

03

Об устойчивости капиллярных волн на поверхности объемно заряженной струи диэлектрической жидкости, движущейся в материальной среде

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Г.Е. Михеев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150003 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 5 июля 2016 г. В окончательной редакции 31 января 2017 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности объемно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды. Показано, что наличие тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи, приводит к периодической неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца на границе раздела сред и носит дестабилизирующий характер. Ширина диапазонов волновых чисел неустойчивых волн и величина инкрементов неустойчивости зависят от квадрата скорости относительного движения, увеличиваясь с ростом скорости. С ростом объемной плотности заряда критическая для реализации неустойчивости величина скорости снижается. Уменьшение диэлектрической проницаемости жидкости струи или увеличение диэлектрической проницаемости среды приводит к сужению зон неустойчивости и к росту инкрементов. Волновое число наиболее неустойчивой волны растет по степенному закону с увеличением объемной плотности заряда и скорости струи. Изменение диэлектрических проницаемостей струи и среды влияет на волновое число наиболее неустойчивой волны в противоположных направлениях.

DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44720.1969

Введение

Явление электрогидродинамической неустойчивости заряженной поверхности жидкости с произвольной электропроводностью, на финальной стадии развития которой происходит выброс струй, либо устойчивых, либо распадающихся на капли, широко используется в технике и технологии (см., например, обзоры [1–4], оригинальные статьи [5–10] и приведенную там литературу). Закономерности реализации неустойчивости и распада на капли объемно заряженных струй жидкости подробно исследованы как экспериментально, так и теоретически. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с обсуждаемым феноменом, остались за рамками проведенных исследований. В частности, сказанное относится к особенностям распада на отдельные капли заряженных струй при учете взаимодействия капиллярных волн на поверхности струи с внешней средой. Собственно говоря, в большинстве практических применений феномена распада струй присутствует среда с отличной от нуля плотностью. Однако специальных исследований, посвященных влиянию среды на капиллярный распад струй, выполнено весьма мало [2], хотя, исходя из общезначимости формулировки проблемы, естественно ожидать реализации на поверхности струи идеальной несжимаемой жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой среды, аналога неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [9,11], что окажет существенное влияние на феноменологию распада. В отличие от капиллярной неустойчивости струи, имеющей апероди-

ческий характер, когда временная зависимость амплитуд определяется выражением $\sim \exp(\gamma t)$, где γ вещественно, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца является колебательной, т. е. соответствует экспоненциальному росту со временем амплитуды неустойчивой волны $\sim \exp(\gamma t) \cos(\omega t)$, где ω — частота. В указанных условиях наличие внешней для струи среды будет приводить к ее дестабилизации, что и было предсказано Рэлеем и Бассетом в [12,13]. В последнее время выполнено несколько теоретических аналитических исследований физических закономерностей распада на капли заряженных струй электропроводной жидкости, движущихся относительно внешней среды, проведенных как в линейных, так и в нелинейных расчетах по амплитуде волн (см., например, [4,9,14–19] и указанную там литературу). В этой связи представляется актуальным исследовать особенности реализации капиллярной неустойчивости объемно заряженной струи диэлектрической жидкости, движущейся относительно диэлектрической среды. Этой проблеме и посвящено настоящее рассмотрение.

Формулировка задачи

Пусть дана бесконечная, движущаяся вдоль оси симметрии равновесной поверхности с постоянной скоростью U цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости радиуса R с массовой плотностью ρ_1 , диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и коэффициентом межфазного натяжения σ . Окружающая

струю среда моделируется идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и массовой плотностью ρ_2 . В нижеследующем изложении нижним индексом 1 будем отмечать физические величины, относящиеся к струе, а индексом 2 — относящиеся к среде. Примем, что струя объемно заряжена, и что в рамках модели „вмороженного“ заряда он распределен равномерно по объему с постоянной объемной плотностью μ , при этом на единицу длины струи приходится заряд $\eta \equiv \pi R^2 \mu$. Напряженность электрического поля в струе будет $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, в среде — $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$.

Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью \mathbf{U} . В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными капиллярными волнами на ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда капиллярных волн. Предполагаем, что в жидкости существует волновое движение во всем спектре длин капиллярных волн, и имеет место искажение равновесной поверхности раздела сред весьма малой (тепловой) амплитуды с характерной высотой гребней $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Эти волны порождаются уже тепловым движением молекул жидкости [20].

Будем искать критические условия реализации неустойчивости капиллярных волн на границе раздела сред. Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат с осью OZ , совпадающей с осью симметрии струи, орт \mathbf{e}_z которой направлен вдоль вектора скорости \mathbf{U} .

