

Механизм перехода между $1q$ - и $3q$ -фазами в двумерной модели кристалла

© С.В. Дмитриев

Университет электросвязи, Чёфу-ши,
182-8585 Токио, Япония

E-mail: sergey-d@fedu.uec.ac.jp

(Поступила в Редакцию 17 декабря 2001 г.
В окончательной редакции 29 мая 2002 г.)

Предлагается распространение исследованной ранее модели кристалла с вращательными степенями свободы на двумерный случай. Модель содержит два нелинейных члена, которые в зависимости от соотношения параметров допускают устойчивость $1q$ -, $2q$ - или $3q$ -модулированных фаз. Численно исследуется переход между $1q$ - и $3q$ -фазами, характерный для кристаллов с гексагональной симметрией. Модель воспроизводит последовательность фазовых переходов, наблюдаемых в кварце при охлаждении, и объясняет экспериментально обнаруженное увеличение температурного интервала $1q$ -фазы при одноосном внешнем нагружении.

Возникновение модулированных фаз в кристаллах интересно, во-первых, с точки зрения теории фазовых переходов, а во-вторых, как пример более общего физического явления — пространственной локализации энергии при однородных внешних воздействиях. Этими и другими причинами объясняется необычайно большой интерес к исследованию данного явления [1–7]. Модулированная фаза в кристалле диэлектрика возникает из высокосимметричной соразмерной (нормальной) фазы в результате фазового перехода второго рода, вызванного обращением в нуль частоты акустической моды колебаний с волновым вектором, лежащим внутри первой зоны Бриллюэна. Такой переход в эксперименте наблюдается, как правило, при понижении температуры. В модулированной фазе атомы оказываются несколько смещенными от решеточных положений по некоторому периодическому закону. Вблизи точки перехода модуляция близка к синусоидальной. Иногда модуляция имеет вид суперпозиции двух или трех синусоидальных волн. Такие модулированные фазы называют соответственно $2q$ - и $3q$ -фазами в отличие от $1q$ -фазы, имеющей модуляцию в виде одной волны. Несоразмерной фазой называют модулированную фазу, для которой отношение параметра решетки к длине волны модуляции выражается иррациональным числом. В действительности точное значение отношения неизвестно и его представляют в виде несократимой дроби. Поэтому с физической точки зрения не будет ошибкой считать несоразмерной такую фазу, для которой данное отношение выражается несократимой дробью с достаточно большим знаменателем [8].

При дальнейшем охлаждении модулированная фаза может претерпевать ряд изменений и в конце концов, как правило, уступает место низкосимметричной соразмерной фазе. Например, в кварце, SiO_2 , при охлаждении наблюдается следующая цепочка фазовых превращений: нормальная, $1q$, $3q$ и соразмерная фазы [9,10], а в кристалле $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$: нормальная, $2q$, $1q$ и соразмерная фазы [11,12].

Для описания несоразмерных фаз были разработаны различные микроскопические модели. Так называемая ANNNI-модель, модифицированная в работе [13], качественно описывает цепочку фазовых превращений, содержащую несоразмерную, соразмерную высокого порядка и низкосимметричную соразмерную фазы для кристаллов, принадлежащих семейству A_2BX_4 . Переход между $3q$ - и $3q'$ -фазами, имеющими различный период модуляции, был описан в рамках трехмерной гексагональной модели методом молекулярной динамики в работе [14]. Этот же метод использовался для изучения кинетики перехода $1q \rightarrow 3q$ и $3q \rightarrow 1q$ [14,15]. В работах [14,17] было показано, что для получения устойчивых $2q$ - и $3q$ -фаз гамильтониан системы должен содержать особые нелинейные члены. После этих и ряда других работ стали ясны условия существования и устойчивости $2q$ - и $3q$ -фаз в двумерных и трехмерных моделях, однако сами переходы $1q \rightarrow 2q$ и $1q \rightarrow 3q$ оставались недостаточно изученными. Первый из двух упомянутых переходов был подробно рассмотрен нами в [18]; второй будет обсуждаться в настоящей работе (см. далее). Наше исследование основывается на микроскопической модели, содержащей частицы конечных размеров, именуемой в зарубежных публикациях „elastically hinged molecule“ (или ЕНМ-моделью) [19,20]. Одномерный вариант модели [19,20] распространяется здесь на двумерный случай. Следует заметить, что одномерные модели, построенные на других физических предположениях [21,22], описываются уравнениями движения, математически эквивалентными уравнению одномерной ЕНМ-модели. Гамильтониан двумерной ЕНМ-модели совпадает с гамильтонианом, изученным ранее в работе [17], с одним отличием: линейная часть гамильтониана ЕНМ-модели описывает случай произвольного внешнего давления, в то время как в работе [17] рассмотрен случай гидростатического давления. В результате в ЕНМ-модели обращение в нуль частоты мягкой моды возможно в любой точке зоны Бриллюэна в отличие от

