01

Анизотропное эллипсоидальное включение с анизотропной оболочкой в изотропной среде с приложенным однородным электрическим полем

© И.В. Лавров, В.Б. Яковлев

Национальный исследовательский университет „МИЭТ“,
124498 Москва, Зеленоград, Россия
e-mail: iglavr@mail.ru

(Поступило в Редакцию 30 июля 2016 г. В окончательной редакции 5 декабря 2016 г.)

Рассмотрена электростатическая задача для диэлектрического включения, состоящего из анизотропного ядра и анизотропной оболочки, помещенного в однородную изотропную диэлектрическую среду (матрицу) с приложенным однородным электрическим полем. Внешние границы ядра и оболочки считаются эллипсоидами, являющимися софокусными после линейного неортогонального преобразования, устраняющего анизотропию диэлектрических свойств оболочки. Получены аналитические выражения для потенциала и напряженности электрического поля в матрице, оболочке и ядре, а также выражение для тензора поляризуемости включения. Показано, что полученные результаты в частных предельных случаях согласуются с известными решениями.

DOI: 10.21883/JTF.2017.07.44663.1964

Введение

Задача о частице с детерминированными структурой и материальными свойствами, помещенной в однородную среду с однородным приложенным полем, является базовой во многих подходах при анализе эффективных характеристик неоднородных сред. В одних, условно более простых, моделях такие среды считаются конгломератами одного или нескольких видов однородных частиц (включений), возможно погруженных в непрерывную однородную среду — матрицу. Универсальной формой включений в моделях такого вида можно считать эллипсоидальную. Во-первых, внутри однородного эллипсоида, погруженного в однородную среду с приложенным однородным полем, поле также является однородным [1,2]. Во-вторых, эллипсоидальная форма дает возможность моделировать среды с различной степенью вытянутости (сплюснутости) частиц их компонентов [3], а также среды с вероятностным распределением ориентаций и форм включений [4] и, таким образом, более детально отражать в модели особенности реальной среды. В-третьих, с помощью предельного перехода размеров полуосей эллипсоидов можно получить описание сред качественно иного вида: слоистой или волокнистой структуры [5].

В более продвинутых моделях гетерогенных сред включения, составляющие среду, сами считаются неоднородными частицами, в большинстве случаев — сферическими или эллипсоидальными с одной или несколькими оболочками. С одной стороны, это обусловлено необходимостью точнее отражать в моделях структуру неоднородных материалов, поскольку даже однофазные поликристаллы состоят из двух структурных компонент: кристаллической и межкристаллитной [6]. С другой стороны, в ряде видов искусственно создаваемых неоднородных материалов используются включения с оболочками, поскольку это открывает новые возможности управления специфическими свойствами таких материалов [7–10].

По сравнению со сферами с оболочками эллипсоиды с оболочками обладают гораздо большим универсализмом в плане вариаций структурными параметрами неоднородных сред, поэтому решение задачи об эллипсоиде с оболочкой в однородной среде с однородным приложенным полем представляется очень актуальным. Решение задачи для анизотропного эллипсоида с изотропной оболочкой в случае произвольной взаимной ориентации осей эллипсоидов с осями тензора диэлектрической проницаемости ядра приведено в [11]. В [12] рассматривается эллипсоид с тонкой анизотропной оболочкой, у которой тензор диэлектрической проницаемости одноосный с осью, направленной по нормали к поверхности частицы в точках оболочки.

В настоящей работе решается электростатическая задача для анизотропного эллипсоида в анизотропной оболочке произвольной толщины, погруженного в однородную изотропную среду с однородным приложенным электрическим полем, причем анизотропия оболочки линейная и одинаковая для всех ее точек в отличие от [12], где анизотропия, фактически, криволинейная. Случаи с изотропной оболочкой являются хотя и важными для многих приложений, но необобщаемыми на случай анизотропной внешней среды, поскольку при линейном преобразовании, устраняющем внешнюю анизотропию, возникает анизотропия в оболочке. Поэтому задача, решаемая в настоящей работе, имеет значение еще и как подготовительная ступень к наиболее общему случаю: анизотропный эллипсоид в анизотропной оболочке в анизотропной внешней среде.

1. Постановка задачи и предварительное обсуждение метода решения

Пусть имеется диэлектрическое включение, состоящее из эллипсоидального ядра V_2 с границей S_2 и оболочки V_1, внешняя граница которой S_1 так же, как и S_2, является эллипсоидом. Диэлектрические материалы, из которых состоят ядро и оболочка, предполагаются однородными и анизотропными, причем тензоры ε_1 и ε_2 их диэлектрической проницаемости симметричны. Рассмотрим электростатическую задачу о распределении электрического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ внутри данного включения и вне его при условии, что оно помещено в бесконечную однородную изотропную диэлектрическую среду (матрицу) с внешним приложенным однородным электрическим полем напряженностью $\mathbf{E}_0$. Область, занимаемую матрицей, обозначим как V_m, диэлектрическая проницаемость матрицы ε_m. Также будем предполагать, что в данной системе свободные заряды отсутствуют.

Математическая формулировка данной задачи имеет вид

$$\nabla \cdot \nabla\varphi_m(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_m, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_1 \nabla\varphi_1(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_1, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_2 \nabla\varphi_2(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_2, \tag{3}$$

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}), \quad (\varepsilon_m \mathbf{E}_m)_n = (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1)_n, \quad \mathbf{r} \in S_1, \tag{4}$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \varphi_2(\mathbf{r}), \quad (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1)_n = (\varepsilon_2 \mathbf{E}_2)_n, \quad \mathbf{r} \in S_2, \tag{5}$$

$$\varphi_m\big|_\infty = -(\mathbf{E}_0, \mathbf{r}), \tag{6}$$

где $\varphi_m(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_m$, $\varphi_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_1$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_2$ — скалярные потенциалы и напряженности электрического поля в матрице, оболочке и ядре соответственно; $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к соответствующей эллипсоидальной поверхности; ∇ — векторный дифференциальный оператор Гамильтона, имеющий в декартовых координатах x^1, x^2, x^3 вид

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Условия (1)−(3) суть электростатические уравнения в частных производных, которым должен удовлетворять потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в матрице, оболочке и ядре соответственно. Условия (4) — это непрерывность $\varphi(\mathbf{r})$ и нормальной составляющей вектора электрической индукции $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ на границе оболочки и матрицы; (5) — непрерывность $\varphi(\mathbf{r})$ и нормальной составляющей $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ на границе ядра и оболочки. Условие (6) означает то, что на бесконечном удалении от частицы потенциал равен потенциалу приложенного поля φ_0, зависимость которого от точки пространства имеет вид

$$\varphi_0 = -(\mathbf{E}_0, \mathbf{r}). \tag{7}$$

Имеется также неявное условие ограниченности потенциала внутри частицы, вытекающее из физического смысла задачи.

При решении задачи об эллипсоидальной изотропной частице без оболочки в бесконечной матрице вводятся эллипсоидальные координаты ξ, η, ζ, привязанные к поверхности этой частицы, которая является поверхностью уровня координаты ξ. Метод решения, предложенный Стрэттоном [1], опирается на то, что потенциал приложенного поля φ_0 — гармоническая функция, а также на теорему существования и единственности решения задач такого типа. Чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности эллипсоидальной частицы, потенциалы внутри и вне ее ищутся в виде гармонических функций, имеющих на ее поверхности зависимости от координат η, ζ, аналогичные той, которую имеет на поверхности частицы потенциал φ_0. Успешный подбор произвольных постоянных, входящих в выражения для данных гармонических функций, при котором удовлетворяются граничные условия, в силу теоремы существования и единственности позволяет утверждать, что найденные выражения суть искомые решения.

