Журнал технической физики, 2017, том 87, вып. 11

01

Расчет поля в плоскослоистых средах микроэлектроники

© И.А. Конников
e-mail: konnikov_i@mail.ru

(Поступило в Редакцию 7 февраля 2017 г.)

Предложена ориентированная на решение задач микроэлектроники модификация метода расчета горизонтальной и вертикальной компонент монохроматического поля, создаваемого в плоскослоистой среде горизонтально протекающим током и описываемого волновым уравнением. Предлагаемое решение базируется на использовании ранее предложенного и апробированного метода эквивалентной постоянной распространения, который позволяет значительно снизить объем вычислений по сравнению с другими методами, основанными на строго динамическом подходе. Рассмотрен ход решения задачи, иллюстрирующей применение предлагаемого метода для области малых расстояний.

DOI: 10.21883/JTF.2017.11.45118.2197

Введение. Известные решения

Решение многих задач технической физики сводится к решению волнового уравнения с последующим вычислением поля реального источника известной формы и размеров через функцию Грина; при этом в качестве физической модели среды, где рассчитывается поле, нередко может быть принята плоскослоистая среда. Как известно [1,2], строгое аналитическое решение волнового уравнения на частоте $\omega > 0$ для электромагнитного поля в плоскослоистой среде описывается интегралом на действительной полуоси от комплекснозначной функции, включающей в качестве одного из сомножителей функцию Бесселя первого рода. В англоязычной литературе интегралы этого типа известны как Sommerfeld-type integrals (см., например, [3,4]); в настоящей работе они именуются S-интегралами.

Методы вычисления интегралов указанного типа (S-интегралов) хорошо известны. Значения интегралов вычисляются приближенно, для чего применяются различные численные схемы, либо асимптотические методы (чаще всего это — метод перевала), либо их комбинации. Для решения многих прикладных задач, и особенно для проведения научных исследований, такие методы обычно являются вполне приемлемыми. Однако, опуская детальный разбор известных методов вычисления S-интегралов, обобщая полученные к настоящему времени результаты, можно констатировать, что для некоторых технических приложений S-интегралы все же мало пригодны для практического использования в качестве математической модели электромагнитного поля в плоскослоистой среде. В частности, для решения проектных задач микроэлектроники (например, для количественной оценки перекрестных помех), когда поле требуется вычислять сотни и даже тысячи раз, при использовании компьютеров широко доступного класса S-интегралы совершенно непригодны вследствие непомерно высоких затрат машинного времени. Тем же недостатком обладают хорошо известные методы расчета поля, использующие пространственную дискретизацию моделируемого объекта на мелкой сетке. Наиболее известным и широко используемым, по-видимому, является так называемый метод FDTD[1] (метод конечной разности во временной области), предложенный предположительно в [4]. Однако, как справедливо отмечается в [5], метод FDTD требует значительных вычислительных ресурсов и потому неконкурентоспособен. Так, например, при решении конкретной задачи [6] с использованием метода ILCM[2] удалось добиться на 3 десятичных порядка большего быстродействия, чем при использовании методов FDTD и MOM[3] [6].

При реализации метода ILCM [7,8] требуется решение интегрального уравнения; метод не приспособлен для решения ряда актуальных задач и может потребовать немалых вычислительных ресурсов. Даже специальная адаптация метода ILCM под некоторые задачи, требующие многократного вычисления поля (например, задачи расчета помехонесущего поля и оценки внутренней электромагнитной совместимости в микросхемах и на печатных платах), не приводит к необходимому и достаточному снижению времени счета и является лишь паллиативом.

Заслуживает особого внимания модифицированный метод эквивалентной схемы частичного элемента (PEEC-method)[4] [8,9], разработку которого после выхода монографии [8], по-видимому, можно считать в основном завершенной. Метод ориентирован на решение задач электроники для частоты $\omega > 0$ и адаптирован для расчетов во временной области. Однако, как отмечается в [10], метод PEEC не учитывает излучение и время распространения электромагнитной волны; необходимость анализа структур, размеры которых соизмеримы с длиной волны, потребовала серьезно усложнить метод. Гибридный FDTD/PEEC-метод, предложенный в [10], также

[1] FDTD — Finite Difference Time Domain.
[2] ILCM — Intermediate Level Circuit Model.
[3] MOM — Method Of Moments.
[4] PEEC — Partial Element Equivalent Circuit.

не обладает достаточным быстродействием, приемлемым при решении ряда проектных задач электроники, и не сможет существенно изменить ситуацию; необходим прагматичный, „технический“ подход к решению задачи, получившей в теоретической физике решение, не всегда пригодное для практического использования. Полученные с помощью вычисления S-интегралов для решения задач электроники результаты относятся в основном к оценке взаимовлияния компланарных проводников, параллельных плоским границам раздела слоев; для такой оценки расчет вертикальной компоненты поля не нужен. Взаимовлияние проводов, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях, не рассматривалось (по сведениям автора). В то же время при оценке взаимовлияния некомпланарных проводников необходимо использовать, как минимум, две компоненты поля, в том числе вертикальную. Дальнейшее развитие методов расчета поля в плоскослоистой среде остается по-прежнему актуальным.

Метод эквивалентной постоянной распространения

Реальной альтернативой названным методам расчета поля в некоторых случаях может явиться метод эквивалентной постоянной распространения (ЭПР), позволяющий избежать вычисления S-интегралов. Метод ЭПР ориентирован приблизительно на тот же частотный диапазон, что и метод РЕЕС, но обладает существенно меньшей вычислительной емкостью. Метод ЭПР был предложен в [11] и затем развит в [12,13] применительно к задаче расчета перекрестных наводок в компланарных проводниках радиоэлектронного модуля. Параметры эквивалентной схемы, которая используется для моделирования таких наводок в системах автоматизированного проектирования (САПР), при использовании метода ЭПР рассчитываются [14] не только через статическую составляющую поля, но в отличие от РЕЕС-метода с учетом также и поля излучения.

