

01

## Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в цилиндрическом канале в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса

© О.В. Гермидер, В.Н. Попов<sup>¶</sup>

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, 163002 Архангельск, Россия

<sup>¶</sup> e-mail: v.porov@narfu.ru

(Поступило в Редакцию 23 декабря 2016 г. В окончательной редакции 11 апреля 2017 г.)

Рассмотрены процессы тепло- и массопереноса в длинном цилиндрическом канале с использованием зеркально-диффузной модели граничного условия Максвелла. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано уравнение Вильямса. В канале поддерживается постоянный градиент температуры. В широком диапазоне изменения числа Кнудсена получены значения потоков тепла и массы через поперечное сечение канала в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Построены профили потока тепла. Проведено сравнение с аналогичными результатами, представленными в открытой печати.

DOI: 10.21883/JTF.2017.11.45116.2145

### Введение

В связи с развитием направления в динамике разреженного газа, которое связано с разработкой современных технологий MEMS, особое значение приобретают исследования процессов тепло- и массопереноса в микро- и наноканалах в зависимости от модели взаимодействия молекул газа с поверхностью канала [1]. Наиболее известной моделью граничных условий является зеркально-диффузное граничное условие Максвелла. В модели Максвелла функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, имеет вид [2]

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = (1 - \alpha)f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}), \quad \mathbf{n}\mathbf{v} > 0, \quad (1)$$

$$f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = n(z') \left( \frac{m}{2\pi k_B T(z')} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T(z')} \mathbf{v}^2 \right), \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент аккомодации тангенциального импульса,  $f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v}))$  — функция распределения молекул газа, падающих на стенки,  $\mathbf{r}'_s$  — радиус-вектор точек на стенках канала,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к боковой поверхности, направленный в сторону газа,  $f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$  — локально равновесная функция распределения. Коэффициент аккомодации тангенциального импульса в модели зеркально-диффузного отражения Максвелла (1) определяет вероятность того, что молекула отразится от стенки диффузно. Таким образом, если  $\alpha = 1$ , то зеркально-диффузное граничное условие переходит в модель диффузного отражения. В случае зеркального отражения коэффициент аккомодации тангенциального импульса имеет нулевое значение.

Другой моделью, описывающей взаимодействие молекул газа с поверхностью, является модель Чер-

чиньяни–Лэмпис (Cercignani–Lampis, CL), в которой учитываются два параметра: коэффициент аккомодации тангенциального импульса  $\alpha_\tau$  и коэффициент аккомодации кинетической энергии  $\alpha_n$ , связанной с компонентой скорости  $v_n$  направленной по нормали к поверхности. В модели CL функция распределения молекул газа, отраженных от поверхности канала, имеет вид [3]

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = \frac{1}{|v_n|} \int_{v'_n < 0} |v'_n| f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}') R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d\mathbf{v}',$$

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{4\pi^2 \alpha_n \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau) (k_B T)^2}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp \left( \frac{\sqrt{1 - \alpha_n} m v_n v'_n \cos \phi}{k_B T \alpha_n} \right) d\phi$$

$$\times \exp \left( \frac{m(v_n^2 + (1 - \alpha_n)v_n'^2)}{2k_B T \alpha_n} - \frac{m(\mathbf{v}_\tau - (1 - \alpha_\tau)\mathbf{v}'_\tau)^2}{2k_B T \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau)} \right),$$

где  $R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  — ядро рассеяния,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}$  — векторы скорости падающих и отраженных молекул газа от стенок канала. При  $\alpha_\tau = 1$  и  $\alpha_n = 1$  отражение молекул от поверхности канала является диффузным. В случае  $\alpha_\tau = 0$  и  $\alpha_n = 0$  отражение становится зеркальным.

