

Гидродинамический механизм формирования градиента температуры в тонких нематических пленках

© А.В. Захаров

Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: alexandre.zakharov@yahoo.ca

(Поступила в Редакцию 19 декабря 2016 г.)

Теоретически, в рамках нелинейного обобщения теории Эриксона–Лесли, с учетом уравнения теплопроводности, исследован механизм формирования градиента температуры в изначально равномерно прогретом гибридно-ориентированном жидкокристаллическом (ГОЖК) канале микроскопических размеров под действием стационарного гидродинамического потока. Рассмотрен случай полной термической изоляции одной из поверхностей ГОЖК-канала при условии, что на другой поверхности поддерживается постоянная температура. Показано, что на величину разности температур $\chi_{\max}(\xi)$ по сечению ГОЖК-канала обусловленной действием горизонтального стационарного потока с „треугольным“ профилем скорости $u(z, \xi)$ сильно влияет положение ξ максимального значения скорости. Было показано, что в случае ЖК-системы образованной молекулами 4-*n*-пентил-*n*'-цианобифенила гидродинамический поток, характеризующийся положением максимума $\xi = 0.98$ величины скорости $u(z, \xi = 0.98) \sim 0.9 \mu\text{m/s}$, формирует максимальную разность температур $\chi_{\max}(\xi) = 0.03$ ($\sim 9 \text{ K}$) по сечению ГОЖК-канала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 16-02-00041a).

DOI: 10.21883/FTT.2017.07.44610.445

1. Введение

В последнее время изучению влияния внешних воздействий, обусловленных электрическими и магнитными силами, на структурные и динамические свойства жидкокристаллических (ЖК) систем инкапсулированных в микро- и наноразмерные объемы уделяется достаточно много внимания [1–5], в то время как прогресс в понимании физических механизмов, ответственных за воздействие градиентов температуры на релаксационные и гидродинамические свойства таких ЖК-систем, более чем скромный [6–9]. И это не взирая на тот факт, что проблема, связанная с движением ЖК-капли, помещенной между двумя горизонтальными поверхностями и находящейся под действием градиента температуры, впервые привлекла внимание исследователей в начале XX-го века [10]. Позже, в рамках классической теории Эриксона–Лесли [11,12], было показано, что в гибридно-ориентированной нематической ячейке микроскопических размеров градиент температуры $\nabla T \sim \Delta T/d$, направленный вертикально от нижней ограничивающей поверхности к верхней, инициирует гидродинамический поток ЖК-материала в горизонтальном направлении [6]. Величина скорости этого потока $v \sim \frac{d}{\eta} \sigma_{zx}^{tm}$, где d — толщина ЖК-ячейки, $\Delta T = T_{\text{up}} - T_{\text{lw}}$ — разность температур на ограничивающих поверхностях, η — вязкость ЖК-системы, $\sigma_{zx}^{tm} \sim \xi \frac{\Delta T}{d^2}$ — тангенциальная компонента термомеханического тензора напряжения [6], а ξ — термомеханическая постоянная. Экспериментальные исследования гидродинамического потока в горизонтальном ЖК-канале позволили оценить термомеханическую

постоянную $\xi \sim 10^{-12} \text{ J/K} \cdot \text{m}$ [7]. Позже было показано, что в случае гибридно-ориентированного ЖК (ГОЖК)-канала, с гомеотропной ориентацией ЖК-молекул на верхней, и планарной на нижней ограничивающих поверхностях, под действием градиента температуры формируется горизонтально направленный гидродинамический поток, с таким „треугольно-подобным“ профилем скорости $v_{\text{eq}}(z)$ по z -сечению ЖК-канала, что максимальное значение ($\max v_{\text{eq}}(z)$) достигалось вблизи верхней, более теплой ограничивающей поверхности [8]. В связи с этим естественно возникает вопрос: возможно ли формирование градиента температуры в изначально равномерно прогретом ГОЖК-канале под действием горизонтально направленного ЖК-потока с таким „треугольно-подобным“ профилем скорости, чтобы он характеризовался ярко выраженным максимумом вблизи верхней ограничивающей поверхности? Другими словами, удастся ли таким гидродинамическим потоком разогреть верхнюю гомеотропно ориентированную ограничивающую поверхность и тем самым сформировать градиент температуры, направленный поперек ГОЖК-канала, микроскопической ширины?