В [11] была проведена апробация метода ЭПР на ряде задач, для которых известно строгое решение, подтверждена корректность используемого подхода и проведена оценка области корректного использования метода. Там же было показано, что метод ЭПР позволяет свести решение волнового уравнения к решению уравнений Лапласа для электрического и векторного магнитного потенциалов поля. Однако применение описанной в [11] схемы использования метода ЭПР, основанной на использовании математической модели поля в однородном пространстве, для расчета вертикальной компоненты поля невозможно, поскольку компонента поля горизонтального источника, перпендикулярная границам раздела слоев (вертикальная компонента), возникает лишь в слоистой среде и в однородном пространстве отсутствует. Поэтому при расчете вертикальной компоненты математическую модель поля в плоскослоистой среде целесообразно описывать аналитическим выражением, соответствующим двум полупространствам с плоской границей раздела, а многослойность среды учитывать с помощью ЭПР, как предлагается в [11], т. е. используя ЭПР вместо постоянной распространения, определяемой в классической трактовке этого понятия только электрофизическими свойствами материала слоя и частотой. Такая же схема пригодна и для расчета горизонтальной компоненты поля. Решения, получаемые альтернативными методами, обладают большей вычислительной емкостью.

Поле вблизи плоской границы раздела полупространств

Рассмотрим расчет поля горизонтального источника в плоскослоистой среде более подробно. Для решения многих прикладных задач технической физики электромагнитное поле удобно характеризовать напряженностью электрического поля E, которая связана с векторным магнитным (A) и электрическим потенциалами хорошо известным соотношением:

$$E = -\nabla\varphi + i\omega A, \quad \mathbf{E} = k^2\Pi + \overline{\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi}. \tag{1}$$

Для вычисления потенциалов A и φ можно воспользоваться классическими результатами, полученными для поляризационного потенциала поля вблизи плоской границы полупространств. Как показано в [15], в случае элементарного диполя, расположенного на плоской границе раздела полупространств и ориентированного вдоль оси абсцисс (аппликата границы $z_1 = 0$, аппликата диполя $z_0 = 0$), на частоте $\omega \geq 0$ в j-м полупространстве ($j = 1, 2$) горизонтальная компонента поляризационного потенциала, соответствующая такой структуре, описывается выражениями

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{x_1} &= \frac{2}{n^2}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_{2,1}(\lambda)d\lambda, \quad z \leq 0, \\ \Pi x_2 &= \frac{\exp(ik_2R_1)}{R_1} - \frac{\exp(ik_2R_2)}{R_2} \\ &\quad + 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_{2,2}(\lambda)d\lambda, \quad z \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где в общем случае $\Phi_{m,j}$ — определяемая из граничных условий для горизонтальной компоненты математическая модель [16] плоскослоистой среды, в которой рассчитывается поле, причем индекс m — число слоев среды, а j — номер слоя, k_j — постоянная распространения электромагнитной энергии в j-м слое, $\Phi_{2,1}(\lambda) = \frac{\exp(\alpha_1 z - \alpha_2 z_0)}{\alpha_1+\alpha_2}\lambda$, $z \leq 0$, $\Phi_{2,2}(\lambda) = \frac{\exp[-(z+z_0)\alpha_2]}{\alpha_1+\alpha_2}\lambda$, $z \geq 0$ [15], $\alpha_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}$, $j = 1, 2$, λ — параметр разделения [2], именуемый в [17] параметром разложения, $\theta = \arccos x/r$ — азимут, J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $n^2 = k_1^2/k_2^2$, x_0, y_0, z_0 — абсцисса, ордината и аппликата источника поля; x, y, z — абсцисса, ордината и аппликата точки, где вычисляется поле; радиус $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$; $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-z_0)^2}$; $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+z_0)^2}$; i — мнимая единица (мнимое число, удовлетворяющее соотношению $i^2 = -1$); $\pi = 3.14159\ldots$; здесь и далее слои (и полупространства) считаются изотропными, гомогенными, неограниченными в азимутальном направлении и имеющими плоскопараллельные границы раздела, электромагнитные процессы считаются монохроматическими, а электрофизические характеристики слоев — частотонезависимыми.

Выражения (2) удовлетворяют волновому уравнению и граничным условиям для плоской границы полупространств [15]

$$k_2^2 \Pi_{x_2} = k_1^2 \Pi_{x_1} \quad \text{и} \quad k_2^2 \frac{\partial \Pi_{x_2}}{\partial z} = k_1^2 \frac{\partial \Pi_{x_1}}{\partial z}. \tag{3}$$

Вертикальная компонента поляризационного потенциала в рассматриваемой структуре описывается выражениями [15]

$$\Pi_{z_2} = -\frac{2\cos\theta}{k_2^2} \int_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{2,1}(\lambda)\lambda^2 d\lambda, \quad z \le 0 \tag{4}$$

$$\Pi_{z_1} = -\frac{2\cos\theta}{k_1^2} \int_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{2,2}(\lambda)\lambda^2 d\lambda, \quad z \ge 0, \tag{5}$$

где $\Omega_{2,1}(\lambda) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n^2\alpha_2 + \alpha_1} \exp(\alpha_1 z - \alpha_2 z_0)$, $z \le 0$ — математическая модель структуры, состоящей из полупространств с плоской границей раздела для z-компоненты [15]; $\Omega_{2,2}(\lambda) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n^2\alpha_2 + \alpha_1} \exp[-\alpha_2(z + z_0)]$ — то же для $z \ge 0$ [15]; J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка.

При выводе формул (4) и (5) использованы граничные условия [15]

$$k_2^2 \Pi_{z_2} = k_1^2 \Pi_{z_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi_{z_2}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_{z_1}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{x_1}}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_{x_2}}{\partial x}. \tag{6}$$

Получение математических моделей поля для малых расстояний

Как отмечено выше, имеется настоятельная необходимость снижения вычислительной емкости решения рассматриваемой задачи, поэтому выражения (1) и (2) следует упростить с помощью надлежащей аппроксимации. Для этого обычно вводятся (см., например, [1,17,18]) ограничения на значения постоянных распространения и параметра разделения, которые, возможно, корректны при математическом моделировании распространения радиоволн, при решении задач геологии, молниезащиты, но совершенно нехарактерны для материалов и расстояний микроэлектроники. Более того, физический смысл вводимых формально допущений иногда вообще неуловим.