В рамках модели зеркально-диффузного отражения Максвелла в работах [4–6] исследовалось влияние коэффициента аккомодации тангенциального импульса на тепловой и массовый потоки в канале, образованного двумя бесконечными параллельными пластинами. Для цилиндрического канала результаты вычислений потоков массы и тепла с использованием зеркально-диффузных граничных условий Максвелла и S-модели кинетического уравнения Больцмана приведены в [6], в [7] — на основе БГК. Полученные в [8,9]

значения коэффициента аккомодации тангенциального импульса показали, что для легких газов, таких как азот, аргон и гелий, коэффициент аккомодации может отличаться от единицы, тогда как для тяжелых газов, например криптона и ксенона, коэффициенты ближе к единице [6]. Для загрязненной поверхности взаимодействие газ–поверхность ближе к диффузному рассеянию, чем взаимодействие в случае специально обработанной гладкой поверхности. Химическая чистка поверхности увеличивает отклонение коэффициента аккомодации от единицы. Если же рассматривается взаимодействие молекул достаточно тяжелого газа с гладкой поверхностью, то можно допускать полную аккомодацию молекул газа поверхностью. В частности, диффузная модель отражения была использована в работах [10–12] для получения значений потоков тепла и массы в прямоугольном канале, в [13] в канале треугольного сечения, в [14–17] в цилиндрическом канале, в [18] в канале эллиптического сечения. В [14–16] результаты получены с использованием численного интегрирования S-модели кинетического уравнения Больцмана. Вместе с тем интерес представляет применение точных аналитических методов. Аналитическое решение уравнения Вильямса в задачах о тепловом крипе в прямоугольном и цилиндрическом каналах получено в [12,17] соответственно. Моделирование процесса массопереноса с граничными условиями Черчиньяни–Лэмпис (Cercignani–Lampis, CL) в прямоугольном канале осуществлялось в [19].

В настоящей работе в отличие от [14–17] получено выражение для потоков тепла и массы в цилиндрическом канале в задаче о тепловом крипе при использовании зеркально-диффузной модели отражения молекул поверхностью канала. В широком диапазоне изменения числа Кнудсена найдены значения потоков тепла и массы в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

### Постановка задачи. Математическая модель

Рассмотрим цилиндрический канал радиусом  $R'$ . Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль его оси  $Oz'$ . Для нахождения функции распределения молекул газа по координатам и скоростям воспользуемся уравнением Вильямса [20], которое в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$v_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + \frac{v_\varphi}{\rho'} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{v_\rho^2}{\rho'} \frac{\partial f}{\partial v_\rho} - \frac{v_\rho v_\varphi}{\rho'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f), \quad (3)$$

$$f_* = n_* \left( \frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Здесь  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\rho', \varphi, z')$ ,  $\rho', \varphi, z'$  — координаты молекул газа в цилиндрической системе координат в конфигурационном пространстве;  $v_\rho, v_\varphi, v_z$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{v}$  на оси цилиндрической системы координат,  $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$  — массовая скорость газа,  $l_g = \eta_g \beta^{-1/2} / p$  — средняя длина свободного пробега молекул газа,  $p$  и  $\eta_g$  — давление и коэффициент динамической вязкости газа,  $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$ ,  $\beta = m/(2k_B T_0)$ ,  $m$  — масса молекулы газа,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T_0$  — температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат. Параметры  $n_*$ ,  $\mathbf{u}_*$  и  $T_*$  в функции  $f_*$  выбираем из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворял законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [20]:

$$\int \omega M_j f_* d^3\mathbf{v} = \int \omega M_j f d^3\mathbf{v}, \quad j = 0 - 4, \quad (4)$$

где  $M_0 = 1$ ,  $M_1 = mv_x$ ,  $M_2 = mv_y$ ,  $M_3 = mv_z$ ,  $M_4 = mv^2/2$ .

В качестве граничного условия на стенках канала используем модель зеркально-диффузного отражения Максвелла (1).

Рассмотрим установившееся движение газа в канале. Предполагаем, что изменение температуры является малым

$$G_T = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dz}, \quad |G_T| \ll 1, \quad (5)$$

где  $G_T$  — безразмерный градиент температуры,  $T_0$  — температура в начале координат,  $z = z'/R'$ .

