

01;11

Взаимодействие химерных состояний в многослойной сети нелокально связанных осцилляторов

© М.В. Горемыко¹, В.А. Максименко¹, В.В. Макаров¹, Д. Гош²,
Б. Бера², С.К. Дана³, А.Е. Храмов^{1,¶}

¹ Саратовский государственный технический университет
им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

² Индийский статистический институт, Калькутта, Индия

³ Индийский институт химической биологии, Калькутта, Индия

¶ E-mail: hramovae@gmail.com

Поступило в Редакцию 28 апреля 2017 г.

Изучены процессы возникновения и эволюции химерных состояний в модели многослойной сети нелинейных элементов со сложной топологией связей. В качестве объекта исследования рассмотрена двухслойная сеть нелокально связанных в пределах слоя фазовых осцилляторов Курамото–Сакагучи. Продемонстрированы различные режимы, реализующиеся в данной системе при изменении степени взаимодействия между слоями сети.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.15.44871.16270

В настоящее время в радиофизике, биофизике и нелинейной динамике наблюдается значительный интерес к изучению химерных состояний [1], реализующихся в ансамблях нелинейных осцилляторов различной природы. Подобные состояния, характеризующиеся сосуществованием в сетях связанных осцилляторов групп когерентных и некогерентных элементов, были впервые обнаружены в 2002 г. [2] в сети нелокально связанных нелинейных элементов, описываемых уравнением типа Гинзбурга–Ландау.

В последнее десятилетие был опубликован ряд работ, описывающих реализацию химерных состояний в сетях нелинейных элементов, характеризующихся различным типом динамики. В данном контексте было рассмотрено образование химерных состояний как в одномерных системах (цепочках связанных осцилляторов) [3], так и в распределенных системах, состоящих из эквидистантно расположенных осцилляторов,

описывающихся уравнениями Ресслера [4], Фитцхью–Нагумо [5] и др. Химерные состояния были обнаружены в сетях с различной топологией связей. В частности, в работе [6] на примере сети нейронов Хиндмарш–Роуз химерные состояния были получены для случаев глобальной, нелокальной и даже локальной связи. Помимо симметричных связей, в работе [7] также была продемонстрирована возможность реализации химерных состояний в свободно масштабируемой (англ. scale-free) сети. Наряду с анализом модельных систем, интерес к химерным состояниям также обусловлен обнаружением в реальных системах состояний, свойства которых соответствуют химерам. В качестве таких систем, как правило, рассматриваются объекты биологической, химической и электронной природы [8–10].

Среди большого числа эффектов, ассоциирующихся с возникновением химерных состояний, важным и практически неизученным является вопрос устойчивости последних [11], в том числе в случае взаимодействия системы, демонстрирующей химеру, с системой, характеризующейся когерентным поведением всех узлов или полной некогерентностью. Очевидно, что подобная ситуация является распространенной в реальных системах, относящихся к соответствующим областям науки (например, нейронауки [12,13]), и ее рассмотрение, наряду с теоретическим интересом, обусловлено перспективой практического использования для понимания процессов в нейронных сетях [14].

Наиболее подходящей математической и физической моделью для изучения процессов взаимодействия объектов с сетевой структурой является модель многослойной сети (англ. multilayer network). Данная модель характеризуется наличием у каждого элемента двух типов связей. Первый тип характеризует взаимодействие элемента с другими узлами сети, находящимися в пределах одного слоя. Второй тип определяет связь данного элемента с элементами, относящимися к другим слоям сети. В зависимости от специфики задачи конфигурации связей между элементами многослойной сети могут быть различными. В рамках нашей работы будет рассмотрена конфигурация, описанная в нашей недавней работе [15].