В [19] было теоретически показано, что в квазистатике погрешность аппроксимации функций $\Phi_{m,j}(\lambda)$ на малых λ сказывается на значении функции Грина в основном на больших расстояниях, а для расчета поля на малых расстояниях важно повышать точность аппроксимации математической модели слоистой среды в области больших значений λ и при $\lambda = \infty$. В [20] эти выводы были подтверждены средствами вычислительного эксперимента и отмечено, что для функций Грина в области, где эти функции являются гладкими функциями частоты (каковыми они и являются, моделируя отсутствие объемных резонансных явлений), эти выводы справедливы в области нижних частот, где объемные резонансы в микроэлектронных конструктивах заведомо отсутствуют.

Учитывая прикладной характер решаемой задачи технической физики (ориентация на микроэлектронику), выражения (2) и (4), (5) целесообразно упростить, преобразовав их для случая малых расстояний. Такую возможность дают результаты работ [19,20]. Тогда для больших значений $\lambda \gg |k_j|$, соответствующих малым расстояниям (и/или области низких частот), $\alpha_j \approx \lambda$ и формулы (2) для элементарного диполя, расположенного на плоской границе раздела полупространств, примут вид

$$\Pi_{x_1} = \frac{1}{n^2} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp[\lambda(z - z_0)] d\lambda, \quad z \le 0,$$

$$\Pi_{x_2} = \frac{\exp(ik_2 R_1)}{R_1} - \frac{\exp(ik_2 R_2)}{R_2} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp[-\lambda(z + z_0)] d\lambda, \quad z \ge 0,$$

или с учетом тождества Вебера–Липшица [21]

$$\Pi_{x_1} = \frac{1}{n^2 R_1}, \quad z \le 0, \tag{7}$$

$$\Pi_{x_2} = \frac{\exp(ik_2 R_1)}{R_1} - \frac{\exp(ik_2 R_2)}{R_2} + \frac{1}{R_2}, \quad z \ge 0. \tag{8}$$

Используя приближенное равенство $\alpha_j \approx \lambda[1 - k_j^2/(2\lambda^2)]$, выражения (4) и (5) для вертикальной компоненты можно представить в виде

$$\Pi_{z_1} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\cos\theta}{k_2^2(n^2 + 1)} \int_0^\infty J_1(\lambda r) \exp[\lambda(z - z_0)] d\lambda,$$

$$z - z_0 \le 0, \tag{9}$$

$$\Pi_{z_2} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\cos\theta}{k_1^2(n^2+1)} \int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\exp[-\lambda(z+z_0)]d\lambda,$$

$$z + z_0 \geq 0. \quad (10)$$

Взяв интегралы в выражениях (9) и (10), воспользовавшись равенством $\cos\theta = x/r$, получим

$$\Pi_{z_1} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)x}{k_2^2(n^2+1)r^2}\left(1 - \frac{z - z_0}{R_1}\right), \quad z - z_0 \leq 0, \quad (11)$$

$$\Pi_{z_2} = \frac{(k_2^2 - k_1^2)x}{k_1^2(n^2+1)r^2}\left(1 - \frac{z + z_0}{R_2}\right), \quad z + z_0 \geq 0. \quad (12)$$

Принятая для получения выражений (7), (8), (11), (12) аппроксимация обеспечивает наибольшую точность при больших $\lambda \gg |k_j|$ (т. е. на малых расстояниях [19,20]) как на низких, так и на высоких частотах, и при $\lambda = \infty$ ошибка такой аппроксимации равна нулю на любой конечной частоте. Таким образом, выражения (7), (8), (11) и (12) дают решение волнового уравнения (строго говоря, приближенное) относительно поляризационного потенциала поля элементарного горизонтального диполя у плоской границы (и на границе) полупространств для малых расстояний r на нижних (не значит низких!) частотах.

Для расчета поля в многослойной среде можно использовать формулы (11) и (12) для полупространств; многослойность среды учитывается методом ЭПР.

Расчет ЭПР

В многослойной среде (при $m > 2$) k_e — это ЭПР, вычисляемая с учетом влияния всех слоев среды по формуле

$$k_e(r,z) = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_e\mu_0\mu_e\omega^2 + i\mu_0\mu_e\sigma_e\omega},$$

где σ_e — „кажущаяся" активная проводимость слоистой среды с учетом влияния всех слоев; ε_e и μ_e — эквивалентные относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости слоистой среды; константа Кулона $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — константа Био-Савара; ω — угловая частота; значения σ_e, ε_e и μ_e рассчитываются при $\omega = 0$, т. е. на основе решения уравнений Лапласа; нижний индекс e при обозначении величин здесь и ниже указывает, что величина является эквивалентной, т. е. рассчитывается с учетом слоистости среды.

Методы расчета эквивалентной („кажущейся") активной проводимости на постоянном токе хорошо известны в геологии. Известны как прямые методы расчета „кажущейся" активной проводимости для изотропных и анизотропных [22] слоистых сред, так и косвенные, основанные на идее использования теории подобия, как предлагается в [23].