Раскладывая в ряд по градиенту температуры  $G_T$  выражение (2) и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим

$$f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = f_0(C) \left[ 1 + G_T z \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

Здесь  $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$  — абсолютный максвеллиан,  $C = \beta^{1/2} \mathbf{v}$  — безразмерная скорость молекул газа.

Функцию  $f$  линеаризуем относительно локально равновесной функции распределения  $f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ . Принимая во внимание равенство (6) и используя  $R'$  в качестве масштаба длины, получим

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(C) \left( 1 + G_T z \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) + h(\rho, \mathbf{C}) \right), \quad \rho = \rho'/R'. \quad (7)$$

Полагая  $n_* = n_0 + \delta n_*$ ,  $T_* = T_0 + \delta T_*$ ,  $\mathbf{u}_* = \beta^{1/2} \mathbf{u}_*$ , линеаризуем функцию  $f_*$ :

$$f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(C) \left( 1 + \frac{\delta n_*}{n_0} + 2\mathbf{C}\mathbf{u}_* + \left( C^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T_*}{T_0} \right). \quad (8)$$

Здесь  $n_0$  — концентрация молекул газа в начале координат.

Принимая во внимание, что течение газа по каналу имеет осесимметричный характер, в пространстве скоростей перейдем к сферической системе координат:  $C_p = C \cos \psi \sin \theta$ ,  $C_\varphi = C \sin \psi \sin \theta$ ,  $C_z = C \cos \theta$ . Подставляя выражения (7) и (8) в (3) и учитывая соотношения (4), для нахождения функции  $h(\rho, C)$  приходим к уравнению

$$\left( \left[ \cos \psi \frac{\partial h}{\partial \rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \psi} \right] \sin \theta + G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \cos \theta \right) \gamma Kn = \frac{1}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(C, C') h(\rho, C') d^3 C' - h(\rho, C), \quad (9)$$

где  $k(C, C') = 1 + 3CC'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$ ,  $Kn = l_g/R'$ . Принимая во внимание, что отношение левой и правой частей уравнения (9) равно  $\gamma Kn$ , положим

$$h(\rho, C) = G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \cos \theta Kn \gamma Z(\rho, \mu_1, \mu_2), \quad (10)$$

где  $\mu_1 = \cos \psi$ ,  $\mu_2 = \sin \theta$ .

Подставляя (10) в (9), приходим к уравнению относительно  $Z(\rho, \mu_1, \mu_2)$ :

$$\gamma Kn \left( \cos \psi \frac{\partial Z}{\partial \rho} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \frac{\sin \psi}{\rho} \right) \sin \theta + Z(\rho, \mu_1, \mu_2) + 1 = 0, \quad (11)$$

с граничным условием

$$Z(1, \mu_1, \mu_2) = (1 - \alpha) Z(1, -\mu_1, \mu_2), \quad \mu_1 < 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) с граничным условием (12) ищем методом характеристик [21]. Система уравнений характеристик для уравнения (11) имеет вид

$$\frac{d\rho}{\gamma Kn \sin \theta \cos \psi} = -\frac{\rho d\psi}{\gamma Kn \sin \theta \sin \psi} = -\frac{dZ}{Z + 1} = dt. \quad (13)$$

Интегрируя систему уравнений характеристик (13), находим первые два независимых интеграла:

$$\rho |\sin \psi| = C_1, \quad (Z(\rho, \mu_1, \mu_2) + 1) \exp\left(\frac{\rho \mu_1}{\gamma Kn \mu_2}\right) = C_2. \quad (14)$$

