01;09

Расчет импедансных вибраторных антенн

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
Великий Новгород
E-mail: eminovsi@mail.ru

Поступило в Редакцию 27 декабря 2016 г.

Метод аналитического обращения гиперсингулярного уравнения применен к уравнению импедансной вибраторной антенны. Разработан численный метод решения уравнения. Продемонстрирована эффективность метода.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.13.44805.16638

Задачей данной работы является сведение интегрального уравнения импедансной вибраторной антенны к уравнению Фредгольма второго рода и построение эффективного численного метода на основе полиномов Чебышева второго рода.

На поверхности вибраторной антенны выполняется граничное условие вида [1]

$$E_\tau(j_\tau) + E_\tau^0 = Z j_\tau, \tag{1}$$

где $E_\tau(j_\tau)$ — вторичное электрическое поле, создаваемое поверхностными токами j_τ, E_τ^0 — первичное электрическое поле, Z — поверхностный импеданс. Если поверхность антенны идеально-проводящая, то правая часть уравнения (1) равна нулю. Этот случай рассмотрен в работе [2]. Наличие правой части — оператора умножения на постоянную, существенно меняет структуру уравнения, усложняя ее. Поскольку единичный оператор ограничен в пространстве $L_2[-1, 1]$, он не является вполне непрерывным. Преобразуя левую часть, уравнение (1) можно записать как гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение вида [2]

$$
\begin{aligned}
&(Au)(\tau)+\alpha u(\tau)+\beta(Lu)(\tau)+(Ku)(\tau)\\
&\qquad\equiv \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1}u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\,dt\\
&\qquad+\alpha u(\tau)+\beta\int\limits_{-1}^{1}u(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}\,dt+\int\limits_{-1}^{1}K(\tau,t)u(t)dt=f(\tau),\\
&\qquad-1\leqslant\tau\leqslant 1,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где α и β — постоянные величины, ядро $K(\tau,t)$ является непрерывной функцией. Если поверхность антенны является идеально проводящей, то α равно нулю. Для импедансных вибраторных антенн α отлична от нуля.

Теория и методы решения уравнения (2) основаны на свойствах гиперсингулярного интегро-дифференциального оператора

$$
(Au)(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1}u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\,dt. \tag{3}
$$

Аналитическое обращение этого гиперсингулярного оператора получено в работе [2], а свойства изучены в работе [3]. Из этой работы приведем один результат, который нам потребуется.

Оператор A является симметричным положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ и имеет плотную область определения. Обратный к нему оператор определяется формулой

$$
(A^{-1}f)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}f(t)\ln\left|\frac{\tau-t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-\tau^2}}\right|dt \tag{4}
$$

и является не только ограниченным, но и вполне непрерывным оператором в пространстве $L_2[-1,1]$. Для любого ограниченного в пространстве $L_2[-1,1]$ оператора B оператор $T=A^{-1}B$ вполне непрерывен в энергетическом пространстве H_A симметричного положительно-определенного оператора A.

Умножая обе части уравнения (2) на оператор A^{-1}, получим

$$u(\tau) + \alpha(A^{-1}u)(\tau) + \beta(A^{-1}Lu)(\tau) + (A^{-1}Ku)(\tau) = A^{-1}f. \tag{5}$$

Одно из важных свойств этой теоремы заключается в том, что уравнение (5) является уравнением Фредгольма второго рода.

Введем систему функций

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin[n\arccos(\tau)] = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{1-\tau^2}U_n(\tau),\ \ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

$U(\tau)$ — полиномы Чебышева второго рода: $U_1(\tau) = 1$, $U_2(\tau) = 2\tau$, $U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$ и т.д. Эта система функций обладает тремя замечательными свойствами. Она является полной и ортонормированной в следующем смысле:

$$(A\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}, \tag{7}$$

здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2[-1, 1]$:

$$\big(f(\tau), g(\tau)\big) = \int\limits_{-1}^{1} f(\tau)\overline{g(\tau)}d\tau.$$

Наконец, каждая функция $\varphi_n(\tau)$ удовлетворяет условию Мейкснера на ребре. Благодаря последнему свойству система функций (6) широко применяется как в задачах расчета антенн, так и в теории дифракции.

Сформулируем метод Галеркина. Приближенное решение уравнения (2) ищется в виде

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n(\tau). \tag{8}$$

Подставим (8) в (2) и умножим скалярно в пространстве $L_2[-1, 1]$ на базисные функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_n + \alpha\sum_{m=1}^{N} c_m I_{mn} + \beta\sum_{m=1}^{N} c_m L_{mn} + \sum_{m=1}^{N} c_m K_{mn} = f_n, n = 1, 2, \ldots, N, \tag{9}$$

где

$$I_{mn} = (\varphi_m, \varphi_n), \quad L_{mn} = (L\varphi_m, \varphi_n), \quad K_{mn} = (K\varphi_m, \varphi_n), \quad f_n = (f, \varphi_n).$$

После решения системы (9) по формуле (8) найдем приближенное решение уравнения (5) или (2). Из сформулированной теоремы следует, что приближенное решение будет сходиться к точному решению в пространстве H_A и в $L_2[-1, 1]$.