Значения эквивалентных относительных проницаемостей ε_e и μ_e как для горизонтальной, так и для вертикальной компонент поля рассчитываются при $\omega = 0$ как отношение соответствующих функций Грина для многослойной среды и среды, представляющей собой полупространства с плоской границей раздела, причем электрофизические характеристики σ_1, ε_1 и μ_1 нижнего полупространства совпадают с характеристиками подстилающего слоя многослойной среды, а характеристики σ_2, ε_2 и μ_2 верхнего полупространства совпадают с характеристиками накрывающего слоя, в котором находится элементарный диполь. Расчет σ_e, ε_e и μ_e не требует вычисления S-интегралов, а предполагает вместо этого решение уравнений Лапласа для вектора Герца или для электрического φ и векторного магнитного $\mathbf{A}$-потенциалов. Такое решение требует формулировать граничные условия при $\omega = 0$ на границах раздела слоев с проводимостями σ_j и относительными диэлектрическими ε_j и магнитными μ_j проницаемостями ($j = \overline{1,m}$), а также найти математические модели слоистой среды [16,20] (т. е. функции $\Phi_{m,j}$, $\Omega_{m,j}$ для векторного потенциала и функции $\Lambda_{m,j}$ для электрического) при $\omega = 0$. В силу известного соотношения $\mathbf{A} = \mu(-i\omega\varepsilon + \sigma)\Pi$ [17] векторный магнитный $\mathbf{A}$ и поляризационный Π потенциалы связаны между собой коэффициентом пропорциональности, значение которого в пределах каждого гомогенного слоя от координат не зависит и изменяется только при переходе через границу раздела слоев, поэтому граничные условия для магнитного потенциала могут быть сформированы на основе представленных выше граничных условий (3) и (6) для вектора Герца.

При $\omega = 0$ условия (3) и (6) на плоских границах раздела слоев с аппликатами $z = z_j$ приводятся к виду ($1 \leq j \leq m$):

$$A_{x,j+1} = A_{x,j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_{x,j+1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{x,j}}{\partial z}. \quad (13)$$

$$A_{z,j+1} = A_{z,j}; \quad \frac{1}{\mu_{j+1}\varepsilon_{j+1}}\frac{\partial A_{z,j+1}}{\partial z} - \frac{1}{\mu_j\varepsilon_j}\frac{\partial A_{z,j}}{\partial z} = \frac{1}{\mu_j\varepsilon_j}\frac{\partial A_{x,j}}{\partial x} - \frac{1}{\mu_{j+1}\varepsilon_{j+1}}\frac{\partial A_{x,j+1}}{\partial x}. \quad (14)$$

В пределах идеально проводящих слоев и на их границах потенциалы A и φ равны нулю. Для x-компоненты в случае непроводящих немагнитных сред, имеющих общую плоскую границу при $z = z_j$, на частоте $\omega \geq 0$ используются условия (13), а для z-компоненты — условия (14), которые можно представить в виде

$$A_{z,j+1} = A_{z,j} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon_{j+1}}\frac{\partial A_{z,j+1}}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_j}\frac{\partial A_{z,j}}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_j}\frac{\partial A_{x,j}}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_{j+1}}\frac{\partial A_{x,j+1}}{\partial x}. \quad (15)$$

Для электрического потенциала граничные условия [23]

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j \quad \text{и} \quad \varepsilon_{j+1}\frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial z} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}. \tag{16}$$

Будем теперь считать, что источник поля (элементарный диполь) расположен в $\vartheta + 1$-м слое над границей с аппликатой $z = z_\vartheta = 0$ или на этой границе. [5]

Для горизонтальной компоненты векторного магнитного потенциала в j-м слое m-слойной среды $(1 \le j \le \vartheta)$ под верхней границей ϑ-го слоя эквивалентная относительная магнитная проницаемость, по определению:

$$\mu_{e,x,j} = \frac{A_{x,j}}{A_{2,1}} = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_{m,j}(\lambda)d\lambda \Big/ \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_{2,1}(\lambda)d\lambda,$$

$$z \le z_j \le z_\vartheta, \tag{17}$$

где $\Phi_{m,j}$ — математическая модель m-слойной среды для j-го слоя, в котором вычисляется поле, получаемая из граничных условий (13) при $\omega = 0$; интеграл в знаменателе с точностью до постоянного коэффициента описывает x-компоненту поля элементарного диполя в нижнем полупространстве.

То же в j-м слое над верхней границей ϑ-го слоя $(m \ge j \ge \vartheta)$:

$$\mu_{e,z,j} = \frac{A_{x,j}}{A_{2,2}} = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_{m,j}(\lambda)d\lambda \Big/ \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_{2,2}(\lambda)d\lambda,$$

$$z \ge z_j \ge z_\vartheta, \tag{18}$$

где интеграл в знаменателе с точностью до постоянного коэффициента описывает x-компоненту поля элементарного диполя в верхнем полупространстве.

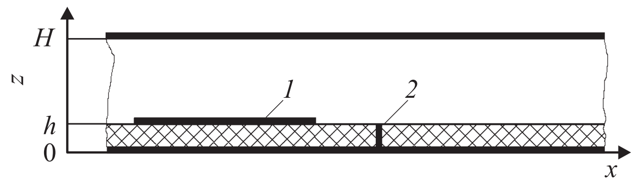
То же для вертикальной компоненты поля в j-м слое в области $z \le z_j \le z_\vartheta$:

$$\mu_{e,z,j} = \frac{A_{z,j}}{A_{2,1}} = \int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{m,j}(\lambda)d\lambda \Big/ \int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{2,1}(\lambda)d\lambda. \tag{19}$$

Для вертикальной компоненты в j-м слое в области $z \ge z_j \ge z_\vartheta$

$$\mu_{e,z,j} = \frac{A_{z,\vartheta}}{A_{2,2}} = \int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{m,\vartheta}(\lambda)d\lambda \Big/ \int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{2,2}(\lambda)d\lambda. \tag{20}$$

Для вычисления эквивалентной относительной диэлектрической проницаемости ε_e функцию Грина в слоистой среде ищем, используя граничные условия (16)



Четырехслойная среда, адекватная проводнику на плате с верхним и нижним экранами: *1* — проводник-источник поля, *2* — заземляющая перемычка (проводник-рецептор).