Исключая постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из (14) с использованием граничного условия (12), получаем

$$Z(\rho, \mu_1, \mu_2) = W(\rho, \mu_1, \mu_2) - 1,$$

$$W(\rho, \mu_1, \mu_2) =$$

$$\frac{\alpha \exp(-w_1(\rho, \mu_1, \mu_2))}{\exp(w_2(\rho, \mu_1, \mu_2)) - (1 - \alpha) \exp(-w_2(\rho, \mu_1, \mu_2))},$$

$$w_1(\rho, \mu_1, \mu_2) = \frac{\rho \mu_1}{\gamma Kn \mu_2},$$

$$w_2(\rho, \mu_1, \mu_2) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2(1 - \mu_1^2)}}{\gamma Kn \mu_2}.$$

Таким образом, функция распределения  $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ , определяемая выражением (7), построена. Исходя из статистического смысла функции распределения, находим компоненту вектора потока тепла и массовую скорость газа в канале [2]:

$$q'_z(\rho') = \frac{m}{2} \int (\mathbf{v}_z - u_z(\rho')) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\rho')|^2 \times f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}} q_z(\rho), \quad (15)$$

$$u_z(\rho') = \frac{1}{n(z')} \int \mathbf{v}_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \frac{U_z(\rho)}{\beta^{1/2}}, \quad (16)$$

где  $q_z(\rho)$ ,  $U_z(\rho)$  — безразмерные компоненты вектора потока тепла и массовой скорости газа в канале соответственно

$$q_z(\rho) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) \times \left( G_T z \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) + h(\rho, C) \right) d^3 C = -\frac{3G_T \gamma Kn}{2\sqrt{\pi}} \times \left( 1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} W(\rho, \mu_1, \mu_2) d\psi \right), \quad (17)$$

$$U_z(\rho) = \pi^{-3/2} \int C_z \exp(-C^2) \times \left( G_T z \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) + h(\rho, C) \right) d^3 C = \frac{G_T \gamma Kn}{3\sqrt{\pi}} \times \left( 1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} W(\rho, \mu_1, \mu_2) d\psi \right).$$

Приведенные потоки тепла и массы находим согласно [6] как

$$J_Q = \frac{4\beta^{1/2}}{R^2 p_0} \int_0^{R'} q'_z(\rho') \rho' d\rho',$$

$$J_M = \frac{2mn_0}{R^2 \beta^{1/2} p_0} \int_0^{R'} u_z(\rho') \rho' d\rho'.$$

Используя выражения (15) и (16) для компоненты вектора потока тепла и массовой скорости газа в канале, получим

$$J_Q = 4 \int_0^1 q_z(\rho) \rho d\rho, \quad (18)$$

$$J_M = 4 \int_0^1 U_z(\rho) \rho d\rho. \quad (19)$$

Значения  $J_M/G_T$  при различных значениях  $\alpha$  и  $Kn$

$Kn$	$\alpha$						
	1		0.8		0.6		
	(19)	[6]	[14]	(19)	[6]	(19)	[6]
0.0001	0.0001	–	–	0.0001	–	0.0001	–
0.0010	0.0008	–	–	0.0008	–	0.0008	–
0.0100	0.0083	–	0.0116	0.0083	–	0.0083	–
0.1000	0.0765	0.1014	0.1020	0.0779	0.0962	0.0792	0.0908
0.5000	0.2705	0.3016	0.3027	0.2968	0.3118	0.3242	0.3230
1.0000	0.3881	0.3959	0.3968	0.4537	0.4372	0.5271	0.4865
2.0000	0.4977	0.4779	0.4784	0.6221	0.5648	0.7755	0.6769
5.0000	0.6080	0.5675	–	0.8183	0.7244	1.1087	0.9435
10.000	0.6632	0.6210	0.6209	0.9288	0.8297	1.3193	1.1341
100.00	0.7376	0.7243	0.7210	1.0942	1.0530	1.6718	1.5775
1000.0	0.7502	0.7486	0.7469	1.1252	1.1166	1.7450	1.7237
10000	0.7520	–	–	1.1283	–	1.7550	–

Из сравнения выражений (17) и (18) следуют равенства

$$U_z = -\frac{2}{9} q_z, \quad J_M = -\frac{2}{9} J_Q. \quad (20)$$

Значения приведенного потока массы  $J_M/G_T$  вычислены согласно (19) в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса  $\alpha$  методом численного интегрирования Монте-Карло для всего диапазона изменения числа Кнудсена. Реализация алгоритма данного метода произведена с применением системы компьютерной алгебры Maple 17. Результаты вычислений представлены в таблице.