Ответ на этот вопрос будет дан в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксона–Лесли [11,12], с учетом уравнения теплопроводности [8]. Будет рассмотрен такой температурный режим, когда температура на нижней ограничивающей поверхности постоянна ($T_{\text{lw}} = \text{const}$), а тепловой поток через верхнюю ограничивающую поверхность равен нулю. Таким образом, разность температур $\Delta T = T_{\text{up}} - T_{\text{lw}}$, которая в

начальный момент времени равна нулю, должна достичь максимально возможного значения для данного профиля скорости и в интервале температур соответствующих существованию нематической фазы.

2. Основные гидродинамические уравнения

Рассмотрим термотропный ЖК в горизонтальном канале микроскопической ширины d . Будем считать, что в начальный момент времени ЖК-канал равномерно прогрет таким образом, что температура на обеих ограничивающих поверхностях одна и та же. Будем также предполагать, что верхняя ограничивающая поверхность канала обработана таким образом, что на ней достигается гомеотропная ориентация директора ($\hat{\mathbf{n}}_{z=d} \parallel \mathbf{z}$), в то время как на нижней ограничивающей поверхности достигается планарная ориентация директора ($\hat{\mathbf{n}}_{z=0} \perp \mathbf{z}$), и тем самым реализуется ГОЖК-канал. Следует отметить, что система координат выбрана таким образом, что ось \mathbf{z} направлена от нижней границы канала к верхней перпендикулярно обеим ограничивающим поверхностям, ось \mathbf{x} совпадает с направлением директора на нижней ограничивающей поверхности, а ось $\mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{x}$ направлена перпендикулярно обеим осям \mathbf{x} и \mathbf{z} . Это позволяет нам записать граничное условие для поля директора в виде

$$\theta_{z=0} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{z=d} = \pi, \quad (1)$$

где угол θ (полярный угол) образован направлением директора $\hat{\mathbf{n}}$ и осью \mathbf{z} . Далее будем предполагать, что переориентация поля директора происходит в плоскости XOZ . Принимая во внимание тот факт, что ширина ЖК-канала $d \ll l$, где l — длина канала, можно предположить, что все физические величины, вовлеченные в процесс переориентации директора $\hat{\mathbf{n}}(z, t) = \sin \theta(z, t) \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta(z, t) \hat{\mathbf{k}}$, зависят только от пространственной переменной z и времени t . Здесь $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ — орты пространственных осей \mathbf{x} и \mathbf{z} соответственно, а $\hat{\mathbf{n}}$ — орт поля директора. При отсутствии внешних сил в таком ГОЖК-канале под действием упругих и поверхностных сил устанавливается линейное распределение поля директора, характеризующееся полярным углом $\theta(z) = \frac{\pi}{2d}(z + 1)$ [13]. Предположим далее, что на нижней поверхности канала поддерживается постоянная температура, в то время как верхняя поверхность полностью термически изолирована так, что выполняется условие

$$T_{z=0} = T_1,$$

$$-\lambda_{\perp} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=d} = 0, \quad (2)$$

где λ_{\perp} — коэффициент теплопроводности ЖК-фазы в направлении перпендикулярном направлению директора $\hat{\mathbf{n}}$. Принимая во внимание тот факт, что толщина

ЖК-канала варьируется в пределах нескольких микрометров, будем считать, что плотность ЖК-фазы постоянна по сечению канала ($\rho_m = \text{const}$). Таким образом, мы имеем дело с несжимаемой ЖК-фазой и условие несжимаемости принимает вид

$$\frac{\partial v_x(z, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_z(z, t)}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Последнее условие с учетом отсутствия проскальзывания на одной из ограничивающих поверхностей ЖК-канала (например, нижней)

$$v_x(z, t)_{z=0} = 0, \quad v_z(z, t)_{z=0} = 0 \quad (4)$$

приводит к тому, что в несжимаемом ГОЖК-канале существует только один гидродинамический поток, направленный параллельно ограничивающим поверхностям [8]

$$\mathbf{v} = v_x(z, t) \hat{\mathbf{i}} = u(z, t) \hat{\mathbf{i}}. \quad (5)$$

Под действием гидродинамического потока в ГОЖК-канале возникает упругий

$$\mathbf{T}_{el} = - \left[\mathcal{E}(\theta) \theta_{,zz} + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{,\theta} \theta_{,z}^2(\theta) \right] \mathbf{j},$$

