

11

## Фильтрация зашумленных сигналов с использованием комплексных вейвлет-базисов

© А.С. Ясин<sup>1,2</sup>, О.Н. Павлова<sup>1</sup>, А.Н. Павлов<sup>1,3,4,¶</sup>

<sup>1</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

<sup>2</sup> Университет технологий, Багдад, Ирак

<sup>3</sup> Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

<sup>4</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

¶ E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступило в Редакцию 14 марта 2017 г.

Сопоставлены методы фильтрации, применяющие дискретное вейвлет-преобразование с вещественными базисами семейства Добеши и комплексное вейвлет-преобразование двойной плотности с избыточными (неортонормированными) базисами. Приведены рекомендации по выбору параметров фильтров для минимизации среднеквадратичной ошибки фильтрации зашумленных сигналов.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.14.44831.16770

Методы вейвлет-фильтрации за последние годы зарекомендовали себя в качестве надежного инструмента цифровой обработки экспериментальных данных, позволяющего проводить быструю очистку зашумленных сигналов и изображений от шумов и случайных искажений, включая локализованные помехи [1–5]. С этой целью во многих приложениях применяются подходы на основе ортонормированных вейвлет-базисов, таких как функции семейства Добеши, и пирамидальных алгоритмов разложения, использующих идеологию субполосного кодирования [2]. Эти подходы имеют ряд несомненных достоинств: быстродействие, позволяющее осуществлять обработку аудио- и видеосигналов в режиме реального времени; разложение сигнала с минимальным числом коэффициентов, которое обеспечивает более точное его представление и в особенности восстановление

сигнала после фильтрации помех [4]. Однако с развитием вычислительной техники произошла смена приоритетов, и на первое место выходит не скорость обработки данных, а качество фильтрации, оцениваемое по уровню среднеквадратичной ошибки [6,7] или другим критериям, применяемым с учетом специфики конкретного сигнала [8].

Вышесказанное обусловило значительное внимание к методам, использующим избыточные вейвлет-преобразования — фреймы [2,3]. Такие методы уменьшают искажения восстановленного сигнала в случае, когда при фильтрации удаляются информативные коэффициенты разложения, или присутствие значительного уровня фоновых помех снижает точность представления сигнала в базисе вейвлет-функций [4]. Несмотря на то что в качестве базисных могут применяться разные функции, предпочтение отдается использованию комплексных вейвлетов, которые позволяют избежать основных недостатков стандартного метода фильтрации на основе дискретного вейвлет-преобразования (ДВП). Среди таких недостатков следует отметить отсутствие инвариантности относительно сдвига базисной функции, осциллирующий характер коэффициентов разложения в окрестности сингулярностей и появление артефактов в сигнале, восстановленном после коррекции вейвлет-коэффициентов [9]. В работах [10,11] было обосновано, что для устранения данных недостатков целесообразно применение комплексных функций, у которых действительная и мнимая часть обладают свойством сопряжения по Гильберту, т.е. аналитических или почти аналитических вейвлетов. Однако выбор „хорошего“ базиса не гарантирует того, что проводимая с его помощью фильтрация обеспечит снижение ошибки, так как качество очистки сигналов от помех существенно зависит от параметров фильтров, таких как пороговый уровень, задаваемый при фильтрации, и от отношения сигнал/шум. В данной работе мы акцентируем внимание на настройке параметров вейвлет-фильтров, использующих комплексные базисы, и показываем, что для их эффективного применения важно контролировать величину порогового уровня.

Традиционно для коррекции вейвлет-коэффициентов выбирают два варианта задания пороговой функции — „жесткий“ и „мягкий“ [6,7]. В первом случае проводится обнуление коэффициентов, не превышающих пороговое значение  $C$ , а во втором — всех коэффициентов, но в

разной степени

$$y(x) = \begin{cases} x - C, & x \geq C, \\ x + C, & x \leq -C, \\ 0, & |x| \leq C. \end{cases} \quad (1)$$