для электрического потенциала φ на частоте $\omega = 0$. По определению эквивалентной диэлектрической проницаемости для поля в j-м слое $(1 \le \vartheta \le j)$ по аналогии с [11]:

$$\varepsilon_{e,j} = \frac{\varphi_2}{\varphi_j} = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Lambda_{2,2}(\lambda)d\lambda \Big/ \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Lambda_{m,j}(\lambda)d\lambda,$$

$$z \ge z_j \ge z_\vartheta.$$

То же для $1 \le j \le \vartheta$:

$$\varepsilon_{e,j} = \frac{\varphi_1}{\varphi_j} = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Lambda_{2,1}(\lambda)d\lambda \Big/ \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Lambda_{m,j}(\lambda)d\lambda,$$

$$z \le z_j \le z_\vartheta.$$

По найденным значениям эквивалентных проницаемостей находятся значения ЭПР, которые используются для расчета поляризационного потенциала по формулам (7), (8), (11), (12). Вычислив затем потенциалы по формулам $\mathbf{A} = \mu_e(-i\omega\varepsilon_e + \sigma_e)\Pi$ и $\varphi = -\operatorname{div}\Pi$, находим по формуле (1) напряженность электрического поля единичного элементарного диполя, значений которой достаточно для решения широкого класса задач.

Приложение

Пример использования методики

Рассмотрим расчет ЭДС помехи, наведенной в вертикальной заземляющей перемычке на металлизированной диэлектрической печатной плате горизонтальным прямоугольным пленочным проводником. Верхний экран образован металлизированным слоем соседней („верхней") платы. Соответствующая конструкция схематично представлена на рисунке. Диэлектрики с диэлектрическими проницаемостями ε_3 (для пространства над платой) и ε_2 (для платы) полагаем непроводящими и немагнитными, экраны полагаем идеально проводящими. Источник поля (проводник прямоугольного сечения шириной W, длиной l, толщиной t и характеристическим сопротивлением $114\,\Omega$) ориентирован вдоль оси абсцисс.

[5] Для диполя на границе раздела при формировании системы уравнений, используя различные граничные условия, полагаем, что диполь отделен от границы весьма тонким зазором, свободным от источников поля. Для нахождения функций Φ, Ω, Λ толщина зазора устремляется к нулю и осуществляется переход к пределу.

Для расчета поля методом ЭПР необходимо определить эквивалентные проницаемости. Для определения эквивалентной диэлектрической проницаемости требуется знать потенциал электрического поля в квазистационарном приближении для каждого слоя среды, адекватной реальному конструктиву. Для описания электрического потенциала поля в слое над платой (см. рисунок) будем использовать выражение $\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Lambda_{4,3}(\lambda)d\lambda$, которое включает математическую модель $\Lambda_{4,3}(\lambda, z, z_0) = \exp(-\lambda|z-z_0|) + s_3(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0) + p_3(\lambda)\exp[\lambda(x-z)]$, а для слоя, который соответствует плате, будем использовать модель $\Lambda_{4,2}(\lambda, z, z_0) = s_2(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)] + p_2(\lambda)\exp[\lambda(x-z)]$. Записав с помощью этих выражений граничные условия (16), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных $s_\nu(\lambda)$ и $p_\nu(\lambda)$ $(\nu = 1, 2)$; число уравнений необходимо и достаточно для отыскания неизвестных функций s_ν и p_ν. С помощью интеграла Фурье–Бесселя [24] переходим к системе линейных алгебраических уравнений и тогда граничные условия примут вид:

$$s_3(\lambda)\exp[\lambda(H-z_0)] + p_3(\lambda)\exp[\lambda(z_0-H)] + \exp(\lambda|H-z_0|) = 0,$$

$$s_3(\lambda)\exp[\lambda(h-z_0)] + p_3(\lambda)\exp[\lambda(z_0-h)] + \exp|\lambda(h-z_0)| = s_2(\lambda)\exp[\lambda(h-z_0)] + p_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0-h)],$$

$$s_2(\lambda)\exp(-\lambda z_0) + p_2(\lambda)\exp(\lambda z_0) = 0,$$

$$\varepsilon_3\{s_3(\lambda)\exp[\lambda(h-z_0)] - p_3(\lambda)\exp[\lambda(z_0-h)] + \exp|-\lambda(h-z_0)|\} = \varepsilon_2\{s_2(\lambda)\exp[\lambda(h-z_0)] - p_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0-h)]\}.$$

Решив эту систему уравнений, получим, что

$$s_3 = \frac{2\varepsilon_3}{(\varepsilon_2 D - \varepsilon_3)\{\exp[2\lambda(h-z_0)] + \exp(-2H)\}},$$

где

$$D = \frac{1+\exp(-2h)}{1-\exp(-2h)}\,\frac{1-\exp[2\lambda(H-h)]}{1+\exp[2\lambda(H-h)]},$$

$$p_2 = -s_3\frac{1-\exp[2\lambda(H-h)]}{1+\exp[2\lambda(H-h)]},$$

$$p_3 = -s_3\exp[2\lambda(H-z_0)] - 1,$$

$$s_2 = -p_2\exp(-2\lambda z_0).$$

Математическая модель полупространств с плоской границей для расчета $\varepsilon_{e,\nu}$ $(\nu = 1, 2)$ находится аналогично. Для этого следует рассмотреть при $\omega = 0$ электрический потенциал в структуре, состоящей из полупространств, верхнее из которых имеет свойства свободного пространства, а нижнее — свойства материала платы. Потенциал в верхнем полупространстве описывается с помощью математической модели $\Lambda_{2,2}(\lambda, z, z_0) = \exp(-\lambda|z-z_0|) + q_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]$, а в нижнем полупространстве — с помощью математической модели $\Lambda_{2,1}(\lambda, z, z_0) = g_1(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]$. Граничные условия (16) вкупе с интегралом Фурье–Бесселя дают систему, решение которой имеет вид

$$q_2(\lambda) = \frac{\varepsilon_3\exp[-2\lambda(z_0-h)]}{\varepsilon_2+\varepsilon_3},$$

$$g_1(\lambda) = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2\exp[2\lambda(z_0-h)]}{\varepsilon_3+\varepsilon_2} + 1.$$

Тогда эквивалентная относительная диэлектрическая проницаемость $(j = 3)$

$$\varepsilon_{e,3} = \frac{\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\{\exp(-\lambda|z-z_0|) + s_3(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)] + p_3(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]\}d\lambda}{\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\{\exp(-\lambda|z-z_0|) + q_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]\}d\lambda}.$$