В безразмерных переменных, в которых радиус струи R , плотность жидкости ρ_1 и коэффициент поверхностного натяжения σ выбраны в качестве основных масштабов ($R = \rho_1 = \sigma = 1$), уравнение границы раздела сред, искаженной капиллярным волновым движением малой амплитуды, может быть записано в виде

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \xi(\varphi, z, t),$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ — функция возмущения равновесной поверхности струи, вызванного капиллярными волнами на границе раздела сред. Для всех жидкостей (включая жидкие металлы) амплитуда тепловых волн не превышает ангстрема, так что $|\xi| \ll 1$.

Математическая формулировка задачи о расчете устойчивости капиллярных волн на поверхности струи имеет вид (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\text{div } \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla P_1(\mathbf{r}, t),$$

$$\text{div } \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho_2} \nabla P_2(\mathbf{r}, t),$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi\mu}{\epsilon_1},$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Дополним систему уравнений естественными граничными условиями:

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{U} = -U\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r \rightarrow 0 : \quad \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)| < \infty,$$

На поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды, заданной уравнением

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0,$$

должны выполняться следующие граничные условия: кинематическое

$$-\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{U}_j, \nabla F) = 0 \quad (j = 1, 2);$$

динамические

$$P_1 - P_2 + P_E = P_\sigma, \quad \epsilon_2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_2)(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_2) = \epsilon_1(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1)(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_1);$$

и условия на компоненты вектора напряженности электрического поля на границе раздела двух диэлектриков

$$(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_2) = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}_1), \quad \epsilon_2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_2) = \epsilon_1(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1).$$

В выписанных соотношениях $\mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$ и $P_j(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей и поля давлений внутри и вне струи;

$$P_E(\mathbf{r}, t) = -\mu\Phi_1 + \frac{\epsilon_1}{8\pi} (E_1^2 - 2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1)^2) - \frac{\epsilon_2}{8\pi} (E_2^2 - 2(\mathbf{n}, \mathbf{E}_2)^2)$$

— давление электрического поля на поверхность струи;

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla F(\mathbf{r}, t)}{|\nabla F(\mathbf{r}, t)|} \Big|_{F(\mathbf{r}, t)=0}$$

— давление капиллярных сил (Лапласовское); \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — орты нормали и касательной к возмущенной поверхности струи.

Кроме приведенных условий должно выполняться дополнительное требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\xi(\varphi, z, t)} r \, dr \, d\varphi \, dz = \pi\lambda.$$

Скаляризация задачи

С учетом идеальности и несжимаемости жидкостей, которыми моделируются капля и среда, воспользуемся моделью потенциального волнового движения жидкостей, в рамках которой можно ввести гидродинамические потенциалы поля скоростей $\psi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi_j(\mathbf{r}, t) \quad (j = 1, 2).$$

В силу выписанных выше уравнений напряженности электрического поля также можно представить через электрические потенциалы $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi_j(\mathbf{r}, t) \quad (j = 1, 2).$$

Потенциалы $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$ будут являться решениями уравнений:

$$\Delta\psi_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\psi_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\Delta\Phi_1 = -\frac{4\pi\mu}{\varepsilon_1}, \quad \Delta\Phi_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$

удовлетворять условиям ограниченности:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad |\Phi_1(\mathbf{r}, t)| < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow -Uz, \quad \Phi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

и выписанным выше условиям на границе раздела сред.

Введение потенциалов скоростей позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера и получить выражения для давлений в обеих средах

$$P_1(\mathbf{r}, t) = -\partial_t\psi_1(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2}(\nabla\psi_1(\mathbf{r}, t))^2 + C_1,$$

$$P_2(\mathbf{r}, t) = -\rho_2\partial_t\psi_2(\mathbf{r}, t) - \frac{\rho_2}{2}(\nabla\psi_2(\mathbf{r}, t))^2 + C_2,$$

где C_j — константы интегрирования.

Решение задачи

Искомые функции представим в виде разложений по малому параметру — безразмерной амплитуде волнового возмущения поверхности [21], как это было проделано в [15]

$$\xi(\varphi, z, t) = \xi^{(1)}(\varphi, z, t), \quad \psi_1(r, \varphi, z, t) = \psi_1^{(1)}(r, \varphi, z, t),$$

$$\psi_2(r, \varphi, z, t) = \psi_2^{(0)}(z) + \psi_2^{(1)}(r, \varphi, z, t),$$

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) = \Phi_1^{(0)}(r) + \Phi_1^{(1)}(r, \varphi, z, t),$$

$$\Phi_2(r, \varphi, z, t) = \Phi_2^{(0)}(r) + \Phi_2^{(1)}(r, \varphi, z, t),$$

$$P_1(r, \varphi, z, t) = P_1^{(0)} + P_1^{(1)}(r, \varphi, z, t),$$

$$P_2(r, \varphi, z, t) = P_2^{(0)} + P_2^{(1)}(r, \varphi, z, t),$$

верхний индекс (в скобках) указывает порядок малости слагаемого.