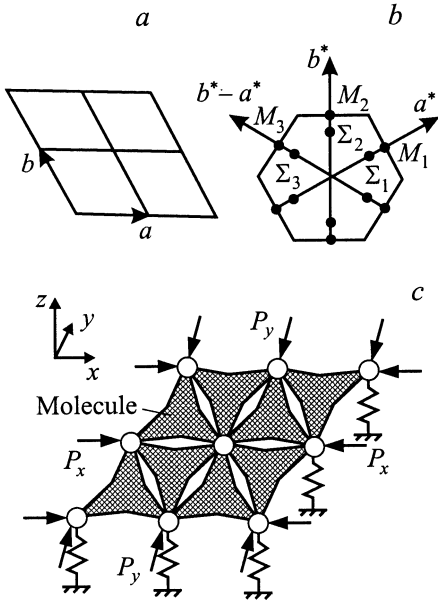


Рис. 1. *a* — гексагональная решетка, *b* — обратная решетка и первая зона Бриллюэна, *c* — двумерная ЕНМ-модель. Жесткие молекулы соединены друг с другом посредством упругих шарниров. Модель подвержена действию внешнего давления с компонентами P_x, P_y .

работы [17], где обращение в нуль происходит одновременно в трех точках, лежащих на высокосимметричных направлениях $[1,0]$, что, как показано далее, не дает возможности изучить переход между 1q- и 3q-фазами.

Континуальный аналог одномерной ЕНМ-модели имеет вид [19]

$$u_{tt} + Fu_{xxxx} + Pu_{xx} + u + u^3 = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — неизвестное поле перемещений, а параметры F и P описывают упругие свойства среды и внешнее давление соответственно.

Выпишем очевидное двумерное обобщение уравнения (1)

$$u_{tt} + F_x u_{xxxx} + 2F_{xy} u_{xxyy} + F_y u_{yyyy} + P_x u_{xx} + P_y u_{yy} + u + Hu^2 + u^3 = 0, \quad (2)$$

где $u(x, y, t)$ — неизвестная функция перемещений, F_x, F_{xy}, F_y — упругие константы анизотропной среды, P_x, P_y — компоненты внешнего давления, H — параметр нелинейной части уравнения, которая, как и в [17], выбрана в несколько более общем виде, чем в уравнении (1).

Заметим, что в (1) коэффициент при u^3 может быть нормализован к единице, но в (2) этого сделать нельзя. Тем не менее для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением данного частного случая. Заметим также, что уравнения, аналогичные уравнениям (1) и (2), широко используются в теории балок и тонких пластин.

Пусть векторы $\mathbf{a} = (1, 0)$ и $\mathbf{b} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ генерируют гексагональную решетку с узлами $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, где m, n — целые числа (рис. 1, *a*). Обратная решетка генерируется векторами $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*$ (показаны на рис. 1, *b* вместе с первой зоной Бриллюэна).

Дискретный аналог уравнения (2), построенный на гексагональной решетке, имеет вид

$$\begin{aligned} & \ddot{u}_{m,n} + (3P_x - P_y - 48F)(u_{m+1,n} + u_{m-1,n}) \\ & + 2(P_y - 24F)(u_{m+1,n+1} + u_{m,n+1} + u_{m-1,n-1} + u_{m,n-1}) \\ & + 16F(u_{m+2,n+1} + u_{m+1,n+2} + u_{m-1,n+1} \\ & + u_{m-2,n-1} + u_{m-1,n-2} + u_{m+1,n-1}) \\ & + (1 - 6P_x - 6P_y + 192F)u_{m,n} + Hu_{m,n}^2 + u_{m,n}^3 = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

В (3) мы ограничились случаем изотропной среды, $F_x = F_{xy} = F_y = F$.