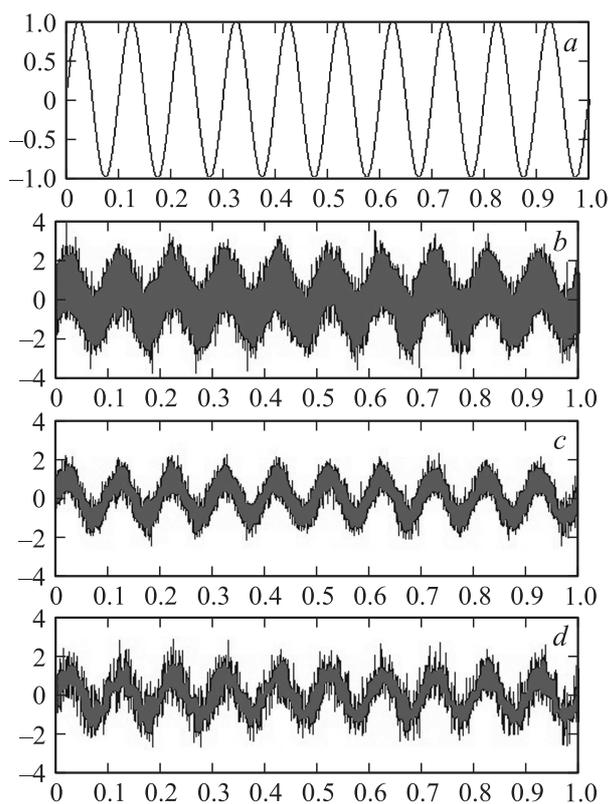
Этот вариант фильтрации позволяет избежать разрывов функции  $y(x)$ , приводящих к дополнительным искажениям восстановленного сигнала. В соответствии с выводами проведенных исследований [7] „мягкий“ вариант предпочтительнее при цифровой фильтрации сигналов и изображений. Более сложной задачей является выбор оптимального порогового уровня. Несмотря на существование ряда рекомендаций, они преимущественно были сделаны для фильтров на основе ДВП, и их применение в случае комплексных базисов не гарантирует минимальную ошибку фильтрации.

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим метод фильтрации на основе комплексного вейвлет-преобразования двойной плотности (КВПДП) [12,13], который в отличие от ДВП использует две вейвлет-функции  $\psi_i$  с сопряженными по Гильберту действительными и мнимыми частями. В результате при изменении масштаба детализирующие коэффициенты сохраняются полностью, а аппроксимирующие коэффициенты (коэффициенты разложения по скейлинг-функциям  $\varphi$ ) прореживаются в два раза. Масштабные преобразования определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_{1,2}(n) \psi_{1,2}(2t - n), \quad h_2(n) = h_1(n - 1), \\ \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \varphi(2t - n), \end{aligned} \quad (2)$$

а коэффициенты фильтров задаются в соответствии с таблицами, вычисленными в работе [12].

В целях сопоставления параметров, обеспечивающих наилучшее качество фильтрации, был рассмотрен тестовый пример — гармонические колебания с аддитивным белым шумом большой интенсивности (отношение сигнал/шум 0 dB). Вначале были сопоставлены результаты фильтрации для метода на основе ДВП, применяющего вейвлеты Добеши (рис. 1). Визуально видно, что качество фильтрации с использованием „мягкого“ варианта задания поровой функции выше,



**Рис. 1.** Фильтрация тестового сигнала на основе ДВП: *a* — исходный сигнал; *b* — зашумленный сигнал ( $SNR = 0\text{ dB}$ ); *c*, *d* — сигнал после фильтрации с применением „мягкого“ и „жесткого“ вариантов задания пороговой функции с использованием вейвлета  $D^{20}$  семейства Добеши; *e*, *f* — среднеквадратичная ошибка фильтрации в зависимости от выбора порогового уровня и величины  $SNR$ . Цифрами 1 и 2 показаны результаты расчетов для „мягкого“ и „жесткого“ вариантов задания пороговой функции.

чем для „жесткого“ (рис. 1, *c*, *d*). Расчеты подтверждают это как для рассмотренного примера (рис. 1, *e*), так и при других отношениях сигнал/шум (рис. 1, *f*). Полученные результаты являются ожидаемыми