### Анализ результатов

Анализ данных, представленных в таблице, показал, что приведенный поток массы зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса, причем наибольшее отклонение значений наблюдается при приближении к свободномолекулярному режиму. Уменьшение коэффициента аккомодации тангенциального импульса приводит к увеличению массового потока через поперечное сечение канала.

Для режима течения, близкого к свободномолекулярному ( $Kn \gg 1$ ), выражения (18) и (19) для приведенных потоков тепла и массы могут быть представлены в виде рядов по малому параметру  $Kn^{-1}$ . В этом случае, ограничиваясь членами разложения порядка  $Kn^{-2}$ , получим

$$J_Q = -\frac{6(2-\alpha)}{\alpha\sqrt{\pi}} - \frac{2\sqrt{\pi}(\alpha^2 + 6(1-\alpha))}{5\alpha^2} \frac{1}{Kn} \ln\left(\frac{1}{Kn}\right),$$

$$J_M = -\frac{2}{9} J_Q. \quad (21)$$

Линейные члены относительно  $Kn^{-1}$  в (21) определяют приведенные потоки тепла и массы через поперечное сечение цилиндрического канала под действием

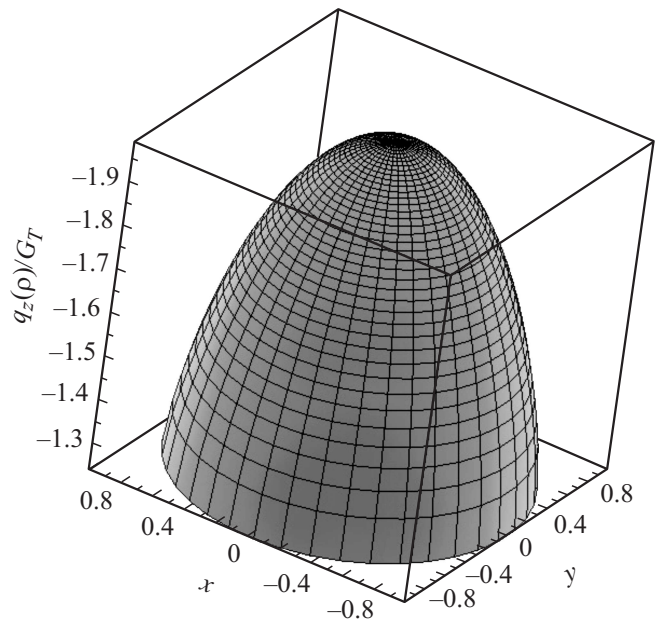


Рис. 1. Профиль вектора потока тепла в канале  $q_z(\rho)/G_T$  при  $\alpha = 1, Kn = 10^3$ .