вязкий

$$\mathbf{T}_{vis} = [\gamma_1 \theta_{,t} - \mathcal{A}(\theta) u_{,z}] \mathbf{j}$$

и термомеханический [6,8]

$$\mathbf{T}_{tm} = \xi \theta_{,z} T_{,z} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta \right) \mathbf{j}$$

моменты, действующие на единицу объема ЖК-фазы. Здесь

$$\theta_{,zz} = \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2}, \quad \theta_{,t} = \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t}, \quad u_{,z} = \frac{\partial u(z, t)}{\partial z},$$

а функции

$$\mathcal{E}(\theta) = K_1 \sin^2 \theta + K_3 \cos^2 \theta$$

и

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 \cos 2\theta)$$

отражают суть упругих и вязких сил соответственно. В этих выражениях K_1 и K_3 — упругие постоянные Франка, зависящие от температуры и соответствующие поперечным и продольным модам деформации, а γ_1 и γ_2 — коэффициенты вращательной вязкости нематика, которые также зависят от температуры. При этих условиях уравнение баланса моментов, действующих на единицу объема ЖК-ячейки, принимает вид [8]

$$\begin{aligned} \gamma_1 \theta_{,t} &= \mathcal{A}(\theta) u_{,z} + \mathcal{E}(\theta) \theta_{,zz} \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{,\theta}(\theta) \theta_{,z}^2 - \xi \theta_{,z} T_{,z} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta \right), \quad (6) \end{aligned}$$

а условие баланса импульсов, действующих на единицу объема ЖК-ячейки, позволяет записать аналог уравнения Навье—Стокса для нематической фазы в виде [8]

$$\rho_m u_{,t}(z, t) = \sigma_{z,x,z}, \quad (7)$$

где

$$\sigma_{z,x} = \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta u_{,z}}$$

$$= h(\theta)u_{,z} - \mathcal{A}(\theta)\theta_{,t} - \xi T_{,z}\theta_{,z} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right)$$

— тангенциальная составляющая тензора напряжений σ_{ij} , $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{vis} + \mathcal{R}_{im} + \mathcal{R}_{th}$ — полная диссипационная функция Рэлея [8,14],

$$\mathcal{R}_{vis} = \frac{1}{2} h(\theta)u_{,z}^2 - \mathcal{A}(\theta)\theta_{,t}u_{,z} + \frac{1}{2} \gamma_1 \theta_{,t}^2,$$

$$\mathcal{R}_{im} = \xi \theta_{,t}\theta_{,z} T_{,z} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta\right) - \xi T_{,z}u_{,z}\theta_{,z} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right),$$

$$\mathcal{R}_{th} = \frac{1}{2T} \left(\lambda_{\parallel} \cos^2 \theta + \lambda_{\perp} \sin^2 \theta\right) T_{,z}^2,$$

$$h(\theta) = \alpha_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \mathcal{A}(\theta)\theta_{,t}u_{,z} + \frac{1}{2} \alpha_4 + g(\theta),$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \left(\alpha_6 \sin^2 \theta + \alpha_5 \cos^2 \theta\right),$$

α_i ($i = 1, \dots, 6$) — шесть коэффициентов Лесли, λ_{\parallel} и λ_{\perp} — коэффициенты теплопроводности ЖК-фазы в направлении параллельном и перпендикулярном направлению директора $\hat{\mathbf{n}}$.

В случае зарождения градиента температуры по сечению ГОЖК-канала поле температуры $T(z, t)$ должно удовлетворять уравнению теплопроводности [8,15]

$$\rho_m C_p T_{,t} = -q_{z,z}, \quad (8)$$

где C_p — теплоемкость ЖК-системы, а $q_z = -T \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta T_{,z}}$ — тепловой поток в ГОЖК-канале. Принимая во внимание тот факт, что $\mathbf{v} = u(z, t) \hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, последнее уравнение может быть записано в виде [8,15]

$$\rho_m C_p T_{,t} = \lambda_{\perp} \left[T_{,z} \left(\lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \right]_{,z} + \left[\xi T \theta_{,z} \left(\theta_{,t} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta \right) - u_{,z} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \right) \right]_{,z}, \quad (9)$$