Разделяя задачу по порядкам малости, найдем в нулевом порядке по аналогии с [15]

$$\Phi_1^{(0)}(r) = -\frac{\pi\mu}{\varepsilon_1}r^2, \quad \Phi_2^{(2)}(r) = -\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_2}\ln(r),$$

$$\psi_2^{(0)}(z) = -Uz, \quad P_1^{(0)} = p_0 - \frac{1}{2}\rho_2U^2,$$

$$P_2^{(0)} = p_0 - \frac{1}{2}\rho_2U^2 + 1 - \frac{\pi\mu^2}{2} \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2},$$

где p_0 — заданное гидростатическое давление в среде. Это решение характеризует исходную равновесную ситуацию.

В первом порядке малости неизвестные функции будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(r, \varphi, z, t) = \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} (B_1(t) \exp(im\varphi) \\ + B_2(t) \exp(-im\varphi)) \exp(ikz) + \text{к.с.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)}(r, \varphi, z, t) = \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} (A_1(t) \exp(im\varphi) \\ + A_2(t) \exp(-im\varphi)) \exp(ikz) + \text{к.с.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(r, \varphi, z, t) = \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} (F_{11}(t) \exp(im\varphi) \\ + F_{12}(t) \exp(-im\varphi)) \exp(ikz) + \text{к.с.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1)}(r, \varphi, z, t) = \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} (F_{21}(t) \exp(im\varphi) \\ + F_{22}(t) \exp(-im\varphi)) \exp(ikz) + \text{к.с.} \end{aligned}$$

В записанных выражениях $I_k(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные цилиндрические функции первого и второго рода порядка m [22], k — волновое число, m — азимутальное число, аббревиатура к.с. обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

В аналогичном виде представим и выражение для возмущения формы поверхности струи

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(\varphi, z, t) = (\alpha_1(t) \exp(im\varphi) + \alpha_2(t) \exp(-im\varphi)) \\ \times \exp(ikz) + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Подставив выражения для искомых потенциалов и для возмущения поверхности струи в граничные условия, после несложных расчетов найдем дисперсионное уравнение задачи, как это было сделано в [15], в виде

$$\omega^2 + 2\omega kU\gamma(m, k) - \omega_0^2 = 0. \quad (1)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g(m, k)}{(1 - \rho_2 \frac{g(m, k)}{h(m, k)})} \left(k^2 + m^2 - 1 + \frac{\pi \mu^2}{(\epsilon_1 g(m, k) - \epsilon_2 h(m, k))} \right) \times \left(4 - g(m, k) \left(3 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) + h(m, k) \left(3 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) \times g(m, k) h(m, k) \left(+ \frac{k^2 U^2 \rho_2}{h(m, k)} \right),$$

$$\gamma(m, k) \equiv \frac{\rho_2 g(m, k)}{h(m, k) - \rho_2 g(m, k)}.$$

Корни уравнения (1) легко выписываются:

$$\omega = -\omega_1 \equiv -kU\gamma(m, k) - \sqrt{k^2 U^2 \gamma(m, k)^2 + \omega_0^2},$$

$$\omega = \omega_2 \equiv -kU\gamma(m, k) + \sqrt{k^2 U^2 \gamma(m, k)^2 + \omega_0^2}. \quad (2)$$

Обсуждение полученных результатов

Рассмотрим осесимметричные ($m = 0$) волновые возмущения поверхности струи (границы раздела сред). В отсутствие электрического заряда поверхность струи всегда неустойчива по отношению к осесимметричным волнам с волновыми числами $k < 1$, т.е. с длинами, превышающими длину окружности недеформированного сечения струи ($\lambda > 2\pi$), поскольку потенциальная энергия сил поверхностного натяжения цилиндрической струи превышает потенциальную энергию совокупности сферических капель, на которые разобьется струя [23]. В то же время капиллярные волны на поверхности струи с безразмерными волновыми числами, большими единицы ($k > 1$), устойчивы. Наличие у струи заряда и тангенциального скачка поля скоростей на границе раздела с окружающей средой являются дестабилизирующими факторами, приводящими к расширению диапазона неустойчивых волн и к увеличению инкрементов нарастания амплитуд волн в зонах их неустойчивости.

На рис. 1, *a* представлены зависимости реальной и мнимой частей частот волн на поверхности незаряженной струи $-\omega_1, \omega_2$, от волнового числа k при разных значениях скорости движения U . Отметим, что области, в которых мнимые части частот отличны от нуля, являются зонами неустойчивости. Величина мнимой части частоты определяет инкремент, характеризующий скорость нарастания амплитуды неустойчивой волны.