В задаче для включения с изотропной оболочкой для применения метода Стрэттона граница ядра и внешняя граница оболочки должны быть софокусными эллипсоидами [1]; вводимые эллипсоидальные координаты ξ, η, ζ согласованы с данными эллипсоидами и связаны стандартными формулами [13] с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3 исходного евклидова пространства.

Если же материал оболочки является анизотропным, то для сведения уравнений вида (2), (3) к уравнению Лапласа (1) нужно делать линейное неортогональное преобразование координат в исходном пространстве и только после этого вводить эллипсоидальные координаты, связанные с новыми, уже не декартовыми, координатами $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$. Для применения метода Стрэттона границы ядра и оболочки должны быть софокусными эллипсоидами именно в новых координатах $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$. Поскольку свойство софокусности эллипсоидов не сохраняется при линейных неортогональных преобразованиях (это легко проверить на примере простейшего преобразования вида $x^1 = \alpha x^{1'}$, $x^2 = x^{2'}, x^3 = x^{3'}$, $\alpha \neq 1$), границы S_2 и S_1 ядра и оболочки — эллипсоиды, не софокусные в исходном евклидовом пространстве с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, но становящиеся софокусными после неортогонального преобразования ($\mathbf{r} = (x^1 x^2 x^3)^T$, $\mathbf{r}' = (x^{1'} x^{2'} x^{3'})^T$)

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}\mathbf{r}', \tag{8}$$

подобранного так, чтобы (2) преобразовалось к уравнению Лапласа

$$\nabla \cdot \varepsilon_1 \nabla\varphi_1(\mathbf{r}) = 0,\ \mathbf{r} \in V_1 \Leftrightarrow \nabla' \cdot \nabla'\varphi_1(\mathbf{T}\mathbf{r}') = 0,\ \mathbf{r}' \in V_1',$$

V_1' — область, занимаемая оболочкой в системе координат $x^{1'} x^{2'} x^{3'}$. При этом операторы Гамильтона в системах $x^1 x^2 x^3$ и $x^{1'} x^{2'} x^{3'}$ связаны друг с другом по формуле

$$\nabla = \left(\mathbf{T}^{-1}\right)^T \nabla' \tag{9}$$

а связь тензора ε_1 с матрицей преобразования (8) имеет вид

$$\varepsilon_1 = \mathbf{T}\mathbf{T}^T. \tag{10}$$

Преобразование (8), условно говоря, устраняет анизотропию диэлектрических свойств материала внутри оболочки частицы. Также его можно трактовать как преобразование пространства, при этом эллипсоиды S_1, S_2 преобразуются соответственно в эллипсоиды S'_1, S'_2, являющиеся софокусными, форма которых отличается от формы их прообразов, поэтому S'_1 и S'_2 будем называть трансформированными эллипсоидами. (В работе [14] используется термин „приведенный эллипсоид“, параметры которого зависят от анизотропии внешней среды.) Условие (10) не единственным образом определяет преобразование (8); чтобы устранить неоднозначность, потребуем также, чтобы оси системы координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ были направлены вдоль осей эллипсоидов S'_1, S'_2 с таким соответствием, чтобы полуоси $a^{(i)}_{1'}$, $a^{(i)}_{2'}$, $a^{(i)}_{3'}$ последних были упорядочены: $a^{(i)}_{1'} > a^{(i)}_{2'} > a^{(i)}_{3'}$, $i = 1, 2$. Более подробно вопрос о нахождении преобразования (8) рассмотрен в разд. 7.

Полуоси исходных эллипсоидов S_i, $i = 1, 2$ считаются известными и равными $a^{(i)}_1$, $a^{(i)}_2$, $a^{(i)}_3$. Будем также считать, что полуоси внешнего эллипсоида S_1 упорядочены аналогичным образом: $a^{(1)}_1 > a^{(1)}_2 > a^{(1)}_3$; этого можно добиться переобозначением координатных осей. Введем для краткости обозначения для произведений полуосей эллипсоидов:

$$\bar{a}^{(i)} = a^{(i)}_1 a^{(i)}_2 a^{(i)}_3, \quad \bar{a}'^{(i)} = a^{(i)}_{1'} a^{(i)}_{2'} a^{(i)}_{3'}, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

Софокусность эллипсоидов S'_1 и S'_2 означает, что существует параметр $t' > 0$ такой, что полуоси эллипсоидов S'_1 и S'_2 связаны между собой следующим образом [15]:

$$\left(a^{(1)}_{k'}\right)^2 = \left(a^{(2)}_{k'}\right)^2 + t', \quad k' = 1', 2', 3'. \tag{12}$$

Уравнения эллипсоидов S_1, S_2 (в системе $x^1x^2x^3$) и S'_1, S'_2 (в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$) имеют вид

$$S_i: \ \mathbf{r}^T \mathbf{S}_i \mathbf{r} = 1; \quad S'_i: \ \mathbf{r}'^T \mathbf{S}'_i \mathbf{r}' = 1, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

где $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}'_i$ — тензоры соответствующих квадратичных форм:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{Vmatrix} \left(a^{(1)}_1\right)^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(a^{(1)}_2\right)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \left(a^{(1)}_3\right)^{-2} \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{S}'_i = \begin{Vmatrix} \left(a^{(i)}_{1'}\right)^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(a^{(i)}_{2'}\right)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \left(a^{(i)}_{3'}\right)^{-2} \end{Vmatrix}, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

но $\mathbf{S}_2$, вообще, в системе $x^1x^2x^3$ — не диагональный, так как оси эллипсоидов S_1 и S_2 могут не совпадать.

2. Потенциал и напряженность электрического поля в матрице

Введем эллипсоидальные координаты ξ, η, ζ по формулам [13]

$$(x^i)^2 = \frac{\left(\xi + \left(a^{(1)}_i\right)^2\right)\left(\eta + \left(a^{(1)}_i\right)^2\right)\left(\zeta + \left(a^{(1)}_i\right)^2\right)}{\left(\left(a^{(1)}_j\right)^2 - (a^{(1)}_i)^2\right)\left((a^{(1)}_k)^2 - (a^{(1)}_i)^2\right)},$$

$$i = 1, 2, 3; \quad (i \neq j \neq k \neq i), \tag{15}$$

где $-\left(a^{(1)}_1\right)^2 < \zeta < -\left(a^{(1)}_2\right)^2 < \eta < -\left(a^{(1)}_3\right)^2 < \xi < +\infty$. Значению координаты $\xi = 0$ соответствует положение точек на внешнем эллипсоиде S_1, при $\xi > 0$ будем иметь точки вне частицы, при $-(a^{(1)}_3)^2 < \xi < 0$ — точки внутри частицы, кроме ее центра $\mathbf{r} = 0$, которому соответствует $\xi = -(a^{(1)}_3)^2$. Каждому набору (ξ, η, ζ) эллипсоидальных координат соответствуют восемь точек $(\pm|x^1|, \pm|x^2|, \pm|x^3|)$ пространства, расположенные симметрично каждая в своем октанте. В дальнейших выкладках будем подразумевать, что точка (x^1, x^2, x^3) лежит в первом октанте, т. е. $x^k > 0$, $k = 1, 2, 3$, при этом окончательный результат автоматически будет справедлив для любой из восьми точек. Уравнение Лапласа в координатах ξ, η, ζ имеет вид [13]

$$(\eta - \zeta)R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right\} + (\zeta - \xi)R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{R_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right\}$$

$$+ (\xi - \eta)R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{R_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right\} = 0, \tag{16}$$