Гамильтониан двумерной ЕНМ-модели, основанной на гексагональной решетке, есть

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{m,n} (\dot{u}_{m,n})^2 + \frac{1}{2} (3P_x - P_y - 48F) \\ & \times \sum_{m,n} u_{m,n} (u_{m+1,n} + u_{m-1,n}) + (P_y - 24F) \\ & \times \sum_{m,n} u_{m,n} (u_{m+1,n+1} + u_{m,n+1} + u_{m-1,n-1} + u_{m,n-1}) \\ & + 8F \sum_{m,n} u_{m,n} (u_{m+2,n+1} + u_{m+1,n+2} + u_{m-1,n+1} \\ & + u_{m-2,n-1} + u_{m-1,n-2} + u_{m+1,n-1}) \\ & + \frac{1}{2} (1 - 6P_x - 6P_y + 192F) \\ & \times \sum_{m,n} u_{m,n}^2 + \frac{H}{3} \sum_{m,n} u_{m,n}^3 + \frac{1}{4} \sum_{m,n} u_{m,n}^4. \quad (4) \end{aligned}$$

Возможны различные физические интерпретации модели (3), (4). Иногда исходят из рассмотрения взаимодействия точечных частиц, не имеющих размера и формы [17]. ЕНМ-модель дает другую интерпретацию [19]. Напомним, что многие диэлектрические кристаллы состоят из атомов, собранных в очень жесткие, почти недеформируемые группы. Таков, например, кристалл кварца, состоящий из кластеров SiO_4 , имеющих форму тетраэдров. Тетраэдры соединены в вершинах общими атомами кислорода, играющими роль шарниров. Фазовый переход в кварце происходит за счет взаимного поворота шарнирно соединенных тетраэдров, при этом деформация тетраэдров пренебрежимо мала. Кварц обладает гексагональной симметрией, и в несоизмеримой фазе кварца модуляция распространяется в плоскости (x, y) , так что ее можно рассматривать в рамках двумерной модели. Эти соображения привели нас к рассмотрению двумерного слоя абсолютно жестких треугольных частиц

(молекул), соединенных упругими шарнирами (рис. 1, *c*). Если угол между осями двух соседних молекул отличен от нуля, то в упругом шарнире возникает момент сил, стремящийся уменьшить абсолютное значение этого угла. Жесткость шарнира обозначена через F . Каждый шарнир имеет одну степень свободы — перемещение перпендикулярно плоскости (x, y) . Шарниры испытывают действие потенциала, содержащего ангармонические члены третьего и четвертого порядков. Потенциал призван описать влияние остальной части кристалла на рассматриваемый слой молекул. Вдоль плоскости (x, y) приложено внешнее давление с компонентами P_x, P_y .

Гармоническая часть уравнения (1) приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$\begin{aligned} \omega^2(\kappa_x, \kappa_y) = & 32F [C_x C_y (1 + 2C_x + 2C_y) \\ & + S_x S_y (1 - 2C_x - 2C_y) - C_x - C_y] \\ & + 2(3P_x - P_y - 48F)C_x + 2(2P_y - 48F) \\ & \times (C_x C_y - S_x S_y + C_y) + 1 - 6P_x - 6P_y + 192F, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C_x = \cos(2\pi\kappa_x), \quad C_y = \cos(2\pi\kappa_y), \quad S_x = \sin(2\pi\kappa_x), \\ S_y = \sin(2\pi\kappa_y), \quad \kappa = \kappa_x a^* + \kappa_y b^*. \end{aligned}$$

Мы полагаем упругую константу F и параметр H температурно-зависимыми. Изменение температуры и/или внешнего давления P_x, P_y приводит к движению точки в четырехмерном фазовом пространстве модели и к возможности фазовых переходов.