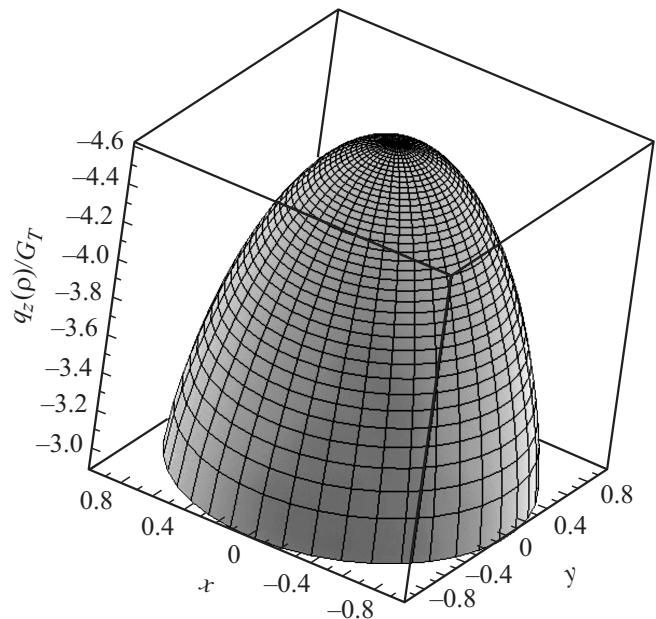
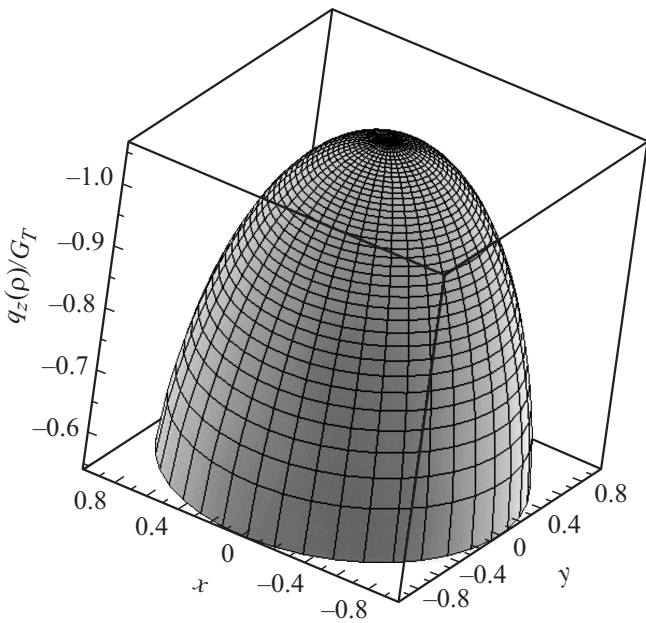


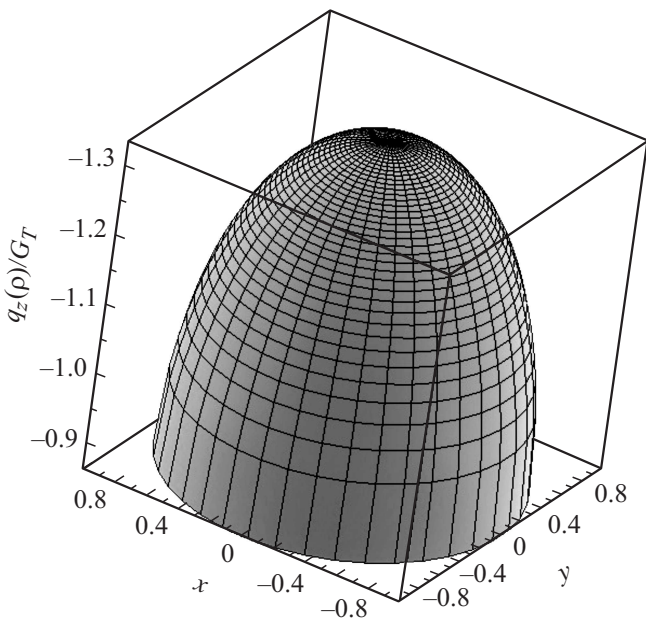
Рис. 2. Профиль вектора потока тепла в канале  $q_z(\rho)/G_T$  при  $\alpha = 0.6, Kn = 10^3$ .

постоянного градиента температуры в свободномолекулярном режиме и совпадают при  $\alpha = 1$  с выражениями  $J_Q = -6/\sqrt{\pi}$  и  $J_M = 4/(3\sqrt{\pi})$  из работы [6] при использовании диффузной модели отражения молекул газа от поверхности.