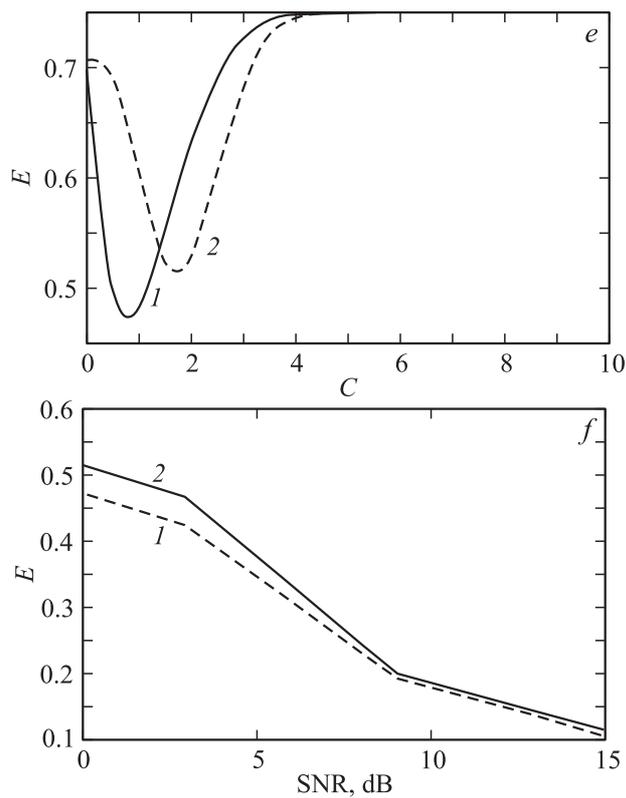
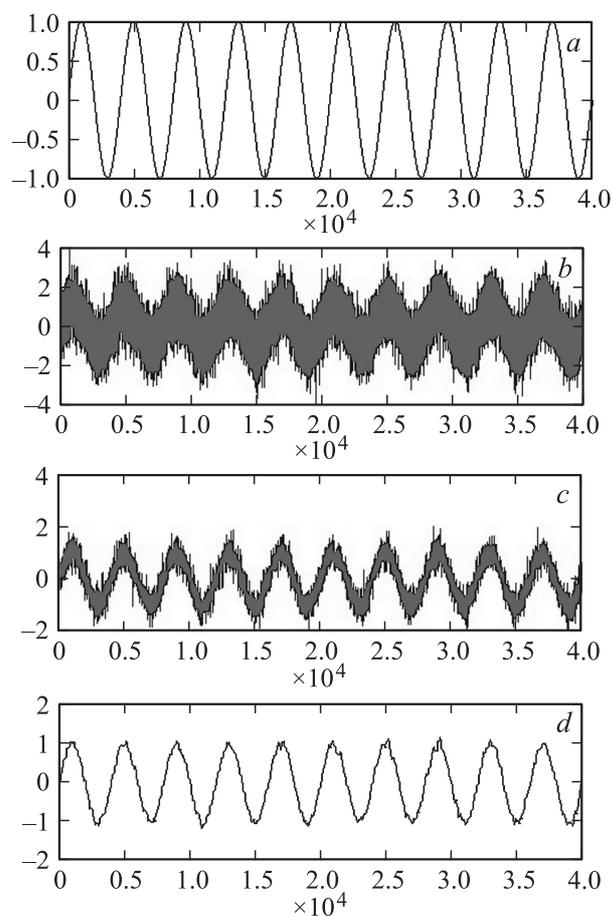


Рис. 1 (продолжение).

и соответствуют выводам других работ. Однако здесь хотелось бы обратить внимание на одно важное обстоятельство — преимущество выбора пороговой функции (1) проявляется только при малых  $C$  (рис. 1,  $e$ ). Если пороговый уровень задать большим, то ситуация принципиально изменится, и уже „жесткий“ вариант задания пороговой функции будет предпочтительнее.

Расчеты, приведенные на рис. 1, не предусматривали оптимизации выбора вейвлет-базиса семейства Добеши. Рассмотрим теперь следующую задачу — будем минимизировать ошибку фильтрации за счет



**Рис. 2.** Фильтрация тестового сигнала на основе КВПДП: *a* — исходный сигнал; *b* — зашумленный сигнал ( $SNR = 0\text{ dB}$ ); *c, d* — сигнал после фильтрации с применением методов ДВП (вейвлет  $D^7$  семейства Добеши) и КВПДП; *e, f* — среднеквадратичная ошибка фильтрации в зависимости от выбора порогового уровня и величины SNR. Цифрами 1 и 2 показаны результаты расчетов для методов КВПДП и ДВП соответственно.

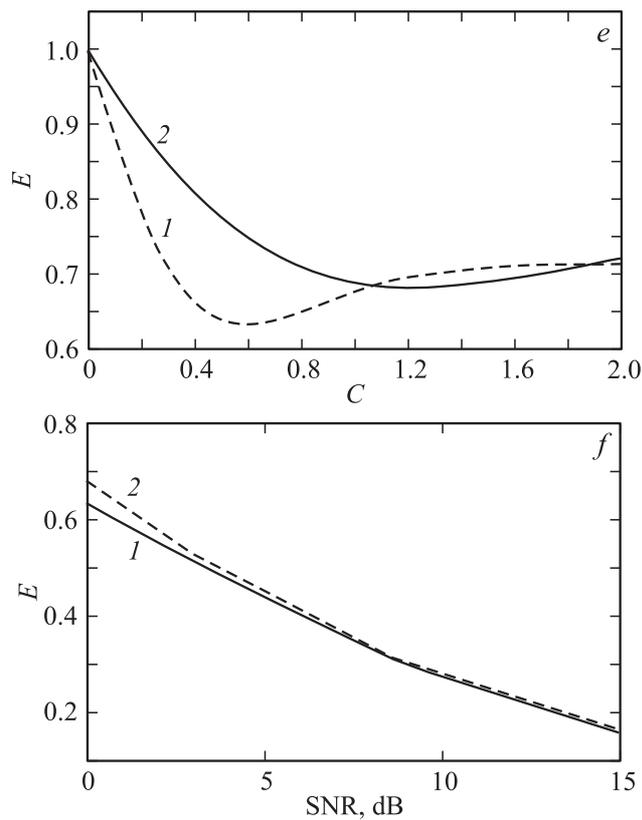


Рис. 2 (продолжение).