Уравнение (3) имеет очевидное тривиальное решение $u_{m,n} = 0$ (нормальная фаза). Это решение устойчиво, если функция $\omega^2(\kappa_x, \kappa_y)$, заданная уравнением (5), строго положительна. При изменении параметров модели функция (5) изменяется и возможно ее обращение в нуль в некоторой точке (κ_x, κ_y) , что приводит к появлению мягкой моды

$$\begin{aligned} u_{m,n} = Q_1 \cos[2\pi(m\kappa_x + n\kappa_y) + \varphi_1] \\ + Q_2 \cos[2\pi(m\kappa_x - n\kappa_y) + \varphi_2], \end{aligned} \quad (6)$$

где по крайней мере один из коэффициентов Q_1, Q_2 отличен от нуля. Если точка (κ_x, κ_y) лежит на одном из высокосимметричных направлений $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*$ или $\mathbf{b}^* - \mathbf{a}^*$ (рис. 1, *b*), то уравнение (6) описывает $1q$ -модулированную фазу; в противном случае это могут быть как $1q$ -, так и $2q$ -фаза (в зависимости от значения коэффициентов Q_1 и Q_2). Если структура, определяемая уравнением (6), имеет наименьшую энергию при обоих коэффициентах Q_1 и Q_2 , отличных от нуля, то это соответствует $2q$ -фазе; если же один из коэффициентов оказывается равным нулю, то имеет место $1q$ -фаза. Если функция (5) обращается в нуль одновременно в нескольких точках зоны Бриллюэна, то перемещения

в модулированной фазе представляются линейной суперпозицией всех мягких мод (6). Коэффициенты суперпозиции должны определяться из условия минимума потенциальной энергии.

Опишем условия обращения в нуль функции (5). Очевидно, что если $\omega^2(\kappa_x, \kappa_y) = 0$, то и $\omega^2(-\kappa_x, -\kappa_y) = 0$. В дальнейшем будет упоминаться только одна из этих точек. Модель допускает обращение функции (5) в нуль в любой точке зоны Бриллюэна, однако мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев.

1) $P_x = P_y = P$. Этот случай был изучен в работе [17]. Дисперсионная поверхность (5) имеет симметрию шестого порядка, поэтому ее обращение в нуль происходит одновременно в точках M_1, M_2 и M_3 или одновременно в точках Σ_1, Σ_2 и Σ_3 (рис. 1, *b*). Обращение в нуль в точках M_1, M_2, M_3 имеет место при выполнении условий

$$F \leq P/8, \quad 1 - 16P + 256F = 0, \quad (7)$$

а в точках $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ — при

$$F > P/8, \quad F = P^2/4. \quad (8)$$

2) $P_y > P_x$. Дисперсионная поверхность (5) имеет симметрию второго порядка, ее обращение в нуль происходит либо в точке M_2 при

$$F \leq P_y/8, \quad 1 - 16P_y + 256F = 0, \quad (9)$$

либо в точке Σ_2 при

$$F > P_y/8, \quad F = P_y^2/4. \quad (10)$$

Возможный сценарий перехода $1q \leftrightarrow 3q$ связан с обращением функции (5) в нуль одновременно в трех точках зоны Бриллюэна. В этом случае $3q$ -фаза есть суперпозиция трех $1q$ -мод, выраженных уравнением (6). Предположим теперь, что симметрия дисперсионной поверхности понизилась, например в результате приложения малого одноосного внешнего давления. Обращение функции (5) в нуль произойдет первоначально в одной из трех точек, и возникнет $1q$ -фаза. Однако дальнейшее изменение внешних параметров может привести к обращению в нуль функции (5) в других точках зоны Бриллюэна с возможным переходом $1q \rightarrow 3q$.

Сначала обсудим случай $P_x = P_y = P$. Положим $H = -0.01$, что обеспечивает возможность существования устойчивой $3q$ -фазы [17]. Пусть точка в фазовом пространстве параметров движется из области устойчивости тривиального решения и пересекает параболу $F = P^2/4$ (см. (8)) в точке с координатами

$$P(\kappa) = \frac{1}{8} [\sin(\pi\kappa)]^{-2}, \quad F(\kappa) = \frac{P^2(\kappa)}{4}, \quad (11)$$

тогда функция (5) обратится в нуль одновременно в трех точках: $\kappa\mathbf{a}^*, \kappa\mathbf{b}^*, \kappa(\mathbf{b}^* - \mathbf{a}^*)$ (точки $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ на рис. 1, *b*), где $\kappa = M/N$, $N > 2M$, M, N — взаимно простые положительные целые.