Согласно [15], сеть, состоящая из N^M элементов, представляется в виде набора из M слоев (по N элементов на каждом слое). Связи между элементами внутри слоя распределены нелокально [6] (каждый элемент связан с $2R$ соседними элементами), взаимодействие между слоями реализуется посредством локальных связей между двумя смежными

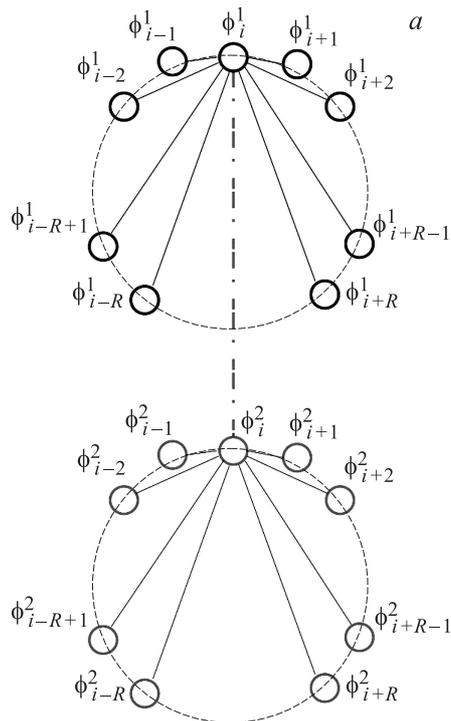


Рис. 1. Схематическое изображение модели многослойной сети с нелокальной связью между элементами одного слоя (а), распределения фаз осцилляторов на слоях в случае отсутствия межслойной связи (b), зависимость степени некогерентности S_i от фазового сдвига α (c). Осцилляторы первого слоя обозначены символами +, второго слоя — символами \times .

элементами. Схематически подобная модель изображена на рис. 1, а. Величины ϕ_i^j соответствуют динамическим переменным, характеризующим состояние узла сети, индексы i и j соответствуют порядковому номеру элемента внутри слоя и номеру слоя соответственно. Сплошными линиями обозначены связи элемента ϕ_i^j с соседними элементами внутри слоя, штрихпунктирной линией — межслойная связь, реализованная через взаимодействие элемента первого слоя ϕ_i^1 со смежным элементом второго слоя ϕ_i^2 .

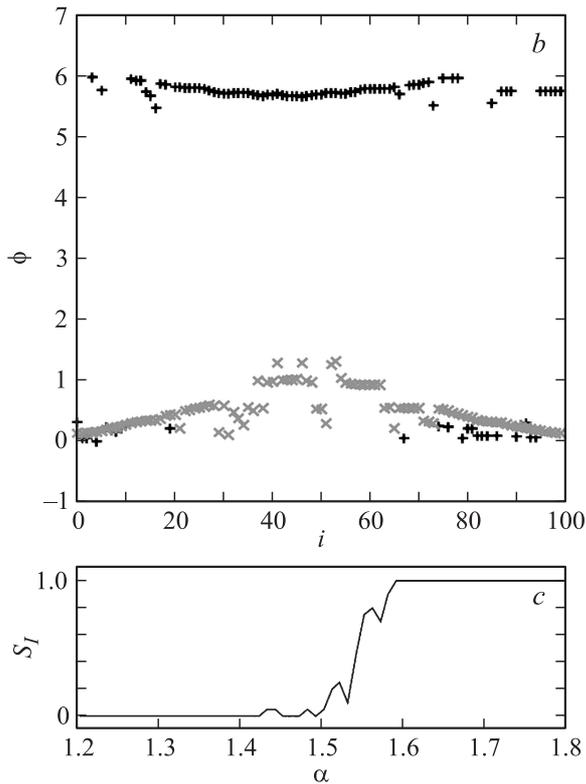


Рис. 1 (продолжение).

Для моделирования динамики узла сети в настоящей работе используется фазовый осциллятор Курамото–Сакагучи (1) [16], который часто применяется как базовая модель для численного и аналитического исследования химерных состояний [17]:

$$\frac{d\varphi_i^j}{dt} = \omega_i^j - \frac{\lambda_1}{2R+1} \sum_{k=i-2R}^{i+2R} \sin(\varphi_i^j - \varphi_k^j + \alpha) + \frac{\lambda_2}{M} \sum_{l \neq j} \sin(\varphi_i^j - \varphi_i^l). \quad (1)$$

Здесь ω_i^j — собственная частота осциллятора, λ_1 — коэффициент связи между осцилляторами внутри слоя, λ_2 — коэффициент межслойной

связи, R — радиус связи, M — число слоев, α — постоянный фазовый сдвиг. В работе рассматривается сеть идентичных осцилляторов $\omega_i^j = 1, \forall i, j$. При этом значения параметров выбраны как $\lambda_1 = 0.085, N = 100, M = 2, R = 35$. Следует отметить, что характеристики осцилляторов и топология связей внутри исследуемых слоев сети являются одинаковыми и удовлетворяют условию возникновения химерного состояния [17].