Для режимов течения, близких к гидродинамическому, анализ выражений (18) и (19) приводит к следую-



**Рис. 3.** Профиль вектора потока тепла в канале  $q_z(\rho)/G_T$  при  $\alpha = 1, Kn = 1$ .



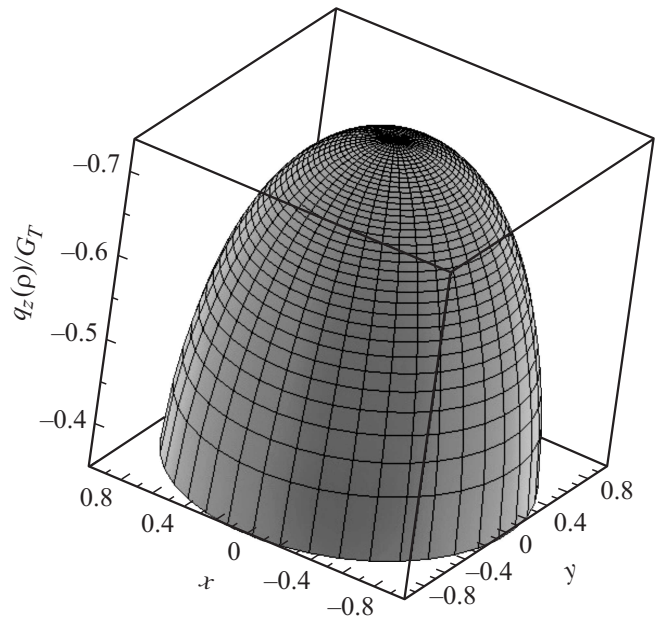
**Рис. 4.** Профиль вектора потока тепла в канале  $q_z(\rho)/G_T$  при  $\alpha = 0.6, Kn = 1$ .

щим результатам:

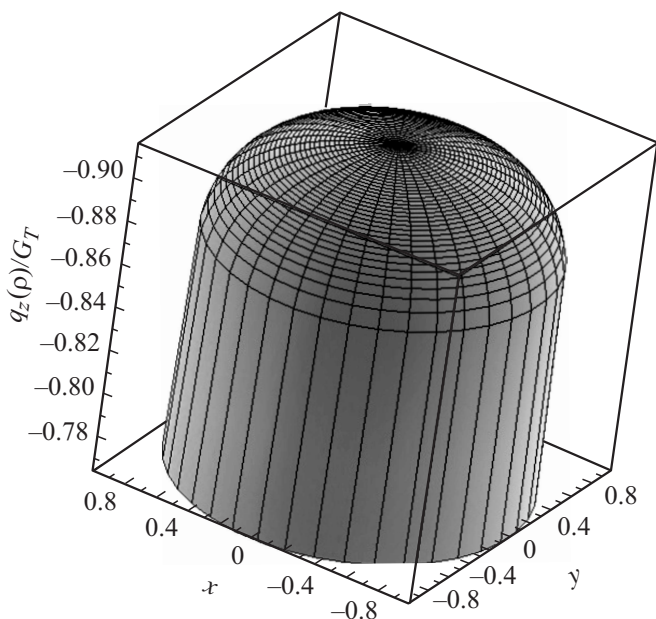
$$J_Q = -\frac{15G_T Kn}{4}, \quad J_M = \frac{5G_T Kn}{6}. \quad (22)$$

Таким образом, для режимов, близких к гидродинамическому режиму, приведенные потоки тепла и массы не зависят от коэффициента аккомодации тангенциального импульса. Последнее утверждение подтверждается результатами, приведенными в таблице для  $Kn < 0.0010$ ,

а выражение для  $J_Q/G_T$  в (22) совпадает с приведенным в работе [17]. Из выражения (22) для  $J_M/G_T$  вытекает, что коэффициент теплового скольжения равен  $5/6$ , что совпадает со значением, найденным в [22]. Как следует из таблицы, полученные в настоящей работе результаты отличаются от аналогичных результатов, полученных в работах [6,14] в рамках S-модели кинетического уравнения Больцмана. Отличие обусловлено тем фактом, что значения макропараметров газа в канале существенно зависят от выбора модели интеграла столкновений [6].