Кривые 1–3 и 7–9 соответствуют частотам, кривые 4–6 — инкрементам волн. Совпадающая с осью абсцисс линия 9 соответствует нулевой частоте. Ветви 7–9 описывают реальную часть полной частоты и соответствуют первому слагаемому в (2) (стоящему вне радикала). Видно, что с ростом волнового числа (т.е. с уменьшением длины волны) частоты увеличиваются. Увеличение скорости приводит как к расширению диапазона волновых чисел неустойчивых волн, так и к росту их инкрементов (линии 4–6).

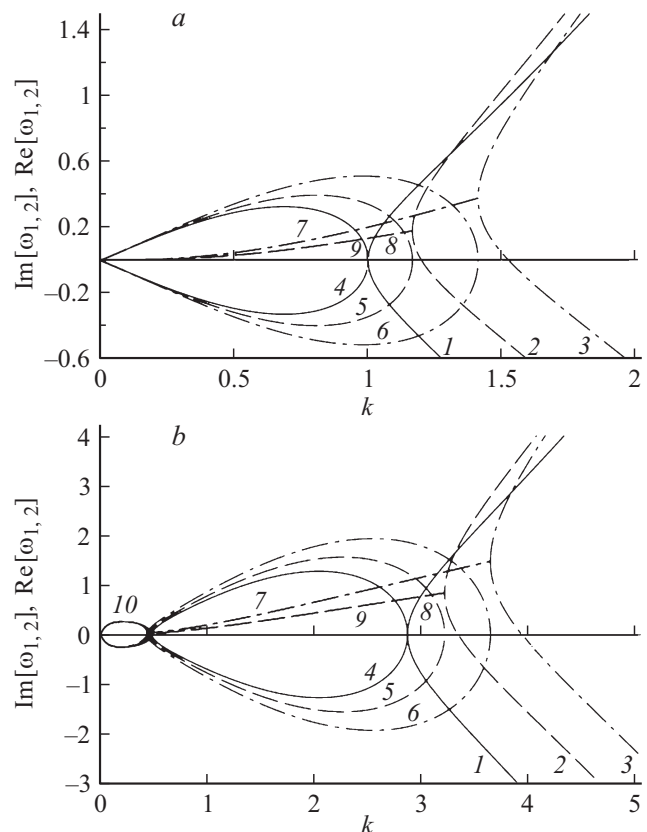


Рис. 1. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн на поверхности заряженной струи при различных значениях объемных зарядов, рассчитанные при $\rho_2 = 0.5, \epsilon_1 = 80, \epsilon_2 = 1$: *a* — $\mu = 0$, *b* — $\mu = 1$. $U = 0$ — сплошные линии, $U = 1$ — штриховые линии, $U = 1.5$ — штрихпунктирные линии. Все физические величины здесь и ниже приводятся безразмерными.

На рис. 1, *b* представлены такие же зависимости как на рис. 1, *a*, но для заряженной струи. Несложно видеть, что появление заряда на струе приводит к возникновению области устойчивости при малых значениях волновых чисел. Нумерация кривых такая же, как на рис. 1, *a*. Вновь появившаяся ветвь 10 соответствует частоте и обязана своим происхождением появлению на струе заряда. Из сравнения рис. 1, *a* и *b* видно, что, кроме появления ветви 10 отличный от нуля заряд приводит к расширению зон неустойчивости и к их смещению в сторону коротких волн.

Нужно отметить, что малые значения волнового числа соответствуют большим длинам волн, и, говоря о капиллярных волнах на поверхности струи, следует ограничивать рассмотрение волнами с длинами порядка капиллярной постоянной рассматриваемой жидкости ($\lambda < \sqrt{g\rho_1/\sigma}$, где g — ускорение свободного падения). И хотя g не входит в используемую математическую модель, капиллярная постоянная может служить маркером, отмечающим область капиллярных явлений. На графиках зависимости, рассчитанные в области $k \ll 1$, при-

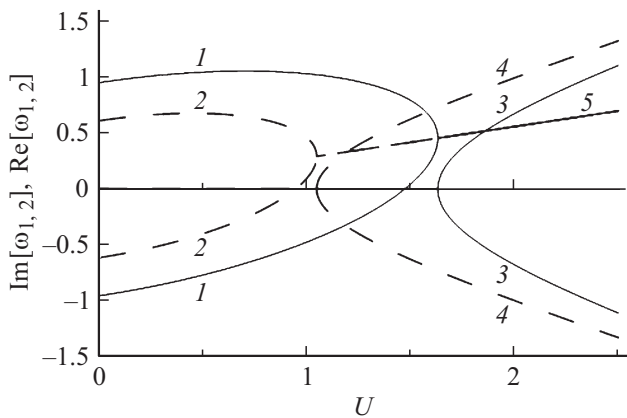


Рис. 2. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн от величины скорости движения струи U , рассчитанные при $k = 1.5$, $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$; $\mu = 0$ — сплошные линии; $\mu = 0.5$ — штриховые линии.