где

$$R_u = \left[\left(u + \left(a^{(1)}_1\right)^2\right)\left(u + \left(a^{(1)}_2\right)^2\right)\left(u + \left(a^{(1)}_3\right)^2\right)\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Потенциал результирующего электрического поля в матрице φ_m ищется в виде суммы потенциала приложенного поля φ_0 и потенциала возмущенного поля φ_p [13], т. е.

$$\varphi_m = \varphi_0 + \varphi_p, \tag{18}$$

причем вследствие условия (6) должно выполняться асимптотическое условие

$$\varphi_p \to 0, \quad r \to \infty. \tag{19}$$

Поскольку φ_0 зависит от координат η, ζ на поверхности S_1 в первом квадранте в соответствии с (7), (15) следующим образом:

$$\varphi_0\big|_{\xi=0} = -\sum_{i=1}^{3} E^{(0)}_i a^{(1)}_i$$

$$\times \left[\frac{\left(\eta + \left(a^{(1)}_i\right)^2\right)\left(\zeta + \left(a^{(1)}_i\right)^2\right)}{\left(\left(a^{(1)}_j\right)^2\right) - \left(\left(a^{(1)}_i\right)^2\right)\left(\left(a^{(1)}_k\right)^2\right) - \left(\left(a^{(1)}_i\right)^2\right)}\right]^{1/2}, \tag{20}$$

где $E^{(0)}_i$, $i = 1, 2, 3$ — компоненты вектора $\mathbf{E}_0$ в системе $x^1x^2x^3$, набор индексов (i, j, k) в каждом члене суммы — циклическая перестановка символов 1, 2, 3, то, чтобы удовлетворить граничным условиям (4), потенциал возмущенного поля φ_p ищем в виде

$$\varphi_p = \sum_{i=1}^{3} F_i(\xi) \times \left[\frac{\left(\eta + (a_i^{(1)})^2\right)\left(\xi + (a_i^{(1)})^2\right)}{\left((a_j^{(1)})^2 - (a_i^{(1)})^2\right)\left((a_k^{(1)})^2 - (a_i^{(1)})^2\right)} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (16) и интегрируя уравнение с учетом (19), найдем выражение для φ_p и представим его в векторном виде как

$$\varphi_p = \left(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{r}\right), \quad (22)$$

где $\mathbf{A}^{(m)} = \left(A_1^{(m)} A_2^{(m)} A_3^{(m)}\right)^T$ — векторная постоянная, которая должна быть определена с помощью граничных условий задачи; $\mathbf{N}(\xi)$ — тензорная функция переменной ξ, имеющая в системе $x^1x^2x^3$ вид

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{Vmatrix} N_1(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(\xi) \end{Vmatrix}, \quad (23)$$

$$N_i(\xi) = \frac{\bar{a}^{(1)}}{2} \int\limits_{\xi}^{+\infty} \frac{du}{\left[u + (a_i^{(1)})^2\right] R_u}, \quad i = 1, 2, 3; \ \xi \geq 0, \quad (24)$$

где $\bar{a}^{(1)}$ определяется из (11). Заметим, что

$$\mathbf{N}(0) = \mathbf{L}^{(1)} \quad (25)$$

— тензор геометрических факторов внешнего эллипсоида [13]. Таким образом, для результирующего потенциала в матрице с учетом (7), (18) и (22) получим выражение

$$\varphi_m = \left(-\mathbf{E}_0 + \mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{r}\right). \quad (26)$$

Запишем значения φ_m на внешнем эллипсоиде. С учетом (25) имеем

$$\varphi_m\big|_{\xi=0} = \left(-\mathbf{E}_0 + \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{r}\big|_{\xi=0}\right). \quad (27)$$

Сделаем важное для дальнейших преобразований замечание о типах используемых тензорных величин. Запишем уравнение (2) в координатном виде

$$\nabla_i \varepsilon_{(1)}^{ij} \nabla_j \varphi_1(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_1,$$

где $\varepsilon_{(1)}^{ij}$ — компоненты тензора ε_1 в данной системе координат и должны при замене переменных изменяться как компоненты дважды контравариантного тензора. Рассмотрим теперь известное выражение связи между напряженностями приложенного однородного поля $\mathbf{E}_0$ в вакууме и поля $\mathbf{E}_{\text{int}}$ внутри анизотропного эллипсоида с тензором диэлектрической проницаемости ε_1 [16]:

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{L}(\varepsilon_1 - \hat{\mathbf{I}})\right)\mathbf{E}_{\text{int}} = \mathbf{E}_0, \quad (28)$$

где $\mathbf{I}$ — ковариантно-контравариантный единичный тензор 2-го ранга с компонентами δ_i^j, $\hat{\mathbf{I}}$ — дважды контравариантный единичный тензор 2-го ранга с компонентами δ^{ij}, поскольку это тензор диэлектрической проницаемости вакуума; $\mathbf{L}$ — тензор геометрических факторов данного эллипсоида. Так как компоненты векторов напряженности электрического поля преобразуются как компоненты ковариантного тензора 1-го ранга, из (28) следует, что $\mathbf{L}$ является дважды ковариантным тензором. Следовательно, и тензор $\mathbf{N}(\xi)$ при каждом фиксированном значении ξ есть дважды ковариантный тензор, а вектор $\mathbf{A}^{(m)}$, входящий в выражения (26), (27), — контравариантный.

Получим формулу для напряженности $\mathbf{E}_m$ поля в матрице. Преобразуем градиент выражения (26) по правилу дифференцирования скалярного произведения вектор-функций [17]:

$$\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\nabla\mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b})\mathbf{a}. \quad (29)$$

Так как $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{I}$,

$$\nabla\varphi_m = -\mathbf{E}_0 + \mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)} + \left(\nabla(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)})\right)\mathbf{r}. \quad (30)$$

Вычислим $\nabla\left(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)}\right)$, используя формулу, аналогичную (9):

$$\nabla = \left(\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\right)^T \tilde{\nabla}, \quad (31)$$

где $\tilde{\nabla} \equiv \mathbf{e}^{\tilde{k}} \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{k}}}$ — оператор Гамильтона в эллипсоидальных координатах, $x^{\tilde{1}} = \xi$, $x^{\tilde{2}} = \eta$, $x^{\tilde{3}} = \zeta$, $\mathbf{e}^{\tilde{k}}$, $\tilde{k} = \tilde{1}, \tilde{2}, \tilde{3}$ — векторы местного контравариантного базиса; $\tilde{\mathbf{B}} = \|\partial x^k / \partial x^{\tilde{k}}\|$ — матрица преобразования линейных объектов от декартовых к эллипсоидальным координатам (см. приложение). Имеем

$$\frac{\partial\left(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)}\right)}{\partial\eta} = \frac{\partial\left(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)}\right)}{\partial\zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)}\right)}{\partial\xi} = -\frac{\bar{a}^{(1)}}{2R_\xi}\mathbf{S}(\xi)\mathbf{A}^{(m)},$$

где

$$\mathbf{S}(\xi) = \begin{Vmatrix} \left[\xi + (a_1^{(1)})^2\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\xi + (a_2^{(1)})^2\right]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left[\xi + (a_3^{(1)})^2\right]^{-1} \end{Vmatrix}$$