где $\lambda = \lambda_{\parallel}/\lambda_{\perp}$. Для того чтобы провести анализ полученной системы уравнений (6), (7) и (9), перепишем ее в безразмерном виде

$$\theta_{,\tau} = \overline{\mathcal{A}}(\theta)u_{,z} + \overline{\mathcal{G}}(\theta)\theta_{,zz} - \frac{1}{2} \overline{\mathcal{G}}_{,\theta}(\theta)\theta_{,z}^2 - \delta_1 \chi_{,z}\theta_{,z} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta\right), \quad (10)$$

$$\delta_2 u(z, \tau)_{,\tau} = \overline{\sigma}_{z,x,z}, \quad (11)$$

и

$$\delta_3 \chi(z, \tau)_{,\tau} = \left[\chi_{,z} \left(\lambda \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \right]_{,z} + \delta_4 \times \left[\chi \theta_{,z} \left(\theta_{,\tau} \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \theta \right) - u_{,z} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \right) \right]_{,z}, \quad (12)$$

где

$$\overline{\mathcal{A}}(\theta) = \mathcal{A}(\theta)/\gamma_1, \quad \overline{\mathcal{G}}(\theta) = \mathcal{G}(\theta)/K_1, \quad \overline{\sigma}_{z,x} = \sigma_{z,x}/\gamma_1,$$

$$\sigma_{z,x} = \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta u_{,z}}$$

$$= h(\theta)u_{,z} - \mathcal{A}(\theta)\theta_{,\tau} - \xi T_{,z}\theta_{,z} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right)$$

— сдвиговая компонента тензора напряжений. В уравнении (12) $\chi(\tau, z) = T(\tau, z)/T_{NI}$ — безразмерная температура нормированная на температуру фазового перехода T_{NI} нематик-изотропное состояние, $\tau = (K_1/\gamma_1 d^2)t$ — безразмерное время, $z = z/d$ — безразмерная пространственная переменная отсчитанная от нижней границы ЖК-канала, в то время как $\delta_1 = \xi T_{NI}/K_1$, $\delta_2 = \rho_m K_1/\gamma_1^2$, $\delta_3 = \rho_m C_p K_1/(\gamma_1 \lambda_{\perp})$ и $\delta_4 = K_1 \xi/(\gamma_1 \lambda_{\perp} d^2)$ — четыре параметра ЖК-системы. Здесь и далее под z будем подразумевать z/d . Система безразмерных уравнений (10)–(12) должна быть дополнена граничными условиями как для поля директора и скорости, так и для поля температуры. Безразмерное граничное условие для поля директора принимает вид

$$\theta_{z=0} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{z=1} = \pi, \quad (13)$$

в то время как безразмерное граничное условие для поля скорости может быть записано в виде

$$u(z)_{z=0} = u(z)_{z=1} = 0. \quad (14)$$

В свою очередь, безразмерное поле температуры $\chi(z, \tau)$ должно удовлетворять граничному условию

$$\chi(z)_{z=0} = \chi_1, \quad \left(\partial \chi(z) / \partial z \right)_{z=1} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, формирование градиента температуры по сечению ГОЖК-канала, в котором верхняя поверхность полностью термически изолирована, а на нижней поверхности поддерживается постоянная температура, под действием стационарного горизонтального гидродинамического потока описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (10)–(12), дополненных граничными условиями (13)–(15).

В случае ЖК-системы, образованной молекулами 4-*n*-пентил-*n'*-цианобифенила (5ЦБ), температурный интервал существования нематической фазы соответствует $295 \leq T \leq T_{NI} \sim 307$ К. В этом интервале температур среднее значение плотности нематической фазы равно

$\sim 10^3 \text{ kg/m}^3$, средние значения коэффициентов упругости K_1 и K_3 равны 10 и 13 pN [16] соответственно, в то время как среднее значение коэффициента вращательной вязкости γ_1 равно $0.072 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ [17]. Значения коэффициентов теплоемкости и теплопроводности в этом температурном интервале в среднем постоянны и равны $C_p \sim 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ [18] и $\lambda_{\parallel} \sim 0.24$ и $\lambda_{\perp} \sim 0.13 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ [19] соответственно. С учетом значений коэффициентов Лесли, соответствующих нематической фазе 5ЦБ [20], величины параметров δ_i ($i = 1, \dots, 4$) равны $\delta_1 \sim 24$, $\delta_2 \sim 2 \cdot 10^{-6}$, $\delta_3 \sim 6 \cdot 10^{-4}$, $\delta_4 \sim 2 \cdot 10^{-9}$ соответственно. Поэтому с учетом того, что $\delta_i \ll 1$ ($i = 2, 3, 4$), уравнения Навье–Стокса (11) и теплопроводности (12) упрощаются. Так, уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zx} &= h(\theta)u_{,z} - \mathcal{A}(\theta)\theta_{,z} - \delta_1\chi_{,z}\theta_{,z} \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2\theta\right) \\ &= C(\tau), \end{aligned} \quad (16)$$