водятся чисто с иллюстративными целями, чтобы продемонстрировать качественный их ход при изменении физических параметров.

Как следует из рис. 1, учет влияния материальной внешней среды и относительного движения струи, приводит к тому, что в области неустойчивости волн (в области, где инкремент отличен от нуля) реальная часть частоты, равная нулю при $U = 0$, становится отличной от нуля, что соответствует колебательному характеру развития неустойчивости. Это является характерной чертой неустойчивости типа Кельвина–Гельмгольца, вызываемой тангенциальным скачком поля скоростей на границе раздела сред. Видно, что с ростом скорости U увеличиваются и характерные размеры области неустойчивости.

Используемое в расчетах значение плотности окружающей среды ρ_2 принято сравнимым по величине с плотностью жидкости струи ρ_1 , но сделано это только ради наглядности. Если взять значение ρ_2 соответствующим газу, например, $\rho_2 \approx 0.001$, то в качественном отношении приведенные зависимости останутся прежними, но станут столь мелкомасштабными, что на графиках изобразить их разборчиво будет проблематично (поскольку, как видно из (2), разные слагаемые станут несоизмеримыми по величине).

На рис. 2 для волны с волновым числом $k = 1.5$ при разных значениях объемной плотности заряда представлены зависимости вещественных и мнимых частей частот от величины скорости движения струи U . Кривые 1, 2, 5 соответствуют частотам, кривые 3, 4 — инкрементам. Угол наклона линии 5, согласно (2), определяется волновым числом k и плотностью окружающей среды. Видно, что увеличение объемной плотности заряда приводит к уменьшению частот в зоне устойчивости (кривые 1, 2), а также к снижению критического значения скорости, при котором начинается развитие

неустойчивости, и росту величины инкремента в области неустойчивости.

К аналогичным выводам приводят и зависимости вещественных и мнимых частей частот (инкрементов) от величины объемной плотности заряда для разных волновых чисел, представленные на рис. 3. Кривые 1, 2, 5, 6 соответствуют частотам, кривые 3, 4 инкрементам. Видно, что с ростом волнового числа критическое для реализации неустойчивости значение плотности заряда увеличивается, растет и величина частоты, описываемой ветвью 6 (по сравнению с ветвью 5). Увеличение объемной плотности заряда μ приводит к уменьшению вещественных частей частот в зоне устойчивости (кривые 1, 2) и к увеличению мнимых их частей в области неустойчивости (кривые 3, 4).

На рис. 4 представлены зависимости, отражающие влияние диэлектрической проницаемости жидкости

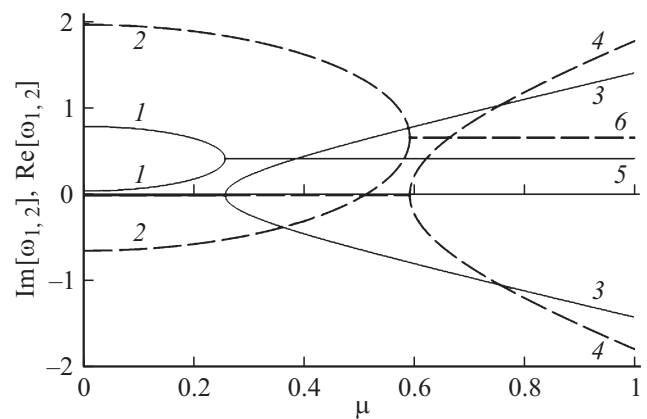


Рис. 3. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн от величины объемного заряда для различных волновых чисел, рассчитанные при $U = 1.5$, $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$: $k = 1.5$ — сплошные линии, $k = 2$ — штриховые линии.

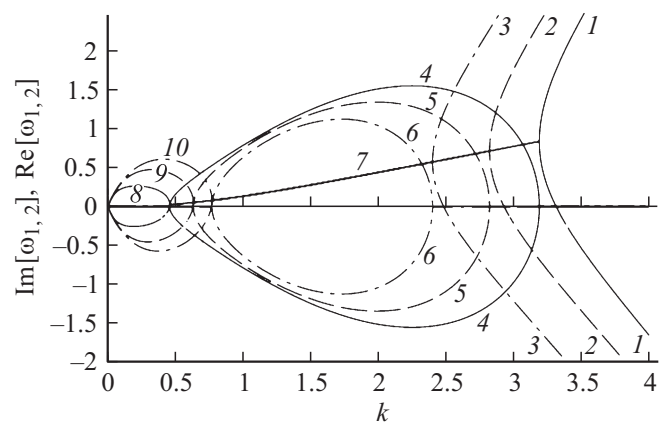


Рис. 4. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн от величины волнового числа, рассчитанные при $U = 1$, $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu = 1$ и различных значениях диэлектрической проницаемости жидкости струи: $\varepsilon_1 = 80$ — сплошные линии, $\varepsilon_1 = 10$ — штриховые линии, $\varepsilon_1 = 3$ — штрихпунктирные линии.

