ПАВ Рэлея

(32), которое в изотропном пределе переходит в выражение (4.16) работы [15]. Как и в изотропном случае, удалось в явном аналитическом виде получить выражение для действительной $\omega_1(\xi)$ и мнимой части $\omega_2(\xi)$ комплексного сдвига частоты $\omega_{12}(\xi)$. Однако ввиду громоздкости они не приводятся в настоящей работе.

Кривые $\omega_1(\xi)$ и $\omega_2(\xi)$ получены в результате численных расчетов для всех гексагональных кристаллов, приведенных в таблице. Результаты расчетов для типичного гексагонального кристалла ZnO приведены на рис. 2, 3.

Аналитически и численно исследовано наиболее интересное в экспериментальном плане длинноволновое приближение $\lambda \gg a$. При этом $\omega_1 \sim \omega$, $\omega_2 \sim \omega^4$, так что для относительного изменения фазовой скорости и обратной длины затухания имеем: $\Delta c/c_R \sim \omega$, $1/l \sim \omega^5$. Сравнение результатов расчетов для ZnO данной работы с результатами работы [16] показывает их совпадение. В заключение отметим, что результаты настоящей работы применимы к гексагональным кристаллам, относящимся к кристаллическим классам $\bar{6}$, $\bar{6}/m$, $6mm$, $\bar{6}m2$, 622 , $6/mmm$ в обозначениях Германа–Могена.

Приложение А

$$A(\xi) = \int_0^\infty \varepsilon \frac{dt}{2} \frac{\exp(-\xi^2 \varepsilon t/4)}{\tilde{\alpha}_{tt}(t)} \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (\varepsilon + th^2) I_0 \left(\frac{\xi^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \right) - \varepsilon \sqrt{th} I_1 \left(\frac{\xi^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \right) - \frac{\varepsilon^{3/2}}{2} I_2 \left(\frac{\xi^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \right) + h \varepsilon \sqrt{t} I_3 \left(\frac{\xi^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \right) - \frac{h^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \left(\frac{\xi^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \right) \right\}, \quad (A.1)$$

$$B(\xi) = -P \int_0^\infty \frac{dt \varepsilon^2}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{\exp(-\xi^2 \varepsilon t/4) \tilde{\alpha}_p(t)}{\tilde{\alpha}_m(t) + (1 - a_1 t) \sqrt{t - 1}} \times \sum_{n=0}^4 \Phi_n(t) I_n \left(\frac{\xi^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} \right), \quad \text{полюс } t = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (A.2)$$

$$E(\xi) = i\pi d \exp \left(-\frac{\xi^2}{4} \right) \left\{ \left(a_1^2 - 2a_1 h + \frac{3}{2} h^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + (a_1 - \varepsilon)^2 - (a_1 - h)\gamma \right) I_0 \left(\frac{\xi^2}{2} \right) + \varepsilon(\gamma + h - 2a_1) I_1 \left(\frac{\xi^2}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + 2h(a_1 - h) - h\gamma \right) I_2 \left(\frac{\xi^2}{2} \right) - h \varepsilon I_3 \left(\frac{\xi^2}{2} \right) + \frac{h^2}{2} I_4 \left(\frac{\xi^2}{2} \right) \right\},$$

$$l = -\frac{d}{\alpha_p \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \left(\varepsilon \left(1 + \frac{c_{13}}{c_{33}} \right) - a_1 \right) \left(\varepsilon \left(\frac{c_{13}}{c_{33}} - 1 \right) + a_1 \right), \quad (\text{A.3})$$

$$d = \frac{(1 - \varepsilon) \left(\frac{c_{11}}{c_{44}} - \varepsilon \right) \alpha_p \sqrt{\varepsilon}}{\left(2a_1 - \frac{c_{11}}{c_{44}} + 1 \right) \varepsilon^2 - \varepsilon a_1 \left(\frac{c_{11}}{c_{44}} + 3 \right) + 2a_1 \frac{c_{11}}{c_{44}}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= t\sqrt{t-1} \frac{2(a_1-h)^2 + h^2}{2} + \frac{\varepsilon\sqrt{t-1}}{2} \\ &+ \frac{2t(a_1-h)}{\varepsilon\alpha_p\tilde{\alpha}_p(t)} \left(\varepsilon \frac{c_{33} + c_{13}}{c_{33}} - a_1 \right) \\ &\times \left(\tilde{\alpha}_m(t) - \frac{c_{13}}{c_{33}} \sqrt{t-1} \right) + \tilde{\alpha}_m(t)(a_1 - \varepsilon), \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= -\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}\alpha_p\tilde{\alpha}_p(t)} \left(\varepsilon \frac{c_{33} + c_{13}}{c_{33}} - a_1 \right) \\ &\times \left(\tilde{\alpha}_m(t) - \frac{c_{13}}{c_{33}} \sqrt{t-1} \right) - \sqrt{\varepsilon t(t-1)}(2a_1-h), \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t-1} + 2h(a_1-h)t\sqrt{t-1} + \frac{2ht}{\varepsilon\alpha_p\tilde{\alpha}_p(t)} \\ &\left(\varepsilon \frac{c_{33} + c_{13}}{c_{33}} - a_1 \right) \left(\tilde{\alpha}_m(t) - \frac{c_{13}}{c_{33}} \sqrt{t-1} \right), \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(t) &= -h\sqrt{\varepsilon t(t-1)}, \quad \Phi_4(t) = \frac{h^2}{2} t\sqrt{t-1}, \\ h &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2c_{44}}, \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{2\varepsilon \left(\varepsilon \left(1 + \frac{c_{13}}{c_{33}} \right) - a_1 \right)^2}{a_1^2(1 - \varepsilon) - \left(1 + \frac{2c_{13} + c_{11}}{c_{33}} - a_1 \right) \varepsilon^2},$$