где $C(\tau)$ — функция не зависящая от пространственной переменной z и определяющаяся граничными условиями, а уравнение теплопроводности (12) принимает вид

$$\left[\chi_{,z} \left(\lambda \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\right]_{,z} = 0. \quad (17)$$

С целью изучения механизма ответственного за формирование градиента температуры по сечению ГОЖК-канала под действием стационарного горизонтально направленного гидродинамического потока рассмотрим стационарный аналог уравнения (10), где $\theta_{,z} = 0$. В этом случае безразмерное температурное поле $\chi(z)$ в ГОЖК-канале описывается уравнением

$$\chi(z) = \int_0^z \left(h(\theta)u_{,z} - (h(\theta)u_{,z})_{z=1}\right) / I(\theta, z) dz + \chi_1, \quad (18)$$

где

$$I(\theta, z) = \delta_1\theta_{,z} \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2\theta\right)$$

и $\chi_1 = T_1/T_M$.

3. Решение гидродинамических уравнений и основные результаты

Формирование разности температур по сечению изначально равномерно прогретого ГОЖК-канала под действием стационарного горизонтально направленного гидродинамического потока, с острым „треугольным“ профилем

$$u(z, \xi) = \begin{cases} \frac{\alpha z}{\xi}, & (0 \leq z < \xi), \\ \frac{\alpha}{1-\xi} (1-z), & (\xi \leq z < 1), \end{cases}$$

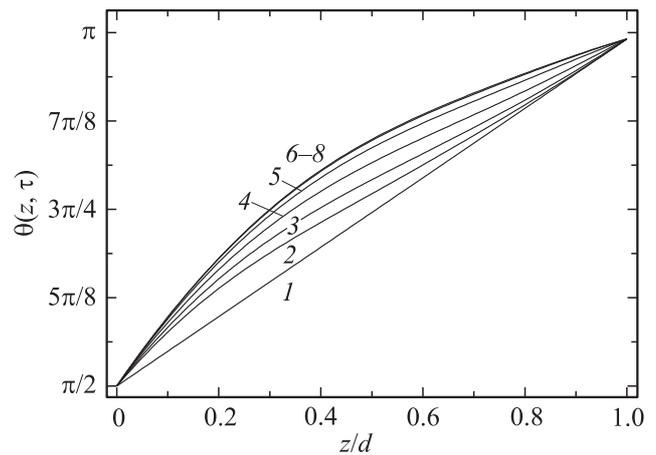


Рис. 1. Релаксация полярного угла $\theta(z, \tau)$ к равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(z)$ по сечению гибридно-ориентированного ЖК-канала. Кривая 1 соответствует значению $\tau = 0.004$, кривая 8 — равновесному распределению спустя $\tau_R = \tau(8) = 0.032$ ($\sim 23 \text{ ms}$). Кривые 2–7 соответствуют промежуточным значениям τ .

было исследовано численно методом релаксации [21], а критерием сходимости итерационной процедуры был выбран $\epsilon = |(\theta_{m+1}(z, \tau) - \theta_m(z, \tau)) / \theta_m(z, \tau)| \sim 10^{-4}$. Здесь m — номер итерации. Этот профиль гидродинамической скорости характеризуется двумя параметрами, положением ξ и величиной α максимального значения скорости $u(z, \xi)$.