— тензор квадратичной формы уравнения эллипсоида, софокусного с S_1, причем $\mathbf{S}(0) = \mathbf{S}_1$. Вычисляя и преобразуя по формуле (31), получим

$$\left(\nabla(\mathbf{N}(\xi)\mathbf{A}^{(m)})\right)\mathbf{r} = -\bar{a}^{(1)} h_1^{-2} R_\xi^{-1} (\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi)\mathbf{A}^{(m)}, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{r}_\xi \equiv \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^1}{\xi + (a_1^{(1)})^2} \ \frac{x^2}{\xi + (a_2^{(1)})^2} \ \frac{x^3}{\xi + (a_3^{(1)})^2} \right)^T; \quad (33)$$

$h_1 = (2R_\xi)^{-1}\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}$ — коэффициент Ламе [18]. Таким образом, с учетом (30) и (32) найдем выражение для $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{E}_m = -\nabla\varphi_m = \mathbf{E}_0 + \left(-\mathbf{N}(\xi) + \bar{a}^{(1)} h_1^{-2} R_\xi^{-1}(\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi)\right)\mathbf{A}^{(m)}. \tag{34}$$

Рассмотрим подробней тензор $\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi$. Прежде всего заметим, что (33) может быть записано в виде

$$\mathbf{r}_\xi = (1/2)\mathbf{S}(\xi)\mathbf{r}. \tag{35}$$

При фиксированном значении ξ вектор $\mathbf{r}_\xi$ — ковариантный как внутреннее произведение дважды ковариантного тензора $\mathbf{S}(\xi)$ и контравариантного вектора $\mathbf{r}$, поэтому тензор $\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi$ при фиксированном ξ — дважды ковариантный тензор.

3. Потенциал и напряженность электрического поля в оболочке

Сделаем преобразование координат (8) и введем эллипсоидальные координаты ξ', η', ζ', связанные с координатами $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ по формулам

$$\left(x^{i'}\right)^2 = \frac{\left(\xi' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\eta' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\zeta' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)}{\left(\left(a_{j'}^{(2)}\right)^2 - \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\left(a_{k'}^{(2)}\right)^2 - \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)},$$

$$i' = 1', 2', 3'; \quad (i' \neq j' \neq k' \neq i'), \tag{36}$$

где $-\left(a_{1'}^{(2)}\right)^2 < \zeta' < -\left(a_{2'}^{(2)}\right)^2 < \eta' < -\left(a_{3'}^{(2)}\right)^2 < \xi' < +\infty$. При $\xi' = 0$ и при $\xi' = t'$ имеем точки на трансформированных внутреннем S_2' и внешнем S_1' эллипсоидах соответственно; образу V_1' оболочки включения соответствуют значения $\xi' \in (0'; t')$. Уравнение (2) в координатах ξ', η', ζ' — это уравнение Лапласа, аналогичное (16)

$$(\eta' - \zeta')\tilde{R}_{\xi'}\frac{\partial}{\partial\xi'}\left\{\tilde{R}_{\xi'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi'}\right\} + (\zeta' - \xi')\tilde{R}_{\eta'}\frac{\partial}{\partial\eta'}\left\{\tilde{R}_{\eta'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta'}\right\}$$

$$+ (\xi' - \eta')\tilde{R}_{\zeta'}\frac{\partial}{\partial\zeta'}\left\{\tilde{R}_{\zeta'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta'}\right\} = 0, \tag{37}$$

где

$$\tilde{R}_u = \left[\left(u + \left(a_{1'}^{(2)}\right)^2\right)\left(u + \left(a_{2'}^{(2)}\right)^2\right)\left(u + \left(a_{3'}^{(2)}\right)^2\right)\right]^{1/2}.$$

Переписав (27) в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$, найдем, что зависимость для φ_m на границе с оболочкой от координат η', ζ' имеет вид

$$\varphi_m\big|_{\xi'=t'} = \sum_{i'=1}^{3} C_{i'} \times \left[\frac{\left(\eta' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\zeta' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)}{\left(\left(a_{j'}^{(2)}\right)^2 - \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\left(a_{k'}^{(2)}\right)^2 - \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)}\right]^{1/2},$$

где $C_{1'}, C_{2'}, C_{3'}$ — некоторые постоянные, набор индексов (i', j', k') в каждом члене суммы есть циклическая перестановка набора символов $(1', 2', 3')$, поэтому для удовлетворения граничным условиям потенциал внутри оболочки надо искать в виде

$$\varphi_1 = \sum_{i'=1}^{3} \tilde{F}_{i'}(\xi') \times \left[\frac{\left(\eta' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\zeta' + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)}{\left(\left(a_{j'}^{(2)}\right)^2 - \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)\left(\left(a_{k'}^{(2)}\right)^2 - \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right)}\right]^{1/2}. \tag{38}$$

После подстановки (38) в (37) и интегрирования получим выражение для φ_1, которое в векторном виде может быть записано аналогично (26)

$$\varphi_1 = \left(\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{N}'(\xi')\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{r}'\right), \tag{39}$$

где $\mathbf{A}^{(1)} = \left(A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_3^{(1)}\right)^T$, $\mathbf{B}^{(1)} = \left(B_1^{(1)}B_2^{(1)}B_3^{(1)}\right)^T$ — векторные постоянные, находящиеся с помощью граничных условий задачи; $\mathbf{N}'(\xi')$ — тензорная функция переменной ξ', имеющая в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ вид

$$\mathbf{N}'(\xi') = \begin{Vmatrix} N_{1'}'(\xi') & 0 & 0 \\ 0 & N_{2'}'(\xi') & 0 \\ 0 & 0 & N_{3'}'(\xi') \end{Vmatrix}, \tag{40}$$

$$N_{i'}'(\xi') = \frac{\bar{a}'^{(2)}}{2}\int_{\xi'}^{+\infty}\frac{du}{\left[u + \left(a_{i'}^{(2)}\right)^2\right]\tilde{R}_u},$$

$$i' = 1', 2', 3'; \quad 0 \le \xi' \le t'. \tag{41}$$

Тензор $\mathbf{N}'(\xi')$ при фиксированном значении ξ' — дважды ковариантный. Заметим, что

$$\mathbf{N}'(0) = \mathbf{L}'^{(2)}, \quad \mathbf{N}'(t') = \nu'\mathbf{L}'^{(1)}, \tag{42}$$

$\mathbf{L}'^{(1)}$, $\mathbf{L}'^{(2)}$ — тензоры геометрических факторов трансформированных внешнего и внутреннего эллипсоидов соответственно, их главные компоненты

$$L_{i'}'^{(k)} = \frac{\bar{a}'^{(k)}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left[u + \left(a_{i'}^{(k)}\right)^2\right]\tilde{R}_u^{(k)}}, \; i' = 1', 2', 3', \; k = 1, 2,$$

$$\tilde{R}_u^{(k)} = \left[\left(u + \left(a_{1'}^{(k)}\right)^2\right)\left(u + \left(a_{2'}^{(k)}\right)^2\right)\left(u + \left(a_{3'}^{(k)}\right)^2\right)\right]^{1/2};$$

ν' — отношение объемов трансформированных внутреннего и внешнего эллипсоидов, которое в силу линейности преобразования (8) равно отношению объемов исходных эллипсоидов:

$$\nu' = \bar{a}'^{(2)}/\bar{a}'^{(1)} = \bar{a}^{(2)}/\bar{a}^{(1)}. \tag{43}$$

Выражение (39) может быть переписано в виде

$$\varphi_1 = \left((\mathbf{T}^{-1})^T\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{N}_0'(\xi')\mathbf{T}\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{r}\right), \tag{44}$$