$$\tilde{\alpha}_p(t) = \tilde{\alpha}_{t1}(t) + \tilde{\alpha}_{t2}(t), \quad \alpha_p = \tilde{\alpha}_p(1/\varepsilon), \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{\alpha}_{t1}^2(t) = 1/2 \left(z(t) + \sqrt{z^2(t) - 4y_2(t)} \right),$$

$$\tilde{\alpha}_{t2}^2(t) = 1/2 \left(z(t) - \sqrt{z^2(t) - 4y_2(t)} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{\alpha}_m(t) = \frac{\tilde{\alpha}_{t1}(t)\tilde{\alpha}_{t2}(t)}{\sqrt{t-1}},$$

$$\tilde{\alpha}_n(t) = \begin{cases} \sqrt{ht-1}, & ht-1 \geq 0, \\ -i\sqrt{1-ht}, & ht-1 < 0, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$y_2(t) = c_{11}/c_{33}(t-1)(t - c_{44}/c_{11}),$$

$$z(t) = (a_1 - 2c_{13}/c_{33})t - (1 + c_{44}/c_{33}), \quad (\text{A.12})$$

$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ — независимые компоненты тензора модулей упругости гексагонального кристалла.

Приложение В

$$\begin{aligned} m &= \frac{a_1}{2} - \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad n = \sqrt{m^2 - \frac{c_{11}}{c_{33}}}, \\ A &= \frac{\varepsilon^{3/2}}{2h} \left(\varepsilon + \frac{2}{3}h \right), \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -\text{Im} \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon^2 \tilde{\alpha}_p(t)}{\tilde{\alpha}_m(t) + (1 - a_1 t)\sqrt{t-1}} \\ &\times \left\{ t\sqrt{t-1} \frac{2(a_1-h)^2 + h^2}{2} + \frac{\varepsilon\sqrt{t-1}}{2} \right. \\ &+ \frac{\varepsilon\sqrt{t-1}}{2} + \frac{t2(a_1-h)}{\varepsilon\alpha_p\tilde{\alpha}_p(t)} \left(\varepsilon \frac{c_{33} + c_{13}}{c_{33}} - a_1 \right) \\ &\left. \times \left(\tilde{\alpha}_m(t) - \frac{c_{13}}{c_{33}} \sqrt{t-1} \right) + \tilde{\alpha}_m(t)(a_1 - \varepsilon) \right\}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \pi d \left(a_1^2 - 2a_1h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right. \\ &\left. + (a_1 - \varepsilon)^2 - (a_1 - h)\gamma \right). \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Lord Rayleigh. Proc. Lond. Math. Soc. **17**, 54 (1887).
- [2] Е.И. Уразаков, Л.А. Фальковский. ЖЭТФ **63**, 6(12), 2297 (1972).
- [3] A.A. Maradudin, D.L. Mills. Ann. Phys. (N.Y.) **100**, 2, 262 (1976).
- [4] В.Г. Полевой. Акуст. журн. **29**, 1, 91 (1983).
- [5] В.В. Косачёв, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. ЖЭТФ **94**, 9, 162 (1988).
- [6] Нгуен Ван Чонг. Укр. физич. журн. **28**, 11, 1699 (1983).
- [7] В.В. Крылов, В.Е. Лямов. ЖТФ **49**, 11, 2514 (1979).
- [8] В.В. Косачёв, Ю.Н. Лохов, М.В. Поликарпов. Тез. докл. XIII Всесоюзной конференции по акустоэлектронике и квантовой акустике. (1986). Т. 1. С. 131.
- [9] A.G. Eguiluz, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **28**, 2, 728 (1983).
- [10] A.P. Mayer, M. Lehner. Waves in Random Media **4**, 3, 321 (1994).
- [11] X. Huang, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **36**, 15, 7827 (1987).
- [12] В.В. Косачёв, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. ФТТ **32**, 7, 2045 (1990).
- [13] V.V. Kosachev, Yu.N. Likhov, V.N. Chukov. Solid State Commun. **73**, 8, 535 (1990).
- [14] С.З. Дунин, Г.А. Максимов. Препринт МИФИ 032-88, М. (1988).
- [15] V.V. Kosachev, A.V. Shchegrov. Ann. Phys. (N.Y.) **240**, 2, 225 (1995).
- [16] A.V. Shchegrov. J. Appl. Phys. **78**, 3, 1565 (1995).
- [17] L. Dobrzynski, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **14**, 6, 2200 (1976); Erratum. Phys. Rev. B **15**, 4, 2432 (1977).
- [18] O.L. Anderson. Phys. Acoust. **B3**, 80 (1965).