Как уже было отмечено выше, при отсутствии потока в ГОЖК-канале устанавливается линейное $\theta(z) = \frac{\pi}{2}(z+1)$ распределение поля директора по сечению ЖК-канала, так, что на нижней границе $\theta_{z=0} = \frac{\pi}{2}$ и директор соориентирован планарно, в то время как на верхней границе $\theta_{z=1} = \pi$ и директор соориентирован гомеотропно. Как только в ГОЖК-канале формируется горизонтально направленный поток $u(z, \xi)$, то происходит переориентация поля директора и распределение угла $\theta(z, \tau)$ эволюционирует к его равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(z)$ по сечению ЖК-канала. Результаты расчета эволюции $\theta(z, \tau)$ к равновесному значению $\theta_{\text{eq}}(z, \tau_R = \tau(8))$ представлены на рис. 1. Здесь $\tau_R = \tau(8) = 0.032$ ($\sim 23 \text{ ms}$), а величина параметра α равна 0.09. Это соответствует размерному значению максимальной скорости в ГОЖК-канале шириной в $10 \mu\text{m}$, в $\sim 0.9 \mu\text{m/s}$, приложенной в точке $\xi = 0.98$. Равновесный профиль полярного угла $\theta_{\text{eq}}(z, \tau_R = \tau(8))$, отсчитанного от оси z , характеризуется нелинейной зависимостью от расстояния z , и все итерационные кривые $\theta(z, \tau_i)$ располагаются выше прямой $\theta(z) = \frac{\pi}{2}(z+1)$. Такое поведение $\theta(z, \tau_i)$ физически обосновано, поскольку гидродинамический поток сильнее отклоняет директор в середине ЖК-канала чем вблизи границ, где директор жестко соориентирован. В свою очередь, как только в ГОЖК-канале формируется гидродинамический поток $u(z, \xi)$ и происходит переориентация

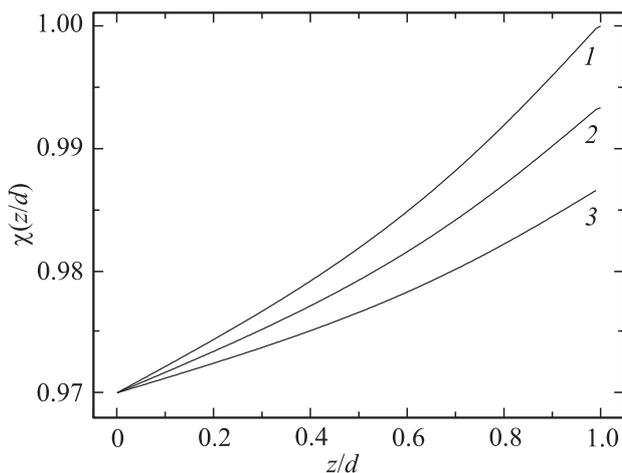


Рис. 2. Зависимость безразмерной температуры $\chi(z/d)$ от безразмерного расстояния z/d , отсчитанного от нижней ограничивающей поверхности ГОЖК-канала. Параметры гидродинамической скорости $u(z, \xi)$ равны: $\alpha = 0.09$ (кривая 1), 0.07 (кривая 2), 0.05 (кривая 3) соответственно. Во всех случаях $\xi = 0.98$.

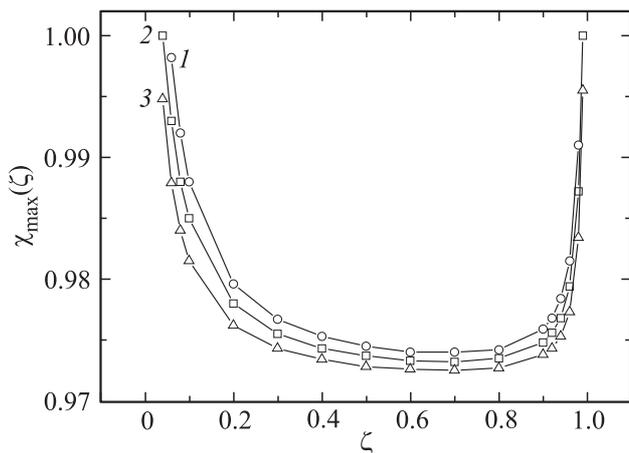


Рис. 3. Зависимость $\chi_{\max}(\xi)$ от положения ξ максимального значения скорости $u(z, \xi)$ для трех значений α : 0.11 (кривая 1), 0.09 (кривая 2), 0.07 (кривая 3).