Рассмотрим вопрос вычисления матричных элементов. Матрицы единичного оператора и интегрального оператора L с логарифмической особенностью в ядре удается найти в аналитическом виде. Вначале найдем преобразование Фурье базисных функций, как табличные интегралы [4]

$$\tilde{\varphi}_{2i-1}(x) = \int_{-1}^{1} \varphi_{2i-1}(t)\exp(itx)dt = (-1)^{i-1}\sqrt{2\pi(2i-1)}\,\frac{J_{2i-1}(x)}{x}, \quad (10)$$

$$\tilde{\varphi}_{2i}(x) = \int_{-1}^{1} \varphi_{2i}(t)\exp(itx)dt = i(-1)^{i-1}\sqrt{4\pi i}\,\frac{J_{2i}(x)}{x},$$

где J_{2i-1} — функция Бесселя. Применим формулу Парсеваля и сведем вычисление матричных элементов к вычислению интеграла по бесконечному промежутку

$$(\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = (-1)^{i+j}2\sqrt{(2i-1)(2j-1)}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}J_{2i-1}(x)J_{2j-1}(x)dx.$$

Последний интеграл также находится аналитически, как табличный интеграл [4]

$$(\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = (-1)^{i+j}\frac{1}{2}\sqrt{(2i-1)(2j-1)}$$
$$\times \frac{\Gamma(i+j-3/2)}{\Gamma(i-j+3/2)\Gamma(j-i+3/2)\Gamma(i+j+1/2)}. \quad (11)$$

С учетом следующих двух свойств гамма-функции

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}$$

представление (11) приводится к виду

$$(\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = \frac{\sqrt{(2i-1)(2j-1)}}{2\pi(i-j+1/2)(j-i+1/2)(i+j-3/2)(i+j-1/2)}. \tag{12}$$

Для нахождения матричных элементов оператора L применяется тождество [4]

$$\ln\frac{1}{|\tau - t|} = C + \int_0^1 \frac{\cos[x(\tau-1)]-1}{x}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{\cos[x(\tau-t)]}{x}\,dx, \tag{13}$$

$C = 0.5772.$

Используя преобразование Фурье базисных функций и применяя табличный интеграл [4]

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}J_m(cx)J_n(cx)dx = 2^{\alpha-1}c^{-\alpha}$$

$$\times\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma\big((m+n+\alpha)/2\big)}{\Gamma\big(1+(n-m-\alpha)/2\big)\Gamma\big(1+(m-n-\alpha)/2\big)\Gamma\big(1+(m+n-\alpha)/2\big)}, \tag{14}$$

найдем матричные элементы интегрального оператора L с логарифмической особенностью в ядре

$$(L\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{8}, \text{ если } i = j = 1, \tag{15}$$

$$(L\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = \frac{1}{8i(i-1)}, \text{ если } i = j > 1, \tag{16}$$

$$(L\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = -\frac{\sqrt{(2i-1)(2j-1)}}{4(i+j)(i+j-1)(i+j-2)}, \text{ если } j = i-1, \tag{17}$$

$$(L\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = (\varphi_{2i-1}, L\varphi_{2j-1}), \tag{18}$$

$$(L\varphi_{2i-1}, \varphi_{2j-1}) = 0, \text{ если } |i-j| > 1. \tag{19}$$

Зависимость приближенного решения от числа базисных функций

N	$\alpha = 0, \beta = 1/\pi$	N	$\alpha = 1/\pi, \beta = 1/\pi$
1	0.3339772	1	0.2154801
2	0.3275391	2	0.2089073
3	0.3276998	3	0.2025135
4	0.3276989	4	0.2021649
5	0.3276989	5	0.2022841
10	0.3276989	10	0.2022471
20	0.3276989	20	0.2022492
40	0.3276989	40	0.2022493
80	0.3276989	80	0.2022493

Формулы (15)–(19) в таком полном виде приводятся впервые в научной литературе. Наконец, матрица интегрального оператора K с непрерывным ядром эффективно считается на ЭВМ.

Эффективность метода продемонстрируем на следующем модельном уравнении:

$$(Au)(\tau) + \alpha u(\tau) + \beta(Lu)(\tau) \equiv \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt +$$

$$+ \alpha u(\tau) + \beta\int_{-1}^{1} u(t)\ln\frac{1}{|\tau - t|}\,dt = 0.5, \quad -1 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{20}$$

В таблице приводятся значения решения интегрального уравнения в нуле, т.е. $u(0)$. Таблица характеризует быструю сходимость метода Галеркина. Это связано с двумя важными причинами: во-первых, все матричные элементы найдены аналитически и, во-вторых, матрица интегрального оператора L является трехдиагональной.

Таким образом, доказано, что интегральное уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Решена задача вычисления матричных элементов и разработан численный метод решения интегрального уравнения. На модельном примере показана высокая эффективность метода.

Список литературы

[1] *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
[2] *Эминов С.И.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 22. С. 8–16.
[3] *Эминова В.С., Эминов С.И.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 3. С. 432–440.
[4] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.