где

$$\mathbf{N}_0'(\xi') = (\mathbf{T}^{-1})^T\mathbf{N}'(\xi')\mathbf{T}^{-1} \tag{45}$$

— тензор $\mathbf{N}'(\xi')$ в системе $x^1x^2x^3$. Соответственно тензоры $\mathbf{L}'^{(1)}$, $\mathbf{L}'^{(2)}$ имеют в системе $x^1x^2x^3$ вид

$$\mathbf{L}_0'^{(k)} = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{L}'^{(k)} \mathbf{T}^{-1}, \quad k = 1, 2. \tag{46}$$

Найдем выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E}_1$ в оболочке. Вычислим сначала градиент $\nabla'\varphi_1$ в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$. Применив (29) к выражению (39) и затем формулу, аналогичную (31), получим

$$\nabla'\varphi_1 = \mathbf{B}^{(1)} + \big(\mathbf{N}'(\xi') - \bar{a}'^{(2)} h_1'^{-2} \tilde{R}_{\xi'}^{-1} (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})\big)\mathbf{A}^{(1)}, \tag{47}$$

где

$$\mathbf{r}'_{\xi'} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi'} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{1'}}{\xi' + \big(a_{1'}^{(2)}\big)^2} \frac{x^{2'}}{\xi' + \big(a_{2'}^{(2)}\big)^2} \frac{x^{3'}}{\xi' + \big(a_{3'}^{(2)}\big)^2}\right)^T;$$

$$h_1' = \frac{\sqrt{(\xi' - \eta')(\xi' - \zeta')}}{2\tilde{R}_{\xi'}}$$

— коэффициент Ламе. По аналогии с (35) $\mathbf{r}'_{\xi'}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{r}'_{\xi'} = (1/2)\mathbf{S}'(\xi')\mathbf{r}', \tag{48}$$

где

$$\mathbf{S}'(\xi') = \begin{Vmatrix} \big[\xi' + \big(a_{1'}^{(2)}\big)^2\big]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \big[\xi' + \big(a_{2'}^{(2)}\big)^2\big]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \big[\xi' + \big(a_{3'}^{(2)}\big)^2\big]^{-1} \end{Vmatrix} \tag{49}$$

— тензор квадратичной формы уравнения эллипсоида, софокусного с S_2', причем $\mathbf{S}'(0) = \mathbf{S}_2'$, $\mathbf{S}'(t') = \mathbf{S}_1'$. Так же, как и $\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi$, тензор $\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'}$ при фиксированном значении ξ' — дважды ковариантный тензор, в системе $x^1x^2x^3$ имеющий вид

$$(\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})_0 = (\mathbf{T}^{-1})^T (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'}) \mathbf{T}^{-1}. \tag{50}$$

Используя связь (9) градиентов в системах $x^1x^2x^3$ и $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$, получим напряженность электрического поля $\mathbf{E}_1$ в оболочке в системе $x^1x^2x^3$:

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = -(\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{B}^{(1)} + \big(-\mathbf{N}_0'(\xi') + \bar{a}'^{(2)} h_1'^{-2} \tilde{R}_{\xi'}^{-1} (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})_0\big)\mathbf{T}\mathbf{A}^{(1)}. \tag{51}$$

4. Потенциал и напряженность электрического поля в ядре

Можно, как при нахождении вида потенциала в оболочке, сделать преобразование координат, аналогичное (8) и устраняющее анизотропию внутри ядра, ввести эллипсоидальные координаты ξ'', η'', ζ'', связанные с новыми координатами, и после интегрирования уравнения Лапласа с учетом специального вида зависимости от η'', ζ'' на границе ядра получить общее решение, аналогичное (39). Однако ввиду того, что тензорные функции вида $\mathbf{N}'(\xi')$ не ограничены в центре ядра, зависимость потенциала внутри ядра от радиуса-вектора текущей точки может быть только линейной:

$$\varphi_2 = -(\mathbf{E}'^{(2)}, \mathbf{r}'), \tag{52}$$

где $\mathbf{E}'^{(2)} = \mathrm{const}$ — напряженность поля внутри ядра в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$, $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор точки в этой же системе. Выражение для φ_2 можно также записать и в виде

$$\varphi_2 = -(\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{r}), \tag{53}$$

где $\mathbf{E}^{(2)}$ — напряженность поля внутри ядра в системе $x^1x^2x^3$:

$$\mathbf{E}^{(2)} = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{E}'^{(2)}. \tag{54}$$

Как следует из (52) или (53), электрическое поле внутри ядра — однородное в предположениях о связи формы ядра и оболочки с анизотропией оболочки, описанных в разд. 1.

5. Учет граничных условий (4), (5)

Найдем теперь выражения для векторных констант $\mathbf{A}^{(m)}$, $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{E}'^{(2)}$, входящих в формулы (26), (39), (52) для потенциала электрического поля в матрице, оболочке и ядре соответственно, исходя из необходимости удовлетворения граничных условий (4), (5). Запишем вначале условия непрерывности потенциала на границах сред.

Выражение для φ_m на внешнем эллипсоиде S_1 имеет вид (27); для φ_1 на внешнем эллипсоиде ($\xi' = t'$) из (44) имеем с учетом (42), (46)

$$\varphi_1\big|_{\xi=0} = \big((\mathbf{T}^{-1})^T(\mathbf{B}^{(1)} + \nu'\mathbf{L}'^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}), \mathbf{r}\big|_{\xi=0}\big). \tag{55}$$

Приравнивая (27) и (55), имеем уравнение

$$\big(-\mathbf{E}_0 + \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}^{(m)}, \mathbf{r}\big|_{\xi=0}\big) = \big((\mathbf{T}^{-1})^T(\mathbf{B}^{(1)} + \nu'\mathbf{L}'^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}), \mathbf{r}\big|_{\xi=0}\big),$$

представляющее собой равенство значений двух линейных функций аргумента $\mathbf{r}$ при его произвольных значениях на поверхности S_1, из чего следует, что эти функции равны тождественно, т.е. равны левые части скалярных произведений:

$$-\mathbf{E}_0 + \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}^{(m)} = (\mathbf{T}^{-1})^T(\mathbf{B}^{(1)} + \nu'\mathbf{L}'^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}). \tag{56}$$

Значения φ_1 на внутреннем эллипсоиде ($\xi' = 0$): из (39) с учетом (42) имеем

$$\varphi_1\big|_{\xi'=0} = \big(\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{L}'^{(2)}\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{r}'\big|_{\xi'=0}\big). \tag{57}$$

Для φ_2 на внутреннем эллипсоиде из (52) получаем

$$\varphi_2\big|_{\xi'=0} = -\big(\mathbf{E}'^{(2)}, \mathbf{r}'\big|_{\xi'=0}\big). \tag{58}$$

Приравнивая (57) и (58), приходим в итоге к векторному равенству

$$\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{L}'^{(2)}\mathbf{A}^{(1)} = -\mathbf{E}'^{(2)}. \qquad (59)$$

Запишем теперь вторые из условий (4), (5). Пусть $f_1(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T\mathbf{S}_1\mathbf{r} - 1 = 0$ — уравнение внешнего эллипсоида, тогда второе из условий (4) может быть записано в виде

$$\big(\nabla f_1, \varepsilon_m(-\nabla\varphi_m)\big)_{\xi=0} = \big(\nabla f_1, \varepsilon_1(-\nabla\varphi_1)\big)_{\xi=0}. \qquad (60)$$