Для реализации качественно различных состояний на слоях сети в работе используются различные конфигурации начальных распределений фаз $\phi_i^1(0) \neq \phi_i^2(0), \forall i \in [1, N]$. Для использованных начальных условий в случае, когда связь между слоями отсутствует, реализующиеся состояния показаны на рис. 1, *b*. Видно, что как на первом, так и на втором слое часть осцилляторов пребывает в когерентном состоянии, в то время как остальные — некогерентны. При этом легко видеть, что порядковые номера осцилляторов, задействованных в когерентных и некогерентных кластерах, на различных слоях не коррелируют между собой.

Для изучения процессов взаимодействия между данными химерными состояниями в работе проводится численное моделирование динамики системы при увеличении параметра межслойной связи λ_2 . При этом для количественной диагностики химерного состояния рассчитывается величина S_I (2), характеризующая степень некогерентности (англ. strength of incoherent). Для расчета данной величины исследуемый ансамбль осцилляторов разбивается на m групп элементов по n элементов в группе. Для данного ансамбля S_I определяется как

$$S_I = 1 - \frac{\sum_{r=1}^m \Theta(\delta - \sigma_r)}{m}, \tag{2}$$

где $\Theta(\cdot)$ — функция Хевисайда, σ — описывает стандартное отклонение (3), характеризующее осцилляторы в группе с индексом r , $\delta = 0.035$ — пороговое значение. Величина σ_r рассчитывается для каждой группы при помощи соотношения

$$\sigma_r = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{s=n(r-1)+1}^m [\varphi_s - \Phi]^2} \right\rangle, \tag{3}$$

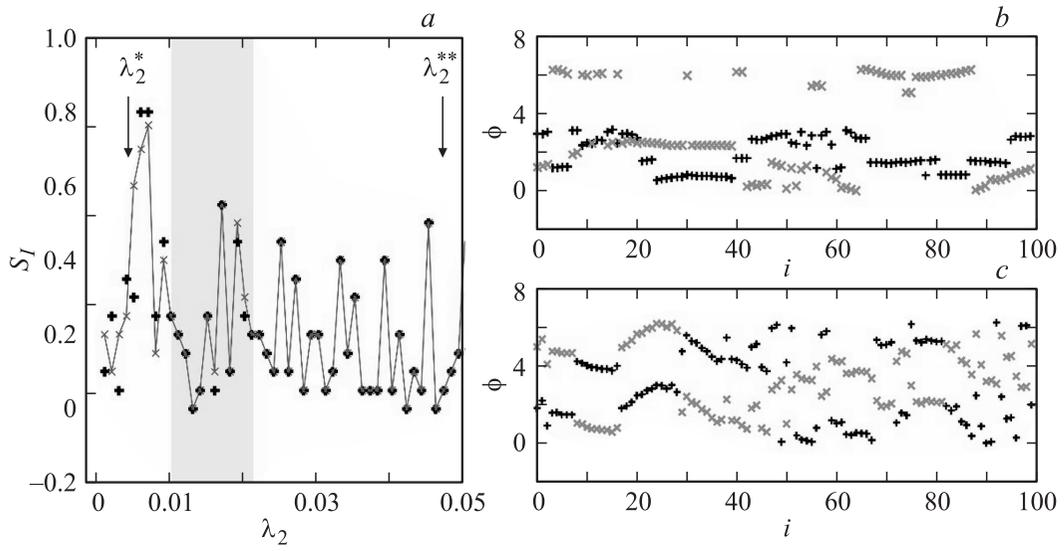


Рис. 2. Зависимости степени некогерентности S_I от параметра λ_2 , рассчитанные для двух слоев (a), распределения фаз осцилляторов на слоях, построенные для значений $\lambda_2 = \lambda_2^*$ (b) и $\lambda_2 = \lambda_2^{**}$ (c). Положения точек $\lambda_2 = \lambda_2^*$ и $\lambda_2 = \lambda_2^{**}$ показаны стрелками на рисунке (a).