поля директора, по сечению ГОЖК-канала начинает формироваться разность температур $\Delta\chi = \chi_{\text{up}} - \chi_{\text{lw}}$. Это обусловлено термомеханической силой, которая дает вклад как в выражение для полной диссипационной функции Рэлея (\mathcal{R}_{lm}), так и в баланс моментов (\mathbf{T}_{lm}), действующих на единичный объем ЖК-фазы. Следует отметить, что в изотропной фазе термомеханический вклад отсутствует, поскольку отсутствует поле директора. Когда стационарный поток $\mathbf{v} = u(z, \xi)\hat{\mathbf{i}}$ направлен в положительном направлении (см. рис. 2), температура на нижней границе ГОЖК-канала поддерживается постоянной $\chi_{z=0} = \chi_1 = 0.97$ (~ 298 К), в то время как по сечению ЖК-канала формируется температурный градиент ∇T , направленный к более теплой верхней

границе ГОЖК-канала. Максимальная температурная разность $\chi_{\max}(\xi) \equiv \Delta\chi = \chi_{\text{up}} - \chi_{\text{lw}} = 0.03$ (~ 9 К) формируется в ГОЖК-канале под влиянием стационарного потока $u(z, \xi)$, когда величина параметра α равна 0.09 (кривая 1), чему соответствует размерное значение максимальной скорости в ГОЖК-канале шириной в $10 \mu\text{m}$, в $\sim 0.9 \mu\text{m/s}$, приложенное в точке $\xi = 0.98$. Для двух других режимов, с $\alpha = 0.07$ и 0.05 , максимальная температурная разность $\chi_{\max}(\xi)$ равна 0.02 (~ 6 К) и 0.01 (~ 3 К) соответственно. Во всех этих трех случаях положение максимального значения гидродинамической скорости $\xi = 0.98$ было вблизи верхней гомеотропно ориентированной поверхности ЖК-канала. Следует отметить, что такой выбор параметров α и ξ был предопределен небольшим интервалом $\chi \in [0.97 - 1.00]$ существования нематической фазы. Было также установлено, что положение ξ максимального значения скорости $u(z, \xi)$ сильно влияет на величину максимальной разности температур $\chi_{\max}(\xi)$, формирующейся по сечению ГОЖК-канала (см. рис. 3). Так, например, в случае $\xi = 0.5$, т.е. когда положение максимального значения гидродинамической скорости находилось в середине сечения ЖК-канала, температурная разность $\chi_{\max}(\xi = 0.5) = 0$ и градиент температуры поперек ГОЖК-канала не формировался. Даже увеличив максимальное значение скорости α на один порядок, с 0.09 до 0.9 , температурная разность $\chi_{\max}(\xi = 0.5) \sim 0.001$ оставалась практически равной нулю. С другой стороны, когда положение ξ максимального значения скорости $u(z, \xi)$ находится вблизи ограничивающих поверхностей, тогда и достигается максимальная разность температур по сечению ГОЖК-канала. Такая зависимость $\chi_{\max}(\xi)$ от ξ предопределена характером уравнения (18) и „треугольным“ профилем гидродинамической скорости по сечению ЖК-канала. Действительно, когда $\xi \rightarrow 0$ или 1 , то максимальная величина $u(z, \xi)$ неограниченно возрастает и тем самым формируется большая разность температур $\chi_{\max}(\xi)$. Следует также отметить, что наш выбор положения ξ максимального значения скорости $u(z, \xi)$ был предопределен узким температурным интервалом существования нематической фазы, и выбор $0.05 \leq \alpha \leq 0.09$ был продиктован этим условием.

4. Заключение

Предложено теоретическое описание формирования градиента температуры в изначально равномерно прогретом гибридно-ориентированном жидкокристаллическом (ГОЖК) канале микроскопических размеров под действием стационарного, горизонтально направленного гидродинамического потока. Численные исследования, выполненные в рамках нелинейного обобщения теории Эриксона–Лесли, с учетом уравнения теплопроводности, показали, что в случае полной термической изоляции одной из поверхностей ГОЖК-канала и при условии, что на другой поверхности поддерживается