настройки параметров фильтра (вейвлет-базиса и порогового уровня  $C$ ). На рис. 2 приведены полученные результаты, в соответствии с которыми минимальная ошибка 0.68 получена для вейвлета Добеши  $D^7$  при пороговом уровне  $C = 1.22$ . Для удобства сравнения результатов в отличие от рис. 1 на рис. 2 представлены нормированные значения среднеквадратичной ошибки фильтрации.

Далее аналогичные расчеты были проведены для метода КВПДП. Визуально сопоставить качество фильтрации можно по рис. 2, *c*, *d*,

которые свидетельствуют о преимуществе алгоритма, применяющего комплексные вейвлет-базисы. В соответствии с расчетами, выполненными при разных значениях порогового уровня, минимальная среднеквадратичная ошибка фильтрации составляет 0.63 при  $C = 0.6$ . Таким образом, при использовании метода КВПДП не только происходит уменьшение ошибки фильтрации, но и примерно в 2 раза уменьшается оптимальный пороговый уровень. Если же величину порога задавать в соответствии с общими рекомендациями, применяемыми для метода ДВП (выбор универсального порога, задание  $C$  по методу SURE и т.д. [7]), то преимущества КВПДП не только не гарантируются, но полученные результаты могут даже оказаться хуже, чем для стандартного метода ДВП. Как видно из рис. 2, *e*, при оптимальном пороге для метода ДВП ( $C = 1.22$ ) алгоритм КВПДП приводит к более высокой ошибке фильтрации. Отметим, что комплексные вейвлет-базисы особенно эффективны при высоком уровне помех, а при фильтрации слабого шума результаты являются сопоставимыми (рис. 2, *f*).

Аналогичное сравнение рассмотренных методов фильтрации было проведено для других сигналов, в частности для аудиосигналов с подмешанным аддитивным шумом. Несмотря на индивидуальные особенности поведения зависимости ошибки фильтрации от выбранного порогового значения, качественное соответствие наблюдалось во всех рассмотренных примерах. При этом были подтверждены общие выводы о целесообразности снижения примерно в 2 раза оптимального порогового уровня, рассчитанного для метода ДВП при „мягком“ варианте задания пороговой функции. Данное снижение является одним из важных преимуществ метода КВПДП, так как оно позволяет в меньшей степени корректировать наиболее информативные вейвлет-коэффициенты, обеспечивая уменьшение риска внесения случайных искажений на этапе синтеза сигнала.

О.Н. Павлова благодарит за поддержку РФФИ (грант № 16-32-00188).

## Список литературы

- [1] Meyer Y. Wavelets: Algorithms and applications. Philadelphia: S.I.A.M., 1993.
- [2] Vetterli M., Kovacevic J. Wavelets and subband coding. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

- [3] *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
- [4] *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. С. 465 (*Dremin I.M., Ivanov O.V., Nechitaïlo V.A.* // Phys. Uspekhi. 2001. V. 44. P. 447).
- [5] *Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А.* и др. // Успехи физических наук. 2012. Т. 182. С. 905 (*Pavlov A.N., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* et al. // Phys. Uspekhi. 2012. V. 55. P. 845).
- [6] *Donoho D.L.* // IEEE Transact. Informat. Theory. 1995. V. 41. P. 613.
- [7] *Jansen M.* Noise reduction by wavelet thresholding. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [8] *Loizou P.C.* Speech enhancement. Theory and Practice (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press, 2013.
- [9] *Selesnick I.W., Baraniuk R.G., Kingsbury N.G.* // IEEE Signal Process. Mag. 2005. V. 22. P. 123.
- [10] *Rinsbury N.G.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 2001. V. 10. P. 234.
- [11] *Selesnick I.W.* // IEEE Signal Process. Lett. 2001. V. 8. P. 170.
- [12] *Selesnick I.W.* // IEEE Trans. Signal Process. 2004. V. 52 (5). P. 1304.
- [13] *Bhonsle D., Dewangan S.* // Int. J. Sci. Res. Public. 2012. V. 2 (7). P. 1.