**Рис. 5.** Профиль вектора потока тепла в канале  $q_z(\rho)/G_T$  при  $\alpha = 1, Kn = 0.5$ .



**Рис. 6.** Профиль вектора потока тепла в канале  $q_z(\rho)/G_T$  при  $\alpha = 0.1, Kn = 0.5$ .

Профили распределения  $z$ -компоненты вектора потока тепла по сечению канала, рассчитанные согласно (17) в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа, показаны на рис. 1–6. Рис. 1, 3, 5 описывают процессы теплопереноса через поперечное сечение канала в случае полной аккомодации молекул газа на поверхности. Из представленных рисунков видно, что распределение компоненты вектора потока тепла имеет минимум в начале координат. При  $Kn \gg 1$  и  $\alpha = 1$  профиль вектора потока тепла представляет собой параболоид вращения с осью, совпадающей с осью цилиндра. При  $Kn \ll 1$  профиль вектора потока тепла образует плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, отклонение от которой имеет место в тонком пристеночном слое (слое Кнудсена), что совпадает с выводами работы [17].

## Заключение

В рамках кинетического подхода найдено решение задачи о переносе тепла и массы газа в цилиндрическом канале под действием постоянного градиента температуры с использованием диффузно-зеркальной модели отражения Максвелла. Построены профили вектора потока тепла в зависимости от коэффициента аккомодации тангенциального импульса, вычислены значения потока тепла через поперечное сечение канала в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными результатами при полной аккомодации молекул на стенках канала.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ по научному проекту № 16-29-15116 офи\_м.

## Список литературы

- [1] Ухов А.И., Борисов С.Ф., Породнов Б.Т. // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17. № 1. С. 141–150.
- [2] Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
- [3] Cercignani C., Lampis M. // Transport Theory Statist. Phys. 1971. Vol. 1. P. 101–114.
- [4] Гулакова С.В., Попов В.Н. // ЖТФ. 2015. Т. 85. № 4. С. 1–6.
- [5] Siewert C.E. // Z. Angew. Math. Phys. 2003. Vol. 54. P. 273–203.
- [6] Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.
- [7] Lo S.S., Loyalka S.K., Storvick T.S. // J. Chem. Phys. 1984. Vol. 81. P. 2439–2949.
- [8] Ewart T., Graur I., Perrier P., Meolans J.G. // Microfluidics and Nanofluidics. 2007. Vol. 26. N 6. P. 689–695
- [9] Silva E., Rojas-Cardenas M., Deschamps C.J. // International J. Refrigeration. 2016. Vol. 66. P. 121–132.
- [10] Sharipov F.M. // J. Vac. Sci. Technol. A. 1999. Vol. 17. N 5. P. 3062–3066.
- [11] Titarev V.A., Shakhov E.M. // Comput. Math. Math. Phys. 2010. Vol. 50. N 7. P. 1221–1237.
- [12] Гермидер О.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 6. С. 37–41.
- [13] Naris S., Valougeorgis D. // European J. Mechanics B / Fluids. 2008. Vol. 27. P. 810–822.
- [14] Siewert C.E., Valougeorgis D. // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2002. Vol. 72. P. 531–550.
- [15] Taheri P., Bahrami M. // Phys. Rev. 2012. Vol. 86. P. 1–9.
- [16] Kamphorst C.H., Rodrigues P., Barichello L.B. // Appl. Mathematics. 2014. Vol. 5. P. 1516–1527.
- [17] Germider O.V., Popov V.N., Yushkanov A.A. // J. Eng. Phys. Thermophysics. 2016. Vol. 89. N 5. P. 1338–1343.
- [18] Graur I., Sharipov F. // European J. Mechanics B / Fluids. 2008. Vol. 27. P. 335–345.
- [19] Pantazis S., Varoutis S., Hauer V., Day C., Valougeorgis D. // Vacuum. 2011. Vol. 85. P. 1161–1164.
- [20] Cercignani C. Mathematical Methods in Kinetic Theory. NY: Plenum Press, 1969. 227 p.
- [21] Курант П. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [22] Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ, 2004. 271 с.