То же для слоя с номером $j = 2$, который соответствует плате

$$\varepsilon_{e,2} = \frac{\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\{s_2(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)] + p_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]\}d\lambda}{\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\{g_1(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]d\lambda}.$$

Формирование математической модели четырехслойной структуры, соответствующей конструктиву на рисунке, для x-компоненты векторного потенциала при расчете эквивалентной относительной магнитной проницаемости μ_e проводится аналогично, но на основе использования граничных условий (13). Решение соответствующей системы уравнений показывает, что x-компонента при $\omega = 0$ для слоя над платой описывается с помощью функции

$$\Phi_{4,3}(\lambda, z, z_0) = u_3(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)] + w_3(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)] + \exp(-\lambda|z-z_0|), \qquad (\text{П1})$$

где

$$w_3(\lambda) = \frac{2}{(D-1)\{\exp[2\lambda(h-z_0)] + \exp(-2\lambda H)\}},$$

$$D = \frac{1+\exp(-2h)}{1-\exp(-2h)}\,\frac{1-\exp[2\lambda(H-h)]}{1+\exp[2\lambda(H-h)]},$$

$$u_3(\lambda) = -w_3(\lambda)\exp[2\lambda(H-z_0)] - 1.$$

Для слоя, соответствующего плате, x-компонента описывается с помощью функции

$$\Phi_{4,2}(\lambda, z, z_0) = u_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)] + w_2(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)], \qquad (\text{П2})$$

где

$$u_2(\lambda) = -w_3\frac{1-\exp[2\lambda(H-h)]}{1+\exp[2\lambda(H-h)]},$$

$$w_2 = -u_2(\lambda)\exp(-2\lambda z_0).$$

Чтобы получить аналитические выражения для эквивалентных относительных магнитных проницаемостей, соответствующих каждой из компонент векторного потенциала, следует еще рассмотреть этот потенциал в структуре из полупространств, верхнее из которых имеет свойства свободного пространства, а нижнее — свойства материала платы и соответствующие нижнему полупространству функции $\Omega_{2,1}$ и $\Phi_{2,1}$. Для x-компоненты эквивалентная проницаемость μ_e в верхнем полупространстве описывается формулой (18) с помощью математической модели $\Phi_{2,2}(\lambda, z, z_0) = q_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)] + \exp(-\lambda|z - z_0|)$, а в нижнем — с помощью математической модели $\Phi_{2,1}(\lambda, z, z_0) = g_1(\lambda)\exp[\lambda(z - z_0)]$. Граничные условия (15) вкупе с интегралом Фурье–Бесселя дают систему, решение которой имеет вид

$$q_2(\lambda) = \frac{\exp[-2\lambda(z_0 - h)]}{2}, \; g_1(\lambda) = \frac{3 - \exp[2\lambda(z_0 - h)]}{2}.$$

Для x-компоненты векторного потенциала в объеме платы по формуле (17)

$$\mu_{e,x,2} = \frac{\int_0^\infty J_0(\lambda r)\{w_2(\lambda)\exp[\lambda(z - z_0)] + u_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)]\}d\lambda}{\int_0^\infty J_0(\lambda r)\{g_1(\lambda)\exp[\lambda(z - z_0)]\}d\lambda},$$

то же для слоя над платой

$$\mu_{e,x,3} = \frac{\int_0^\infty J_0(\lambda r)\{w_3(\lambda)\exp[\lambda(z - z_0)] + u_3(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)]\}d\lambda}{\int_0^\infty J_0(\lambda r)\{q_2(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)] + \exp(-\lambda|z - z_0|)\}d\lambda}.$$

Для z-компоненты векторного потенциала при расчете эквивалентной магнитной проницаемости μ_e по формуле (19) требуется использовать математическую модель $\Omega_{m,j}$ того же типа, что и $\Phi_{m,j}$ для x-компоненты, но сформированную на основе граничных условий (15) [15], в которых участвуют обе компоненты векторного потенциала. В любом из четырех (j-м) слоев модели z-компонента векторного потенциала описывается при помощи функции вида

$$A_{z,j} = \int_0^\infty J_1(\lambda r)\Omega_{4,j}(\lambda, z, z_0)d\lambda, \quad j = \overline{1,4}.$$

Математические модели описываются следующими выражениями:

$$\Omega_{4,1} = \Omega_{4,4} = 0,$$

$$\Omega_{4,2}(\lambda, z, z_0) = c(\lambda)\exp[\lambda(z - z_0)] + a(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)], \tag{П3}$$

$$\Omega_{4,3}(\lambda, z, z_0) = e(\lambda)\exp(-\lambda|z - z_0|) + f(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)]. \tag{П4}$$

Для четырехслойной структуры граничные условия (15) образуют систему

$$\begin{gathered}
c(\lambda)\exp[\lambda(h - z_0)] + a(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)] \\
= \exp(-\lambda|h - z_0|) + e(\lambda)\exp[\lambda(h - z_0)] \\
+ f(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)], \\
\{e(\lambda)\exp[\lambda(h - z_0)] - f(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)] \\
+ \exp(-\lambda|h - z_0|)\}/\varepsilon_3 - \{c(\lambda)\exp[\lambda(h - z_0)] \\
- a(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)]\}/\varepsilon_2 = \frac{x}{r}\Gamma, \\
\exp(-\lambda|H - z_0|) + e(\lambda)\exp[\lambda(H - z_0)] \\
+ f(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - H)] = 0, \\
c(\lambda)\exp(-\lambda z_0) + a(\lambda)\exp(\lambda z_0) = 0,
\end{gathered}$$

где

$$\Gamma = -\Phi_{4,2}(\lambda, h)/\varepsilon_2 + \Phi_{4,3}(\lambda, h)/\varepsilon_3,$$

$\Phi_{4,j}$ и $\Omega_{4,j}$ от x не зависят и для x-компоненты описываются формулами (П2) и (П1), а для z-компоненты — формулами (П3) и (П4).