постоянная температура, под действием стационарного гидродинамического потока с „треугольным“ профилем скорости $u(z, \xi)$ возможно формирование разности температур $\chi_{\max}(\xi) = \chi_{\text{up}} - \chi_{\text{lw}}$ по сечению ГОЖК-канала. На величину $\chi_{\max}(\xi)$ сильно влияет положение ξ максимального значения скорости $u(z, \xi)$. Было показано, что в случае ЖК-системы, образованной молекулами 4-*n*-пентил-*n*'-цианобифенила, гидродинамический поток, характеризующийся „треугольным“ профилем скорости с $\xi = 0.98$ и $u(z, \xi = 0.98) \sim 0.09$, формирует максимальную разность температур $\chi_{\max}(\xi) = 0.03$ (~ 9 К). Такой выбор положения максимального значения безразмерной скорости $u_{\max}(z, \xi = 0.98) = 0.09$ был предопределен узким температурным интервалом существования нематической фазы. Эта безразмерная величина скорости соответствует значению размерной максимальной скорости $\sim 0.9 \mu\text{m/s}$ в ГОЖК-канале шириной в $10 \mu\text{m}$, приложенной в точке $\xi = 0.98$. Следует отметить, что такая зависимость $\chi_{\max}(\xi)$ от ξ предопределена также характером уравнения описывающего формирование поля температуры и формой „треугольного“ профиля гидродинамической скорости по сечению ЖК-канала. Описанный механизм диссипации механической энергии определяется корреляцией градиентов поля директора и температуры; эта корреляция ответственна за формирование разности температур поперек ГОЖК-канала под действием стационарного гидродинамического потока с „треугольным“ профилем скорости. Следует также отметить, что в однородно ориентированном ЖК-канале, где отсутствует градиент поля директора $\nabla \hat{n}$, под действием гидродинамического потока с любым профилем скорости градиент температуры не формируется. Таким образом, этот механизм формирования градиента температуры в ЖК-канале реализуется только лишь под действием гидродинамического потока со специфическим профилем скорости и при условии существования градиента поля директора. В заключение также следует отметить, что из-за микроскопических размеров ЖК-канала в нем не может наблюдаться конвективная неустойчивость, обусловленная механизмом Рэлея–Бенара, поскольку величина параметра $R \sim d^3$, отвечающего за возникновение этой неустойчивости, значительно меньше универсального критического значения $R_c \sim 1708$ [8], определяющего порог, выше которого и начинает формироваться конвективная неустойчивость.

Список литературы

- [1] R.B. Schoch, J.Y. Han, P. Renaud. *Rev. Mod. Phys.* **80**, 839 (2008).
- [2] A. Sengupta, U. Tkalec, M. Ravnik, J. Yeomans, Ch. Bahr, S. Herminghaus. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 048303 (2013).
- [3] D.P. Holmes, B. Tavakol, G. Frochlicher, H.A. Stone. *Soft Matter* **9**, 7049 (2013).
- [4] A. Sugimura, A.V. Zakharov. *Phys. Rev. E* **84**, 021703 (2011).
- [5] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. *J. Chem. Phys.* **139**, 244904 (2013).
- [6] P.C. Акопян, Б.Я. Зельдович. *ЖЭТФ* **87**, 1660 (1984).
- [7] R.S. Akopyan, R.B. Aloverdian, E.A. Santosian, Y.S. Chilingarian. *J. Appl. Phys.* **90**, 3371 (2001).
- [8] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. *J. Chem. Phys.* **127**, 084907 (2007).
- [9] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. *RSC Advances*. **2**, 7296 (2012).
- [10] O. Lehmann. *Ann. Phys.* **4**, 649 (1900).
- [11] J.L. Ericksen. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **4**, 231 (1960).
- [12] F.M. Leslie. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **28**, 265 (1968).
- [13] P.G. de Gennes, J. Prost. *The physics of liquid crystals*. Oxford Univ. Press., Oxford (1995). 400 p.
- [14] I.W. Stewart. *The static and dynamic continuum theory of liquid crystals*. Taylor and Francis, London (2004). 345 p.
- [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика*. Наука, М. (1986). 736 с.
- [16] A.V. Zakharov, A. Maliniak. *Eur. Phys. J. E* **4**, 85 (2001).
- [17] A.V. Zakharov, A.V. Komolkin, A. Maliniak. *Phys. Rev. E* **59**, 6802 (1999).
- [18] P. Jamee, G. Pitsi, J. Thoen. *Phys. Rev. E* **66**, 021707 (2002).
- [19] M. Marinelli, A.K. Ghosh, F. Mercuri. *Phys. Rev. E* **63**, 061713 (2001).
- [20] A.G. Chmielewski. *Mol. Chyst. Liq. Cryst.* **132**, 339 (1986).
- [21] И.С. Березин, Н.Р. Жидков. *Методы вычислений*. Физматгиз, М. (1964). 464 с.