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает усреднение по временному интервалу, Φ — средняя фаза по ансамблю.

В зависимости от значения величины S_I состояние сети можно трактовать как полностью когерентное $S_I = 0$, полностью некогерентное $S_I = 1$ или химерное $0 < S_I < 1$, соответствующее сосуществованию когерентного и некогерентного кластеров.

На рис. 1, *c* показана зависимость величины S_I от величины α , характеризующей фазовое соотношение в модели Курамото–Сакагучи. Область параметров, соответствующая химерным состояниям, выделена штриховкой. Исходя из приведенной зависимости, в нашем исследовании значение параметра α для каждого слоя было выбрано как $\alpha = 1.45$.

На рис. 2, *a* приведены зависимости параметра S_I , рассчитанные для двух слоев рассматриваемой сети при увеличении параметра λ_2 . Видно, что при $\lambda_2 < 0.01$ на слоях реализуются химерные состояния с различными свойствами. Типичные распределения фаз осцилляторов для этого случая показаны для двух слоев на рис. 2, *b*. Можно видеть, что как на первом, так и на втором слое существуют когерентные и некогерентные кластеры. Однако фазовые соотношения внутри этих кластеров и, более того, количество элементов, вовлеченных в них, различаются на разных слоях сети. В случае, когда значение λ_2 находится в интервале $[0.01, 0.02]$, в сети возможна реализация как состояний, характеризующихся одинаковыми распределениями фаз осцилляторов, принадлежащих каждому из слоев, так и различающихся на слоях. При дальнейшем увеличении значения λ_2 наблюдается переход к синхронной динамике слоев сети с образованием на слоях идентичных химерных состояний. Распределения фаз осцилляторов для данного случая показаны на рис. 2, *c*. Видно, что элементы на слоях демонстрируют одинаковую динамику.

Таким образом, в работе впервые изучено взаимодействие химерных состояний в многослойной сети фазовых осцилляторов. Показано, что увеличение степени межслойного взаимодействия не приводит к разрушению химерных состояний. Кроме того, обнаружено, что существуют области значений степени межслойного взаимодействия, при которых возможна реализация как различных, так и общих химерных состояний на слоях сети.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (15-02-00624) и Министерства образования и науки РФ (задания 3.861.2017/ПЧ и 3.4593.2017/ВУ).

Список литературы

- [1] *Abrams D.M., Strogatz S.H.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 174102.
- [2] *Kuramoto Y, Battogtokh D.* // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. V. 4. P. 380.
- [3] *Bordyugov G. et al.* // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 035205.
- [4] *Gu C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111. P. 134101.
- [5] *Sethia G.C. et al.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. P. 042917.
- [6] *Bera B. et al.* // Phys. Rev. E. 2015. V. 93. P. 012205.
- [7] *Yun Zhu et al.* // Phys. Rev. E. 2014. V. 89. P. 022914.
- [8] *Gambuzza L.V. et al.* // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. P. 032905.
- [9] *Tinsley M.R. et al.* // Nature Phys. 2012. V. 8. P. 662.
- [10] *Hagerstrom A. et al.* // Nature Phys. 2012. V. 8. P. 658.
- [11] *Sieber J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. P. 054102.
- [12] *Levy R. et al.* // J. Neurosci. 2000. V. 20. P. 7766.
- [13] *Motter A.E.* // Nature Phys. 2010. V. 6. P. 164.
- [14] *Panaggio M.J., Abrams D.M.* // Nonlinearity. 2015. V. 28. P. R67.
- [15] *Makarov V.V. et al.* // Chaos Soliton. Fract. 2016. V. 84. P. 23.
- [16] *Sakaguchi H., Kuramoto Y.* // Prog. Theor. Phys. 1986. V. 76. P. 576.
- [17] *Omel'chenko O.E., Wolfrum M.* // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. P. 164101.