При $z_0 = h$ решение системы имеет вид

$$f(\lambda) = \frac{\frac{x}{r}\Gamma + \{\exp[2\lambda(h - H)] - 1\}\{1/\varepsilon_3 - 1/\varepsilon_2\} + \xi}{-\{1 + \exp[2\lambda(h - H)]\}/\varepsilon_3 - \{1 - \exp[2\lambda(h - H)]\}/\varepsilon_2 - \xi},$$

где

$$\xi = 2\frac{\exp[2\lambda(h - H)] - 1}{[\exp(2\lambda h) - 1]\varepsilon_2},$$

$$e(\lambda) = -[1 + f(\lambda)]\exp[2\lambda(h - H)],$$

$$a(\lambda) = [1 + f(\lambda)]\frac{\exp[2\lambda(h - H)] - 1}{\exp(2\lambda h) - 1},$$

$$c(\lambda) = 1 + f(\lambda) + e(\lambda) - a(\lambda).$$

Для расчета $m_{e,z,2}$ требуется еще найти векторный потенциал магнитного поля в структуре из полупространств, верхнее из которых имеет свойства свободного пространства, а нижнее — свойства материала платы. Потенциал в верхнем полупространстве описывается с помощью математической модели $\Omega_{2,2}(\lambda, z, z_0) = \exp(-\lambda|z - z_0|) + b(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - z)]$, а в нижнем — с помощью математической модели $\Omega_{2,1}(\lambda, z, z_0) = d(\lambda)\exp[\lambda(z - z_0)]$. Граничные условия (15) вкупе с интегралом Фурье–Бесселя дают систему из двух алгебраических уравнений:

$$d(\lambda)\exp[\lambda(h - z_0)] = \exp(-\lambda|h - z_0|) + b(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)],$$

$$\begin{gathered}
\{-b(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)] + \exp(-\lambda|h - z_0|)\}/\varepsilon_3 \\
+ d(\lambda)\exp[\lambda(z_0 - h)]/\varepsilon_2 \\
= \frac{x}{r}[-\Phi_{2,1}(\lambda, h)/\varepsilon_2 + \Phi_{2,2}(\lambda, h)/\varepsilon_3],
\end{gathered}$$

решение которой имеет вид

$$b(\lambda)=\frac{\{\varepsilon_3\varepsilon_2\beta_2 x/r-\varepsilon_2\exp[\lambda(h-z_0)]-\\ -\varepsilon_3\exp[\lambda(z_0-h)]\}\exp[\lambda(h-z_0)]}{\varepsilon_3\exp[2\lambda(z_0-h)]-\varepsilon_2},$$

где

$$\beta_2=\Phi_{21}/\varepsilon_2+\Phi_{22}/\varepsilon_3,$$
$$d(\lambda)=1+b(\lambda)\exp[2\lambda(z_0-h)].$$

Тогда для z-компоненты векторного потенциала в объеме платы по формуле (19):

$$\mu_{e,z,2}=\frac{\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\{c(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]+\\ +a(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]\}d\lambda}{\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)d(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]d\lambda}.$$

То же в слое над платой по формуле (20):

$$\mu_{e,z,3}=\frac{\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\{\exp(-\lambda|z-z_0|)+\\ +e(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]+f(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]\}d\lambda}{\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\{\exp(-\lambda|z-z_0|)+\\ +b(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]\}d(\lambda)}.$$

Вычисление напряжения помехи

Как показано выше, расчет ЭПР требует вычисления интегралов двух типов:

$$I_1=\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\Phi_=(\lambda,z-z_0)d\lambda$$

$$\text{и}\quad I_2=\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\Phi_\perp(\lambda,z-z_0)d\lambda,$$

где $\Phi_=$ — математическая модель плоскослоистой среды для электрического потенциала или для горизонтальной составляющей векторного потенциала, $\Phi_\perp$ — то же для вертикальной составляющей векторного потенциала.

Обобщая полученные к настоящему времени результаты, можно отметить, что для нетривиальных случаев известные способы вычисления интеграла I_1 базируются либо на использовании свойств тета-функции [25], либо на аппроксимации функции $\Phi_=(\lambda)$ отрезком экспоненциального ряда на интервале $[0,\infty]$ и использовании тождества Вебера–Липшица

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\exp(-\lambda\tau_0)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{r^2+\tau_0^2}}\quad(\tau_0\geq 0),$$

где τ_0 — масштабирующий множитель [20,21]. Этот метод рассмотрен в [20,21], метод тета-функции предложен в [25] и развит в [26].

Методы вычисления интеграла I_2 пока не опубликованы (по сведениям автора). Для вычисления I_2 предлагается аппроксимировать функцию $\Phi_\perp(\lambda)$, как и при вычислении I_1, интерполяционным многочленом $\sum\limits_{\nu=0}^{N}\exp(-\nu\lambda\tau_0)\approx\Phi_\perp(\lambda)$ на чебышевской сетке [27] и вычисление интеграла свести к вычислению суммы:

$$\int\limits_0^\infty J_1(\lambda r)\sum_{\nu=0}^{N}\exp(-\nu\lambda\tau_0)d\lambda$$
$$=\frac{1}{r}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\frac{\nu\tau_0}{\sqrt{r^2+(\nu\tau_0)^2}}\right]\approx I_2,\quad \tau_0\geq 0.$$

Аналитические выражения для математических моделей среды Φ, Λ, Ω, получаемые из граничных условий, достаточно громоздки; для повышения надежности результата (особенно при $m>4$ и/или $z_0\neq h$) систему уравнений, формируемую для получения Φ, Λ, Ω, целесообразно решать численно, при фиксированных значениях λ, соответствующих узлам интерполяции.