Учтя, что $\nabla f_1 = 2\mathbf{S}_1\mathbf{r}$, а также (34), (35), (25) и соотношения $R_\xi\big|_{\xi=0} = \bar{a}^{(1)}$, $\mathbf{r}^T\mathbf{S}_1\mathbf{S}_1\mathbf{r}\big|_{\xi=0} = 4h_1^2\big|_{\xi=0}$ [18, с. 457], для левой части (60) имеем

$$\big(\nabla f_1, \varepsilon_m(-\nabla\varphi_m)\big)_{\xi=0}$$
$$= \big(\mathbf{S}_1\mathbf{r}\big|_{\xi=0}, 2\varepsilon_m\big[\mathbf{E}_0 - (\mathbf{L}^{(1)} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{(m)}\big]\big). \qquad (61)$$

Перейдем в правой части (60) к системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ с учетом (9), (10):

$$\big(\nabla f_1, \varepsilon_1(-\nabla\varphi_1)\big)_{\xi=0} = \big(\nabla' f_1, \mathbf{T}^{-1}\varepsilon_1(\mathbf{T}^{-1})^T$$
$$\times(-\nabla'\varphi_1)\big)_{\xi'=t'} = \big(\nabla' f_1, -\nabla'\varphi_1\big)_{\xi'=t'}. \qquad (62)$$

Уравнение внешнего эллипсоида в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ имеет вид $f_1 = \mathbf{r}'^T\mathbf{S}'_1\mathbf{r}' - 1 = 0$, поэтому $\nabla' f_1 = 2\mathbf{S}'_1\mathbf{r}'$. Для $\nabla'\varphi_1$ при $\xi' = t'$ из (47) с учетом (42), (48), (49), а также того, что $\tilde{R}_{\xi'}|_{\xi'=t'} = \bar{a}'^{(1)}$, получим

$$\nabla'\varphi_1\big|_{\xi'=t'} = \mathbf{B}^{(1)} + \big(\nu' L'^{(1)} - \nu' 4^{-1} h_1'^{-2}$$
$$\times(\mathbf{S}'_1\mathbf{r}'\mathbf{r}'^T\mathbf{S}')\big)_{\xi'=t'}\mathbf{A}^{(1)}. \qquad (63)$$

Подставляя (63) в (62), учтя то, что $\mathbf{r}'^T\mathbf{S}'_1\mathbf{S}'_1\mathbf{r}'|_{\xi'=t'} = 4h_1'^2|_{\xi'=t'}$, и преобразуя левый множитель к системе $x^1x^2x^3$: $\mathbf{S}'_1\mathbf{r}' = (\mathbf{T}^T\mathbf{S}_1\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}$, имеем

$$\big(\nabla f_1, \varepsilon_1(-\nabla\varphi_1)\big)_{\xi=0} = \big(\mathbf{S}_1\mathbf{r}\big|_{\xi=0}, 2\mathbf{T}\big[-\mathbf{B}^{(1)} - \nu'$$
$$\times(\mathbf{L}'^{(1)} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{(1)}\big]\big). \qquad (64)$$

Приравнивая (61) и (64), получим равенство, к которому сводится второе из условий (4):

$$\varepsilon_m\big[\mathbf{E}_0 - (\mathbf{L}^{(1)} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{(m)}\big] =$$
$$-\mathbf{T}\big[\mathbf{B}^{(1)} + \nu'(\mathbf{L}'^{(1)} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{(1)}\big]. \qquad (65)$$

Аналогично (60) второе из условий (5) можно записать в виде

$$\big(\nabla f_2, \varepsilon_1(-\nabla\varphi_1)\big)_{\xi'=0} = \big(\nabla f_2, \varepsilon_2(-\nabla\varphi_2)\big)_{\xi'=0}, \qquad (66)$$

где $f_2(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T\mathbf{S}_2\mathbf{r} - 1 = 0$ — уравнение внутреннего эллипсоида. Вычисляя левую часть (66) с помощью процедуры, аналогичной использованной при выводе (64), получим

$$\big(\nabla f_2, \varepsilon_1(-\nabla\varphi_1)\big)_{\xi'=0} =$$
$$\big(\mathbf{S}'_2\mathbf{r}'\big|_{\xi'=0}, -2\big[\mathbf{B}^{(1)} + (\mathbf{L}'^{(2)} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{(1)}\big]\big). \qquad (67)$$

Для правой части (66) имеем, взяв градиент от (52):

$$\big(\nabla f_2, \varepsilon_2(-\nabla\varphi_2)\big)_{\xi'=0} =$$
$$\big(\mathbf{S}'_2\mathbf{r}'\big|_{\xi'=0}, 2\mathbf{T}^{-1}\varepsilon_2(\mathbf{T}^{-1})^T\mathbf{E}'^{(2)}\big). \qquad (68)$$

Приравнивая (67) и (68), получим в итоге равенство

$$-\big[\mathbf{B}^{(1)} + (\mathbf{L}'^{(2)} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{(1)}\big] = \mathbf{T}^{-1}\varepsilon_2(\mathbf{T}^{-1})^T\mathbf{E}'^{(2)}. \qquad (69)$$

Таким образом, условия (4), (5) сводятся к системе четырех уравнений (56), (59), (65), (69), решая которые, найдем искомые векторные константы:

$$\mathbf{A}^{(m)} = 3\big(\bar{a}^{(1)}\big)^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\mathbf{E}_0,$$
$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{T}^T\boldsymbol{\beta}^{(1)}\mathbf{E}_0, \qquad (70)$$
$$\mathbf{E}'^{(2)} = \mathbf{T}^T\varepsilon_m\boldsymbol{\lambda}_{02}\mathbf{E}_0, \qquad (71)$$

где

$$\boldsymbol{\lambda}_{02} = \big[\big(\varepsilon_m\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(1)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_m\mathbf{I})\big)\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_0'^{(2)}$$
$$- \nu'\mathbf{L}_0'^{(1)})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\big) + \nu'\mathbf{L}^{(1)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\big]^{-1}, \qquad (72)$$
$$\boldsymbol{\alpha} = 3^{-1}\bar{a}^{(1)}\big[(\varepsilon_1 - \varepsilon_m\mathbf{I})\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_0'^{(2)}$$
$$- \nu'\mathbf{L}_0'^{(1)})(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\big) + \nu'(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\big]\boldsymbol{\lambda}_{02}, \qquad (73)$$
$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \varepsilon_m(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\boldsymbol{\lambda}_{02},$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = -\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(2)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\big)\varepsilon_m\boldsymbol{\lambda}_{02}, \qquad (74)$$

$\mathbf{L}_0'^{(1)}$, $\mathbf{L}_0'^{(2)}$ определяются формулами (46). В данных выражениях все единичные тензоры второго ранга обозначены как $\mathbf{I}$.