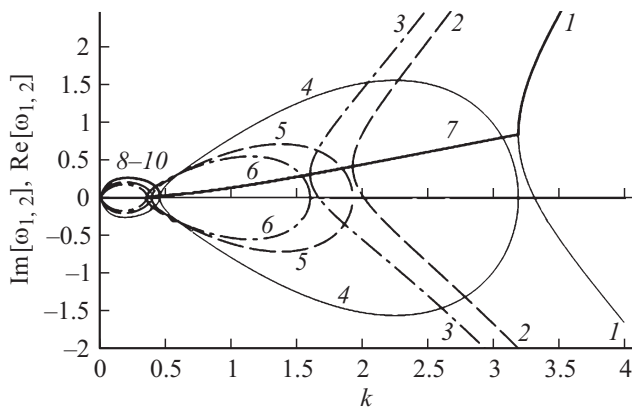


Рис. 5. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн от величины волнового числа, рассчитанные при $\mu = 1$, $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_1 = 80$, $U = 1$ и различных значениях диэлектрической проницаемости среды: $\varepsilon_2 = 1$ — сплошные линии, $\varepsilon_2 = 2$ — штриховые линии, $\varepsilon_2 = 3$ — штрихпунктирные линии.

струи на устойчивость ее поверхности. Кривые 1–3, 7–10 соответствуют частотам волн, кривые 4–6 — их инкрементам. Можно заметить, что уменьшение ε_1 сужает диапазон неустойчивых волн и приводит к снижению величины инкремента неустойчивости волн с фиксированным волновым числом. Интересно, что в области малых волновых чисел (начиная от $k = 0$) появляется область устойчивых волн, расширяющаяся при уменьшении ε_1 .

На рис. 5 приведены зависимости от волнового числа, указывающие на наличие влияния диэлектрической проницаемости среды ε_2 на устойчивость волн. Отметим, что в отличие от предыдущего случая, не уменьшение, а увеличение ε_2 уменьшает геометрические размеры зон неустойчивости и величины инкрементов. Нумерация кривых такая же, как на предыдущем рисунке (кривые 8–10 пронумерованы совместно, ввиду нехватки места.)

Обратим внимание, что такой фактор, как изменение диэлектрических проницаемостей струи и среды, играет роль только при отличном от нуля значении объемного заряда.

На рис. 6 представлены зависимости вещественных и мнимых частей частот от величины диэлектрической проницаемости жидкости струи ε_1 при различных значениях волнового числа. Кривые 1, 2, 6, 7 соответствует частотам волн, кривые 3–5 — инкрементам. Видно, что при увеличении ε_1 абсолютные значения вещественных частей частот уменьшаются, либо неизменны, а значения мнимых частей частот — увеличиваются (линия 5 соответствует нулевому инкременту). Рост амплитуды волны с $k = 1.5$ (сплошные линии) всегда периодический (так как и вещественная, и мнимая части частоты отличны от нуля). Волна с $k = 2.5$ (штриховые линии) при малых значениях диэлектрической проницаемости струи ($\varepsilon_1 < 4$) устойчива, а при $\varepsilon_1 > 4$ становится неустойчивой (ее амплитуда периодически нарастает).

Волна с $k = 3.5$ (штрихпунктирные линии) устойчивы во всем представленном диапазоне изменения ε_1 .

На рис. 6 приведены данные для $\varepsilon_1 < 15$, которые указывают на основные тенденции вариации представленных зависимостей. Отметим, что тенденции остаются прежними, и при увеличении ε_1 до значения $\varepsilon_1 = 80$ линии 5–7 остаются прямыми, кривые 2 слабо уменьшаются, а кривые 3, 4 слабо увеличиваются.