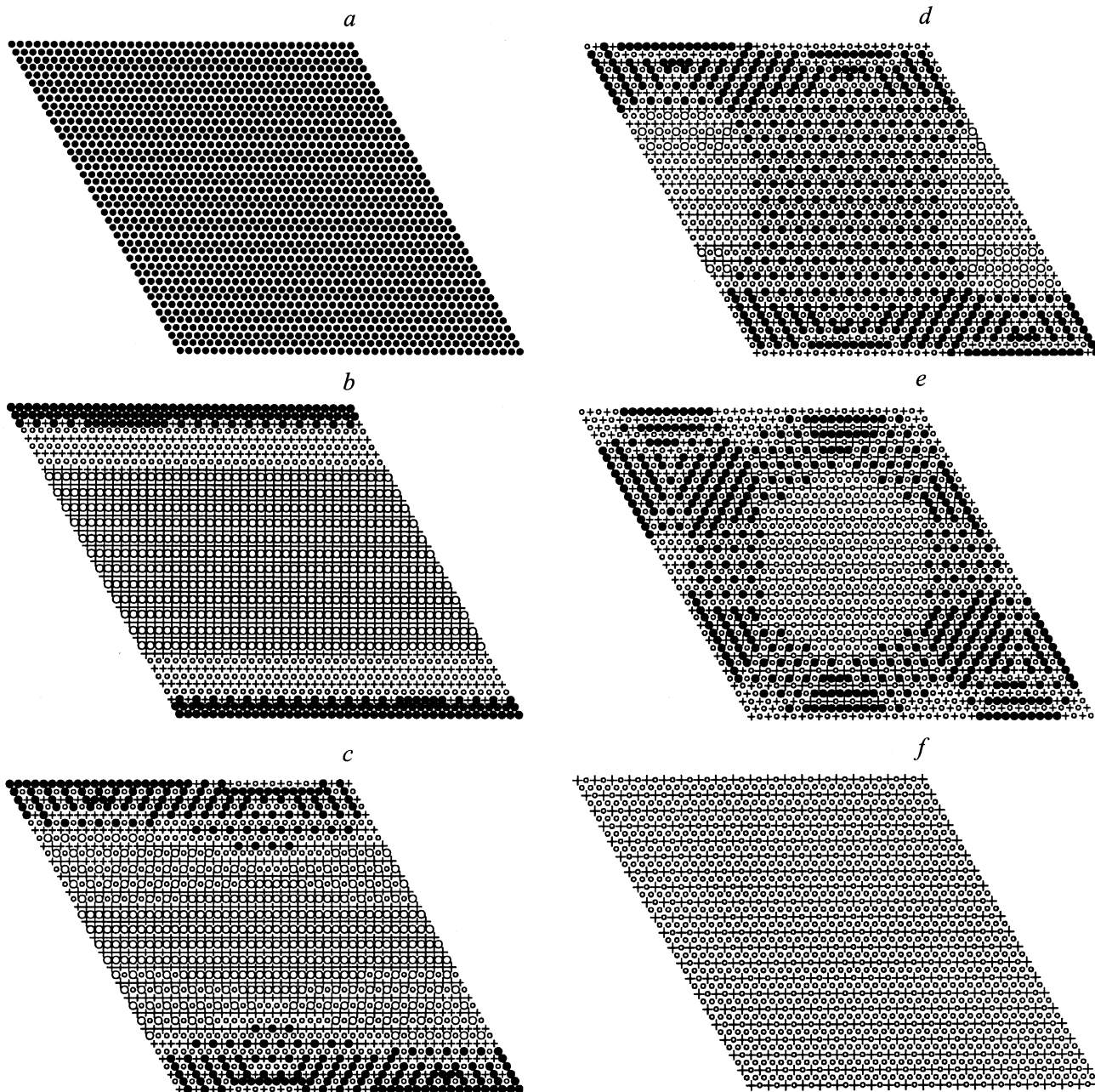


Рис. 2. Цепочка фазовых превращений, наблюдаемая в ЕНМ-модели при уменьшении F . a — нормальная фаза (тривиальное решение), b — „переохлажденная“ $1q$ -несоразмерная фаза с $\kappa = 20/41$, c, d — промежуточные этапы релаксации в $3q$ -фазу, e — $3q$ -несоразмерная фаза с $\kappa = 20/41$, f — $3q$ -соразмерная низкосимметричная фаза с $\kappa = 1/2$.