Приняв в качестве физической модели среды полупространства с плоской границей раздела и эквивалентными параметрами, по методу ЭПР с учетом формулы (11) функция Грина для поляризационного потенциала поля в плате при $\sigma=0$:

$$\Pi_{z_1}=\frac{(k_{e_2}^2-k_{e_1}^2)x}{(k_{e_1}^2+k_{e_2}^2)r^2}\left(1-\frac{z-z_0}{R_1}\right),\quad z-z_0\leq 0,$$

где

$$k_{ej}(r,z)=\omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_{ej}\mu_0\mu_{ej}},\qquad j=1,2.$$

Z-компонента поляризационного потенциала поля, создаваемого проводником-источником, рассчитывается интегрированием соответствующей функции Грина с весом, равным плотности тока, по объему этого проводника. Закон распределения плотности тока $j(x_0,y_0,z_0)$ по объему проводника и различные аппроксимации этого закона рассмотрены в [12,27]

$$j(x_0,y_0,z_0)=I(x_0)j(y_0)j(z_0).$$

Решение уравнения Гельмгольца для тока в согласованной однородной линии произвольного сечения, ориентированной вдоль оси абсцисс, описывается хорошо известным выражением

$$I(x_0)=I_1\exp(-\gamma|x_0-x_s|),$$

где $I_1=U_0/\sqrt{(i\omega L+r_0)/(i\omega C+g_0)}$ — ток в начале линии (проводника-источника), т.е. при $x=x_s$; $\gamma=\sqrt{(i\omega L+r_0)(i\omega C+g_0)}/l_s$ — постоянная распространения электромагнитной волны вдоль однородной линии; L, C, r_0, g_0 — полные распределенные параметры линии (индуктивность, емкость, активное сопротивление и активная проводимость утечки соответственно).

Распределение тока вдоль оси ординат $j(y_0)$ можно аппроксимировать δ-функцией Дирака [12,П3]:

$$j(y_0) = 2\delta(|y_0| - b/2).$$

Распределение $j(z_0)$ можно считать равномерным. Тогда поляризационный потенциал помехонесущего поля, создаваемого проводником-источником в точке с координатами $\{x, y, z\}$, описывается формулой

$$\Pi_s(x, y, z) = \int\limits_0^t j(z_0)dz_0 \int\limits_{-b/2}^{b/2} j(y_0)dy_0 \int\limits_{x_s}^{x_s+l_s} I(x_0)\Pi_{z_1}dx_0,$$

где x_s, $x_s + l_s$ — абсциссы начала и конца проводника-источника.

Практически без потери точности плотность тока можно принять постоянной по толщине и ширине проводника-источника. Тогда получим

$$\Pi_s(x_s + l_s) = \frac{1}{tb}\int\limits_0^t dz_0 \int\limits_0^b dy_0 \int\limits_{x_s}^{x_s+l_s} I(x_0)\Pi_{z_1}dx_0.$$

Выразив потенциалы φ и A через вектор Герца, наводимую в проводнике-рецепторе ЭДС χ можно вычислить по формуле (1) через интеграл от вертикальной компоненты напряженности электрического поля E_{z_1} при фиксированных значениях x и y, соответствующих координатам рецептора:

$$\chi = \int\limits_{z_1}^{z_2} E_{z_1}dz = -\left[\frac{\partial \Pi_s}{\partial z}\bigg|_{z=z_2} - \frac{\partial \Pi_s}{\partial z}\bigg|_{z=z_1}\right] + k_{e_2}^2 \int\limits_{z_1}^{z_2} \Pi_s dz.$$

Интеграл вычисляется численно. Расчет эквивалентных проницаемостей рассмотрен выше.

Задача решена.

Список литературы

[1] *Франк Ф.Р., Мизес М.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. Л.: ОНТИ, 1937. 1000 с.

[2] *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Л.: АН СССР, 1948. 728 с.

[3] *Ming-Ju Tsai, Chinglung Chen, Alexopoulos N.G.* // Electromagnetics. 1998. Vol. 18. N 3. P. 267–288.

[4] *Jackson D.R., Alexopoulos N.G.* // IEEE Transactions on Antenna Propagation. 1980. Vol. AP-34. N 12. P. 1467-1470.

[5] *Балюк Н.В., Зеленин А.Н.* // Технологии электромагнитной совместимости. 2006. № 2 (17). С. 54–58.

[6] *Konefal T., Dawson J.F., Marvin A.* // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2005. Vol. 47. N 4. P. 678–691.

[7] *Wallyn W., De Zutter D., Rogier H.* // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2002. Vol. 44. N 1. P. 130–138.

[8] *Kochetov S.V.* Time-and-frequency-domain modeling of passive interconnection structures in field and circuit analysis. Magdeburg: Magdeburger forum zur Elektrotechnik, 2008. 211 p.

[9] *Antonini G., Deschrijver D., Dhaene T.* // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2007. Vol. 49. N 1. P. 35–48.

[10] *Ren K., Railton C.J.* // IEEE Transactions on Antennas and Propogation. October 2008. Vol. 56. N 10. P. 3253–3259.

[11] *Конников И.А.* // ЖТФ. 2013. № 10. С. 8-12.

[12] *Конников И.А.* // Электромагнитные волны и электронные системы. 2013. № 7. С. 53–60.

[13] *Конников И.А.* // Информационные технологии. 2013. № 4. С. 2–8.

[14] *Конников И.А.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, сер. Приборостроение. 2007. № 4(69). С. 3–20.

[15] *Sommerfeld A.* Partial differential equations in physics. N.Y.: Academic Press Inc., 1949. 335 p.

[16] *Конников И.А.* // Математическое моделирование. 2007. Т. 19. № 4. С. 37–44.

[17] *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М., Л.: ОГИЗ, 1948. 540 с.

[18] *Лавров Г.А., Князев А.С.* Приземные и подземные антенны. М.: Сов. радио, 1965. 260 с.

[19] *Конников И.А.* // Петербургский журнал электроники. 2013. № 3. С. 97–104.

[20] *Конников И.А.* // Прикладная физика и математика. 2014. № 3. С. 39–50.

[21] *Конников И.А.* // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 17–24.

[22] *Куфуд О.* Зондирование методом сопротивлений. М.: Недра, 1984. 270 с.

[23] *Говорков В.А.* М., Л.: Госэнергоиздат, 1960. 464 с.

[24] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

[25] *Конников И.А.* // Электричество. 2007. № 3. С. 37–41.

[26] *Конников И.А.* // ЖТФ. 2007. Вып. 1. С. 15–20.

[27] *Конников И.А.* // Прикладная физика и математика. 2013. № 6. С. 75–83.