На рис. 7 представлены зависимости вещественных и мнимых частей частот от величины диэлектрической проницаемости внешней среды ε_2 при различных значениях волнового числа. Кривые 1–3, 8, 9 соответствуют частотам волн, кривые 4–7 — их инкрементам (нулевой инкремент 6 для волны с $k = 3.5$, правее точки $\varepsilon_2 \approx 1.34$, перекрывается сверху нулевым инкрементом волны с $k = 2.5$, а при $\varepsilon_2 > 3.65$ перекрывается ветвью 7, соответствующей нулевому инкременту волны с $k = 1.5$). Из рисунка видно, что при увеличении ε_2

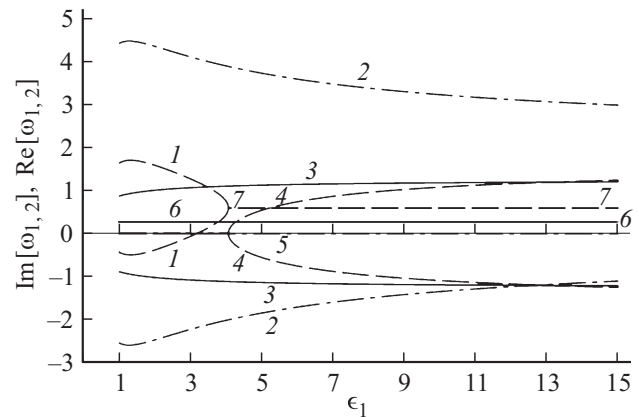


Рис. 6. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн от ε_1 , рассчитанные при $\mu = 1$, $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_2 = 1$, $U = 1$ и различных значениях волнового числа: $k = 1.5$ — сплошные линии, $k = 2.5$ — штриховые линии, $k = 3.5$ — штрихпунктирные линии.

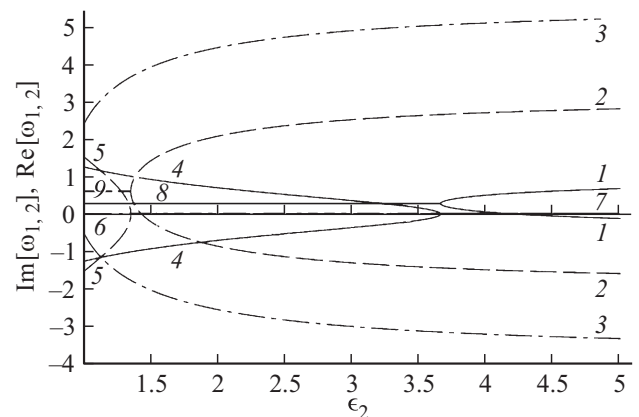


Рис. 7. Зависимости реальной и мнимой частей частот капиллярных волн от ε_2 , рассчитанные при $\mu = 1$, $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_1 = 80$, $U = 1$ и различных значениях волнового числа: $k = 1.5$ — сплошные линии, $k = 2.5$ — штриховые линии, $k = 3.5$ — штрихпунктирные линии.

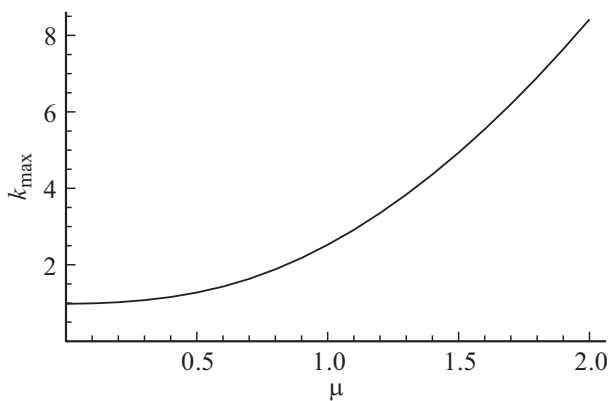


Рис. 8. Зависимость волнового числа наиболее неустойчивой волны от объемной плотности заряда μ , рассчитанная при $\rho_2 = 0.5$, $\varepsilon_1 = 80$, $\varepsilon_2 = 1$, $U = 1.5$.

величины инкрементов (линии 4, 5) уменьшаются, частоты в зоне устойчивости (ветви 1–3) увеличиваются, в то время как частоты в области неустойчивости (ветви 8, 9) практически не зависят от ε_2 . Амплитуда волны с $k = 1.5$ (сплошные линии) растет колебательным образом при значениях $\varepsilon_2 < 3.65$, амплитуда волны с $k = 2.5$ (штриховые линии) нарастает колебательным образом при $\varepsilon_2 < 1.34$, амплитуда волны с $k = 3.5$ не изменяется, т. е. волна устойчива во всем представленном диапазоне изменения диэлектрической проницаемости среды ε_2 .

За пределами указанного на рис. 7 диапазона изменения ε_2 все кривые остаются почти неизменными, параллельными оси абсцисс.

Распад струи при реализации неустойчивости определяется волной с максимальной величиной инкремента, а сам инкремент — величиной радикала в выражениях (2). Появление мнимой части частоты происходит при переходе выражения, стоящего под радикалом, через нуль в область отрицательных значений.