В качестве примера рассмотрим движение точки в фазовом пространстве (P, F) вдоль линии

$$P = \text{const} = P(\kappa), \tag{12}$$

где $P(\kappa)$ определяется из уравнения (11). Мы рассмотрим случай κ , близких к $1/2$, а именно $\kappa = 20/41$. Данное κ предполагает длину волны модуляции в 41 узел. Размер сетки в нашем численном моделировании был равен 82×82 узла.

Тривиальное решение (нормальная фаза) устойчиво, пока $F > F(20/41)$. При $F = F(20/41)$ происходит пе-

реход в несоразмерную фазу в результате обращения в нуль частот колебаний одновременно в трех точках зоны Бриллюэна: $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Численно было установлено, что при этом образуется $3q$ -фаза.

Для изучения перехода $1q \rightarrow 3q$ предположим наличие малого отклонения от условия $P_x = P_y = P$, а именно положим $P_x = P$, $P_y = P + \varepsilon$, где ε мало по сравнению с P и (для определенности) положительно. ε есть малое одноосное давление, приложенное вместе с гидростатическим давлением P . Наличие малого одноосного давления понижает симметрию дисперсионной по-

верхности, и в соответствии с (10) ее обращение в нуль произойдет в точке Σ_2 с появлением $1q$ -несоразмерной фазы. Дальнейшее уменьшение F приводит к обращению в нуль частот в точках Σ_1, Σ_3 , и происходит переход в $3q$ -несоразмерную фазу. Фазовые превращения, наблюдаемые в ЕНМ-модели при уменьшении F вдоль линии (12), а также кинетика перехода $1q \rightarrow 3q$ показаны на рис. 2 при $H = -0.01$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$. К уравнению движения (3) был добавлен диссипативный член для того, чтобы найти равновесные состояния модели при различных значениях внешних параметров. Интервал $[-u_{\max}, u_{\max}]$, где u_{\max} есть максимальное абсолютное значение перемещения узлов, был разделен на пять равных интервалов, а перемещения узлов обозначены одним из символов (большой светлый кружок, маленький светлый кружок, темный кружок, маленький крестик, большой крестик) в зависимости от интервала, в который попадает перемещение данного узла. На рис. 2, *a* представлена нормальная фаза (тривиальное решение). На рис. 2, *b* показан один период „переохлажденной“ $1q$ -фазы. Параметр F был мгновенно изменен до значения $F = F(20/41) - 10^{-4}$, так что $1q$ -фаза стала неустойчивой и начался переход $1q \rightarrow 3q$. На рис. 2, *c, d* показаны переходные стадии процесса, а на рис. 2, *e* представлен один период устойчивой $3q$ -несоразмерной фазы с $\kappa = 20/41$, полученной в результате процесса релаксации. При дальнейшем уменьшении параметра F происходит переход $3q$ -несоразмерной фазы в соразмерную низкосимметричную $3q$ -фазу с $\kappa = 1/2$ (рис. 2, *f*). Один из возможных механизмов последнего из упомянутых переходов обсуждался в [23].

Вышеприведенные результаты проливают свет на одно явление, экспериментально обнаруженное в [10]. Авторами этой работы было показано, что температурный интервал существования $1q$ -несоразмерной фазы кварца становится шире при приложении одноосного внешнего давления. В рамках двумерной ЕНМ-модели этот факт можно объяснить тем, что с ростом одноосного внешнего давления возрастает степень искажения дисперсионной поверхности и как следствие в фазовом пространстве увеличивается путь между последовательными обращениями в нуль частот сначала в точке Σ_2 , а затем в точках Σ_1, Σ_3 .

Выше был рассмотрен случай $P_y > P_x$. Заметим, что в случае $P_x > P_y$ частоты обратятся в нуль сначала в точках Σ_1, Σ_3 , а затем в точке Σ_2 . Это означает, что наша модель может применяться и к моделированию перехода $2q \rightarrow 3q$.