Используя введенные формулами (72)–(74) тензорные величины, запишем окончательные выражения для потенциала и напряженности поля в системе координат $x^1x^2x^3$. Из (54), (71) имеем для напряженности электрического поля $\mathbf{E}^{(2)}$ в ядре:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \varepsilon_m\boldsymbol{\lambda}_{02}\mathbf{E}_0. \qquad (75)$$

Выражение для потенциала φ_2 в ядре дается формулой (53), для потенциалов φ_m, φ_1 в матрице и оболочке получим из (26), (44) и (70):

$$\varphi_m = \big((-\mathbf{I} + 3(\bar{a}^{(1)})^{-1}\mathbf{N}(\xi)\boldsymbol{\alpha})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \quad \mathbf{r} \in V_m,\ \xi \geq 0, \qquad (76)$$

$$\varphi_1 = \big((\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \mathbf{N}'_0(\xi')\boldsymbol{\alpha}^{(1)})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \quad \mathbf{r} \in V_1,\ 0 \leq \xi' \leq t'. \qquad (77)$$

Выражения для напряженности поля в матрице и оболочке найдем, подставив (70) в (34) и (51) соответственно:

$$\mathbf{E}_m = \big(\mathbf{I} + 3\big[-(\bar{a}^{(1)})^{-1}\mathbf{N}(\xi)$$
$$+ h_1^{-2}R_\xi^{-1}(\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi)\big]\boldsymbol{\alpha}\big)\mathbf{E}_0, \qquad (78)$$

$$\mathbf{E}_1 = \big(-\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \big[-\mathbf{N}'_0(\xi') + \bar{a}'^{(2)}$$
$$\times h_1'^{-2}\tilde{R}_{\xi'}^{-1}(\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})_0\big]\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0. \qquad (79)$$

6. Дипольный момент и тензор поляризуемости включения

Наибольший вклад в возмущенное электрическое поле включения вносит поле, создаваемое его дипольным моментом, приобретаемым им во внешнем электрическом поле. Большинство подходов к вычислению эффективных диэлектрических характеристик неоднородных сред ограничиваются именно учетом индуцированных дипольных моментов зерен, составляющих среду. Для нахождения дипольного момента включения с оболочкой рассмотрим выражение (76) для потенциала поля φ_m в матрице в асимптотике при $r \to \infty$. Так как $\xi \approx r^2$, $\xi \to +\infty$,

$$\mathbf{N}(\xi) \approx 3^{-1}\bar{a}^{(1)}\xi^{-3/2}\mathbf{I} \approx 3^{-1}\bar{a}^{(1)}r^{-3}\mathbf{I}, \quad \xi, r \to +\infty,$$

и для φ_m получаем $\varphi_m \approx \big((-\mathbf{I} + r^{-3}\boldsymbol{\alpha})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big)$, $r \to +\infty$, причем потенциал возмущенного поля $\varphi_p \approx (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}_0, r^{-3}\mathbf{r})$, $r \to +\infty$. Сопоставляя это выражение с потенциалом индуцированного точечного диполя [19] $\varphi = (\mathbf{p}, r^{-3}\mathbf{r})$ с дипольным моментом $\mathbf{p}$, найдем дипольный момент включения с оболочкой

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}_0. \tag{80}$$

Из (80) видно, что тензор $\boldsymbol{\alpha}$, определяемый выражением (73), есть не что иное, как тензор поляризуемости данной частицы.

7. О нахождении параметров преобразования (8)

Пусть $x^{1_0}x^{2_0}x^{3_0}$ — система координат, связанная с главными осями тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, и пусть $\mathbf{C}_0(\psi_0, \theta_0, \phi_0)$ — матрица поворота от системы $x^1x^2x^3$ к $x^{1_0}x^{2_0}x^{3_0}$, ψ_0, θ_0, ϕ_0 — углы Эйлера. Рассмотрим сжатие вдоль осей системы $x^{1_0}x^{2_0}x^{3_0}$, устраняющее анизотропию материала оболочки:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{B}_0\hat{\mathbf{r}}, \tag{81}$$

где

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} \big(\varepsilon_1^{(1)}\big)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \big(\varepsilon_2^{(1)}\big)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \big(\varepsilon_3^{(1)}\big)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon_k^{(1)}$, $k = \overline{1,3}$ — главные значения тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_1$; $\mathbf{r}_0 = (x^{1_0}x^{2_0}x^{3_0})^T$, $\hat{\mathbf{r}} = (x^{\hat{1}}x^{\hat{2}}x^{\hat{3}})^T$, $x^{\hat{1}}x^{\hat{2}}x^{\hat{3}}$ — новая координатная система после преобразования (81). Пусть $\hat{\mathbf{C}}(\hat{\psi}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ — матрица поворота от системы $x^{\hat{1}}x^{\hat{2}}x^{\hat{3}}$ к системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$. Тогда матрица преобразования (8) равна произведению данных трех матриц:

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{B}_0\mathbf{C}_0.$$

Сложность представляет нахождение матрицы $\hat{\mathbf{C}}(\hat{\psi}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, так как система $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ связана с осями трансформированного внешнего эллипсоида S_1', чтобы найти которые, нужно матрицу квадратичной формы его уравнения в системе $x^{\hat{1}}x^{\hat{2}}x^{\hat{3}}$ привести к диагональному виду ортогональным преобразованием, а для этого нужно найти ее собственные значения и собственные векторы. В системе $x^{\hat{1}}x^{\hat{2}}x^{\hat{3}}$ матрица квадратичной формы внешнего эллипсоида будет иметь вид

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{B}_0^T\mathbf{C}_0^T\mathbf{S}_1\mathbf{C}_0\mathbf{B}_0,$$

в общем случае ее элементы являются функциями всех трех углов Эйлера ψ_0, θ_0, ϕ_0, а также трех главных компонент тензора ε_1, и для нахождения собственных значений матрицы $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3$ нужно решить кубическое уравнение. Таким образом, в общем случае невозможно получить аналитические выражения в явном виде для параметров преобразования (8), а также и для величин полуосей $a_{1'}^{(1)}, a_{2'}^{(1)}, a_{3'}^{(3)}$ трансформированного эллипсоида S_1' в зависимости от исходных полуосей $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}$, главных компонент тензора ε_1 и взаимной ориентации осей внешнего эллипсоида и главных осей тензора ε_1.

Однако в важном для приложений частном случае, когда исходный эллипсоид S_1 является эллипсоидом вращения, а тензор ε_1 — одноосный, найти аналитические выражения удается, результат решения аналогичной задачи имеется в [20].

8. Сопоставление полученных результатов в частных предельных случаях с известными решениями

1. В случае, когда оболочка — изотропная ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1\mathbf{I}$), а ядро — анизотропное с произвольной ориентацией главных осей тензора ε_2 относительно осей эллипсоида S_2, имеем: $\mathbf{T} = \varepsilon_1^{-1/2}\mathbf{I}$, $a_{1'}^{(k)} = a_1^{(k)}/\sqrt{\varepsilon_1}$, $a_{2'}^{(k)} = a_2^{(k)}/\sqrt{\varepsilon_1}$, $a_{3'}^{(k)} = a_3^{(k)}/\sqrt{\varepsilon_1}$, $k = 1, 2$, поэтому

$$\mathbf{L}'^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)}, \quad \mathbf{L}_0'^{(k)} = \mathbf{L}^{(k)}/\varepsilon_1, \quad k = 1, 2.$$

Тензоры $\boldsymbol{\lambda}_{02}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$, имеют вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{02} = \varepsilon_1\big[\big(\varepsilon_m\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(1)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)\big)\big(\varepsilon_1\mathbf{I} + (\mathbf{L}^{(2)} - \nu'\mathbf{L}^{(1)}) \times (\varepsilon_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big) + \nu'\mathbf{L}^{(1)}\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]^{-1},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (3\varepsilon_1)^{-1}\bar{a}^{(1)}\big[(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)\big(\varepsilon_1\mathbf{I} + (\mathbf{L}^{(2)} - \nu'\mathbf{L}^{(1)}) \times (\varepsilon_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big) + \nu'\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]\boldsymbol{\lambda}_{02}, \tag{82}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \varepsilon_m(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\boldsymbol{\lambda}_{02},$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = -\varepsilon_m\varepsilon_1^{-1}\big(\varepsilon_1\mathbf{I} + \mathbf{L}^{(2)}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big)\boldsymbol{\lambda}_{02},$$

и выражения для потенциала в ядре, оболочке и матрице по формулам (53), (77), (76), (82) имеют вид, эквивалентный выражениям в [11], в чем можно убедиться путем элементарных алгебраических преобразований.