Чтобы при заданных физических параметрах найти волновое число наиболее неустойчивой волны, следует найти производную от радикала по волновому числу и приравнять ее нулю. Но, поскольку в (2) выражение под радикалом содержит волновое число в качестве аргумента цилиндрических функций, получить аналитическое выражение для волнового числа наиболее неустойчивой волны не представляется возможным. Однако это можно сделать численно, с использованием пакетов программ типа Mathematica или Maple. На рис. 8 приведена рассчитанная таким образом зависимость k_{\max} от величины объемной плотности заряда струи μ . Видно, что с увеличением μ волновое число наиболее неустойчивой волны растет (длина волны уменьшается) примерно по параболическому закону.

Расчеты показывают, что качественно сходным образом (увеличивается по степенному закону) ведет себя k_{\max} с ростом U . Так, для незаряженной струи при увеличении скорости от $U = 0$ до k_{\max} увеличивается

от ≈ 0.7 до ≈ 1.25 , а для заряженной (при $\mu = 0.5$) — от ≈ 0.88 до ≈ 1.25 .

При увеличении диэлектрической проницаемости жидкости струи k_{\max} слабо растет. При увеличении диэлектрической проницаемости среды от $\varepsilon_2 = 1$ до 3 при фиксированном значении $\varepsilon_1 = 80$ k_{\max} уменьшается от ≈ 2.5 до ≈ 1.5 ; при $\varepsilon_1 = 10$ уменьшается от ≈ 2.2 до ≈ 1.5 .

Для не осесимметричных мод ($m = 1, 2, \dots$) зависимости, аналогичные приведенным выше, качественно им подобны и отличаются в основном количественно.

Отличие решаемой задачи от рассмотренной в [15] в различии электропроводностей жидкостей струи: в [15] рассмотрена идеально проводящая жидкость, а в данном случае — диэлектрическая. Модели идеально проводящей и диэлектрической жидкостей характерны тем, что время максвелловской релаксации для первой бесконечно мало, а для второй бесконечно велико. Эти модели могут быть использованы для расчета устойчивости струй хорошо и плохо проводящих реальных жидкостей, конкретные примеры которых можно найти в [24], (см. также [25]).

Заключение

Скорость движения струи относительно материальной среды и объемная плотность заряда являются дестабилизирующими факторами. Увеличение их значений расширяет диапазон неустойчивых волн и увеличивает инкременты нарастания неустойчивости. Совместное влияние этих факторов приводит к взаимному снижению их критических для реализации неустойчивости значений. Изменение диэлектрических проницаемостей струи и среды оказывает противоположное влияние на волновые возмущения: уменьшение проницаемости струи и увеличение проницаемости среды стабилизируют волны.

Увеличение скорости и объемной плотности заряда приводит к росту волнового числа наиболее неустойчивой волны, т. е. к уменьшению ее длины и, как следствие, к уменьшению длины нераспавшейся части струи. Изменение диэлектрических проницаемостей струи и среды по-разному влияет на волновое число наиболее неустойчивой волны: увеличение диэлектрической проницаемости струи приводит к его слабому росту, а диэлектрической проницаемости среды — к монотонному убыванию.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

Список литературы

- [1] Ентов В.М., Ярин А.И. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [2] Eggers J., Willermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036601. P. 1–79.

- [3] Жакин А.И. // УФН. 2013. Т. 183. № 2. С. 153–177.
- [4] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // Surf. Engineer. Appl. Electrochem. 2014. Vol. 50. N 5. P. 395–404.
- [5] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostatics. 1989. Vol. 22. P. 135–159.
- [6] Tang K., Gomes A. // J. Coll. Interface Sci. 1996. Vol. 184. N 2. P. 500–511.
- [7] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [8] Shin Y.M., Hohman M.M., Brenner M.P., Rutledge G.C. // Polymer. 2001. Vol. 42. N 25. P. 09955–09967.
- [9] Funada T., Joseph D.D. // Int. J. Multiphase Flow. 2004. Vol. 30. P. 1279–1310.
- [10] Xiaohua Gu, Xue Song, et al // Int. J. Electrochem. Sci. // 2014. Vol. 9. P.8045–8056.
- [11] Kelvin, Lord W. // Phil. Mag. 1871. Vol. 42. P. 368–374.
- [12] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. Ser. 5. P. 177–180.
- [13] Basset A.B. // Amer. J. Math. 1894. Vol. 16. P. 93–110.
- [14] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Волкова М.В. // ЭОМ. 2010. № 4. С. 23–31.
- [15] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 16–22.
- [16] Ширяева С.О., Петрушов Н.А. // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: Тр. Междун. конф., XIII Харитоновские тематические научные чтения. Саров, Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики. 2011. С. 570–576.
- [17] Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 68–79.
- [18] Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 5. С. 41–49.
- [19] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 57–68.
- [20] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [21] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [22] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [23] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [24] Ахадов Я.Ю. Диэлектрические параметры чистых жидкостей. М.: Изд-во МАИ, 1999. 856 с.
- [25] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль. 1993. 118 с.