Таким образом, в настоящей работе одномерная ЕНМ-модель была распространена на двумерный случай с гексагональной симметрией, что позволило изучить механизм и смоделировать кинетику фазового перехода между $1q$ - и $3q$ -несоразмерными фазами. В построенной модели при гидростатическом внешнем давлении дисперсионная поверхность может обращаться в нуль лишь одновременно в трех точках зоны Бриллюэна, что приводит к переходу из нормальной в $3q$ -несоразмерную

фазу. Малое одноосное давление, приложенное вместе с гидростатическим давлением, понижает симметрию дисперсионной поверхности, и обращение в нуль при медленном изменении внешних параметров происходит сначала в одной, а затем и в двух других точках зоны Бриллюэна. Такое поведение отвечает переходу из нормальной в $1q$ -фазу, а затем из $1q$ - в $3q$ -несоразмерную фазу. Следовательно, модель описывает цепочку фазовых превращений, наблюдаемую в кварце. Более того, модель объясняет рост температурного интервала $1q$ -фазы в кварце с увеличением приложенного одноосного давления.

Автор выражает признательность А.А. Васильеву (Тверской государственной университет) за многочисленные обсуждения.

Список литературы

- [1] Incommensurate Phases in Dielectrics. Vol. 14.1, 14.2 / Ed. R. Blinc and A.P. Levanyuk. North Holland, Amsterdam (1986).
- [2] H.Z. Cummins. Phys. Rep. **185**, 5–6, 211 (1990).
- [3] Д.Г. Санников, А.П. Леванюк. ФТТ **20**, 4, 580 (1978).
- [4] Д.Г. Санников, В.А. Головки. ФТТ **26**, 4, 678 (1984).
- [5] J.M. Yeomans. In: Solid State Physics. Academic Press, Orlando (1988). Vol. 41.
- [6] W. Selke. In: Phase Transitions and Critical Phenomena / Ed. C. Domb and J.L. Lebowitz. Academic, N.Y. (1992). Vol. 15.
- [7] R. Currat, T. Janssen. In: Solid State Physics. Academic Press, Orlando (1988). Vol. 41.
- [8] T. Janssen, J.A. Tjon. Phys. Rev. B **25**, 6, 3767 (1982).
- [9] G. Dolino. In: Incommensurate Phases in Dielectrics. Vol. 14.2.
- [10] K. Abe, K. Kawasaki, K. Kowada, T. Shigenari. J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 2, 404 (1991).
- [11] S. Barre, H. Mutka, C. Roucau, A. Litzler, J. Schneck, J.C. Toledano, S. Bouffard, F. Ruller-Albenque. Phys. Rev. B **43**, 13, 11 154 (1991).
- [12] J.C. Toledano, J. Schneck, G. Errandonea. In: Incommensurate Phases in Dielectrics. Vol. 14.2.
- [13] Y. Yamada, N. Hamaya. J. Phys. Soc. Jpn. **52**, 3466 (1983).
- [14] K. Parlinski, G. Chapuis. Phys. Rev. B **47**, 21, 13 983 (1993).
- [15] K. Parlinski, G. Chapuis. Phys. Rev. B **49**, 17, 11 643 (1994).
- [16] K. Parlinski. Phys. Rev. B **48**, 5, 3016 (1993).
- [17] K. Parlinski, S. Kwiecinski, A. Urbanski. Phys. Rev. B **46**, 9, 5110 (1992).
- [18] S.V. Dmitriev, T. Shigenari, K. Abe. Phys. Rev. B **58**, 5, 2513 (1998).
- [19] S.V. Dmitriev, K. Abe, T. Shigenari. J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 12, 3938 (1996).
- [20] S.V. Dmitriev, T. Shigenari, A.A. Vasiliev, K. Abe. Phys. Rev. B **55**, 13, 8155 (1997); S.V. Dmitriev, T. Shigenari, K. Abe. J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 9, 2732 (1997); T. Shigenari, A.A. Vasiliev, S.V. Dmitriev, K. Abe. Ferroelectrics **203**, 1/4, 335 (1997); S.V. Dmitriev, K. Abe, T. Shigenari. Physica D **147**, 1–2, 122 (2000).
- [21] J.J.M. Slot, T. Janssen. Physica D **32**, 1, 27 (1988).
- [22] Y. Ishibashi. J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 1, 212 (1991).
- [23] S.V. Dmitriev, H. Jimbo, K. Abe, T. Shigenari. Phys. Rev. E **64**, 3, 036 202 (2001).