2. Рассмотрим случаи, когда задача для частицы с оболочкой сводится к задаче для эллипсоида в изотропной среде. Это можно сделать тремя способами: а) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_m \mathbf{I}$; б) при $\nu' = 1$, $a_i^{(1)} = a_i^{(2)}$, $i = \overline{1, 3}$; в) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Например, в случае в) получим

$$\boldsymbol{\lambda}_{02} = \left[\varepsilon_m \mathbf{I} + \mathbf{L}^{(1)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_m \mathbf{I})\right]^{-1},$$

и для напряженности поля в ядре имеем известный результат [16,20]

$$\mathbf{E}^{(2)} = \varepsilon_m \left[\varepsilon_m \mathbf{I} + \mathbf{L}^{(1)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_m \mathbf{I})\right]^{-1} \mathbf{E}_0.$$

Поле в оболочке, согласно (77), получается однородным, поскольку $\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = 0$, его напряженность в этом случае

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\boldsymbol{\beta}^{(1)} \mathbf{E}_0 = \varepsilon_m \left[\varepsilon_m \mathbf{I} + \mathbf{L}^{(1)}(\varepsilon_1 - \varepsilon_m \mathbf{I})\right]^{-1} \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}^{(2)}.$$

Несложно проверить, что и в случаях а) и б) результат, полученный в настоящей работе, соответствует известным результатам.

Заключение

Основными результатами настоящей работы являются аналитические выражения для потенциала электрического поля в матрице, оболочке и ядре, представленные формулами (76), (77), (53) соответственно, выражения для напряженности поля в матрице, оболочке и ядре (формулы (78), (79) и (75) соответственно), а также выражение для тензора поляризуемости включения — формула (73).

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы при решении задач оценки эффективных характеристик неоднородных сред, например, поликристаллов с учетом межзеренного пространства и композитов с включениями вложенной структуры, а также для учета граничного слоя между включениями и матрицей.

Решение данной задачи может быть обобщено на случай включения с анизотропной оболочкой в однородной анизотропной среде с приложенным однородным полем, причем для обобщения может быть использован метод неортогонального преобразования, примененный в настоящей работе для устранения анизотропии оболочки.

Приложение. Матрицы преобразования между декартовыми и эллипсоидальными координатами

Матрица $\tilde{\mathbf{B}} = \|\partial x^k / \partial x^{\tilde{k}}\|$ преобразования линейных объектов от координатной системы $x^1 x^2 x^3$ к системе эллипсоидальных координат $\xi\eta\zeta$, которые связаны друг с другом формулами (15), имеет вид

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \frac{x^1}{\xi + \left(a_1^{(1)}\right)^2} & \frac{x^1}{\eta + \left(a_1^{(1)}\right)^2} & \frac{x^1}{\zeta + \left(a_1^{(1)}\right)^2} \\ \frac{x^2}{\xi + \left(a_2^{(1)}\right)^2} & \frac{x^2}{\eta + \left(a_2^{(1)}\right)^2} & \frac{x^2}{\zeta + \left(a_2^{(1)}\right)^2} \\ \frac{x^3}{\xi + \left(a_3^{(1)}\right)^2} & \frac{x^3}{\eta + \left(a_3^{(1)}\right)^2} & \frac{x^3}{\zeta + \left(a_3^{(1)}\right)^2} \end{matrix} \right\|. \qquad (\text{П1})$$

Вычислим $\tilde{\mathbf{B}}^{-1}$ следующим образом. Столбцы матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ ортогональны (система $\xi\eta\zeta$ — ортогональная), а их нормы равны коэффициентам Ламе h_1, h_2, h_3 [18], где

$$h_1^2 = \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{4R_\xi^2}, \quad h_2^2 = \frac{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}{4R_\eta^2},$$

$$h_3^2 = \frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}{4R_\zeta^2}. \qquad (\text{П2})$$

Тогда преобразование $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{H}^{-1}$, где

$$\mathbf{H} = \left\| \begin{matrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{matrix} \right\|$$

будет ортогональным, при этом $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$. Тогда $\tilde{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R}^T$, и в итоге

$$\tilde{\mathbf{B}}^{-1} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{h_1^2} \frac{x^1}{\xi + \left(a_1^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{h_1^2} \frac{x^2}{\xi + \left(a_2^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{h_1^2} \frac{x^3}{\xi + \left(a_3^{(1)}\right)^2} \\ \frac{1}{h_2^2} \frac{x^1}{\eta + \left(a_1^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{h_2^2} \frac{x^2}{\eta + \left(a_2^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{h_2^2} \frac{x^3}{\eta + \left(a_3^{(1)}\right)^2} \\ \frac{1}{h_3^2} \frac{x^1}{\zeta + \left(a_1^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{h_3^2} \frac{x^2}{\zeta + \left(a_2^{(1)}\right)^2} & \frac{1}{h_3^2} \frac{x^3}{\zeta + \left(a_3^{(1)}\right)^2} \end{matrix} \right\|. \qquad (\text{П3})$$

Матрица $\tilde{\mathbf{B}}'$ преобразования линейных объектов от системы $x^{1'} x^{2'} x^{3'}$ к системе эллипсоидальных координат $\xi' \eta' \zeta'$, связанных друг с другом формулами (36), и обратная ей матрица $\tilde{\mathbf{B}}'^{-1}$ имеют аналогичный вид с учетом особенностей формул (36).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-08-00654-а, 16-08-00262-а).

Список литературы

[1] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.

[2] *Bergman D.J., Strelniker Y.M.* // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 60. N 18. P. 13016–13027.

[3] *Ветров С.Я., Бикбаев Р.Г., Тимофеев И.В.* // ЖЭТФ. 2013. Т. 144. № 6 (17). С. 1129–1139.

[4] *Завгородняя М.И., Лавров И.В., Фокин А.Г.* // Изв. вузов. Электроника. 2014. № 5. С. 3–14.

[5] *Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н.* // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 27–31.

[6] *Gleiter H.* // Acta. Mater. 2000. Vol. 48. N 1. P. 1–29.

[7] *Sihvola A.* // PIER. 2006. Vol. 62. P. 317–331.

[8] *Bowler N.* // IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. 2006. Vol. 13. P. 703–711.

[9] *Лерман Л.Б.* // Химия, физика и технология поверхности. 2008. Вып. 14. С. 91–100.

[10] *Jiménez Bolaños S., Vernescu B.* // R. Soc. Open Sci. 2015. Vol. 2. P. 140394 (7pp).

[11] *Giordano S.* // Int. J. Eng. Science. 2016. Vol. 98. P. 14–35.

[12] *Ambjörnsson T., Apell S.P., Mukhopadhyay G.* // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69. P. 031914 (8pp).

[13] *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
[14] *Апресян Л.А., Власов Д.В.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 12. С. 23–28.
[15] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
[16] *Jones R.C.* // Phys. Rev. 1945. Vol. 68. N 3, 4. P. 93–96.
[17] *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
[18] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.
[19] *Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Ч. 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. М.–Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 848 с.
[20] *Лавров И.В.* // Фундам. пробл. радиоэлектрон. приборостроения. 2013. Т. 13. № 1. С. 44–47.