11

Электрическое поле горизонтальной линейной заводненной антенны

© Е.Д. Терещенко,[1] П.Е. Терещенко[2]

[1] Полярный геофизический институт,
183010 Мурманск, Россия
[2] Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: tereshchenko@gmail.com

(Поступило в редакцию 7 июня 2016 г. В окончательной редакции 8 сентября 2016 г.)

Рассмотрено возбуждение электрического поля горизонтальным заводненным источником, находящимся на границе раздела двух сред. Решение задачи представлено в виде интегралов, содержащих быстроосциллирующую функцию Бесселя. В рамках квазистационарного приближения общие формулы, описывающие поле в воде, представлены с помощью интегралов Ватсона через хорошо изученные модифицированные функции Бесселя. Показано, что в зоне, находящейся на расстоянии больше скин-слоя от антенны, вертикальная компонента определяется полем, распространяющимся исключительно в нижней среде, а компоненты, перпендикулярные антенне, имеют вид волн, распространяющихся в верхней среде без поглощения, впоследствии проникающих вглубь, изменяясь по экспоненциальному закону.

DOI: 10.21883/JTF.2017.03.44254.1917

Введение

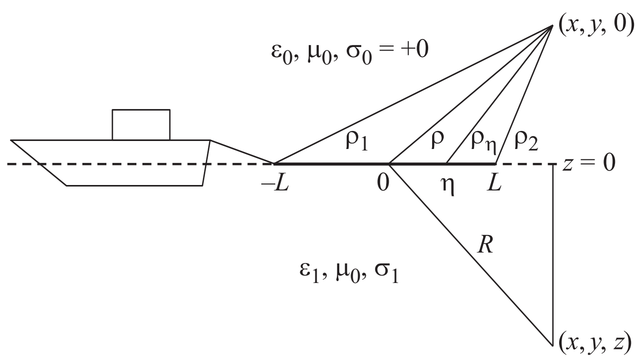
Задача возбуждения электромагнитных волн источником, находящимся на границе раздела двух сред, имеет богатую историю, начиная с работ Зоммерфельда [1], Вейля [2], Фока, Бурсиана [3], а также более близких к настоящему времени работ Уэйта [4], Макарова [5], Вешева [6], Кинга [7] и др. Однако остаются некоторые вопросы, не нашедшие своего освещения в известной литературе, и в связи с развитием систем управления глубоко погруженными объектами, а также электромагнитных методов исследования литосферы океана [8], вновь возникает интерес к подобным задачам. В отличие от экспериментов на земной поверхности, где измеряемой величиной является поле на границе раздела, при проведении морских работ немаловажную роль играет информация об изменении поля с глубиной.

В настоящей работе получим аналитические формулы, описывающие структуру электрического поля, возбуждаемого горизонтальной линейной антенной с заводненными электродами, которую для краткости будем называть „заводненной", и его изменение с глубиной. В рамках квазистационарного метода, являющегося хорошим приближением при описании волн крайне низкочастотного (КНЧ) и более низкого диапазонов, представим компоненты поля в виде хорошо известных функций. В отличие от широко распространенного подхода к вычислению поля на границе раздела с использованием интегралов Фока [3,6] воспользуемся двумя интегралами Ватсона [9], позволяющими определить не только поле на границе раздела, но и его изменение с глубиной.

1. Электрический вектор-потенциал и его связь с электрическим полем

Рассмотрим излучение в двуслойной среде заводненной антенны длиной $2L$, питаемой током с гармонической зависимостью от времени $\exp(-i\omega t)$. Систему координат выбираем следующим (см. рисунок) образом. Центр декартовых координат помещаем в середину антенны, ось z направляем вверх, ось x — вдоль антенны, ось y — поперек антенны. Расстояние до точки наблюдения обозначим R, а расстояние на плоскости $(x, y, 0)$ обозначим ρ. Среду в области $z > 0$ считаем практически непроводящей ($\sigma = +0$, наличие $+$ у нуля указывает на небольшое поглощение) с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 \approx (10^{-9})/(36\pi)$ F/m и магнитной проницаемостью $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Предполагаем, что область $z < 0$ имеет электромагнитные параметры ϵ_1, μ_0, σ_1.

Задача возбуждения электромагнитного поля сторонним током $\mathbf{J}$ сводится к решению уравнений Гельмгольца для электрического вектора-потенциала $\mathbf{A}$ с соответствующими граничными условиями [4,6]. Рассматриваем излучение монохроматических волн, поэтому будем использовать уравнения для комплексных амплитуд $\mathbf{A}$, соответствующих монохроматических компонент ($\mathbf{A} \to \mathbf{A}\exp(-i\omega t)$, $\mathbf{E} \to \mathbf{E}\exp(-i\omega t)$, $\mathbf{E}$ —электрическое поле).



Геометрия задачи.

Принимая во внимание, что источник направлен вдоль оси x (см. рисунок), представляем вектор $\mathbf{A}$ в следующем виде:

$$\mathbf{A}^{(j)} = A_x^{(j)}\mathbf{e}_x + A_z^{(j)}\mathbf{e}_z, \tag{1}$$

где $j = 0,\ 1$ указывает на среду, $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные орты, направленные вдоль осей x и z соответственно.

Дальнейшая задача сводится к нахождению решения системы уравнений

$$\nabla^2\mathbf{A}^{(j)} + k_j^2\mathbf{A}^{(j)} = -\mathbf{J}, \qquad j = 0,\ 1 \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\mathbf{A}^{(0)}\big|_{z=0} = \mathbf{A}^{(1)}\big|_{z=0}, \qquad \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0},$$

$$\frac{1}{k_0^2}\operatorname{div}\mathbf{A}^{(0)}\big|_{z=0} = \frac{1}{k_1^2}\operatorname{div}\mathbf{A}^{(1)}\big|_{z=0}. \tag{3}$$

Волновые числа k_0 и k_1 входящие в систему уравнений (2) и (3), определяются выражениями

$$k_0 = \frac{\omega}{c}(1 + i0) = \frac{\omega}{c},$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + i\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_0}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1'}. \tag{4}$$

Рассмотрим решение системы (2) с граничными условиями (3) для точечного заводненного горизонтального источника, расположенного в начале координат. В этом случае

$$\mathbf{J}^{(0)} = J\Delta_x\delta(x)\delta(y)\delta(z-0)\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{J}^{(1)} = J\Delta_x\delta(x)\delta(y)\delta(z+0)\mathbf{e}_x, \tag{5}$$

где δ — дельта-функция, J — ток, $J\Delta_x$ — дипольный момент, Δ_x — длина диполя, стремящаяся к бесконечно малой величине.

Переход к величинам, соответствующим возбуждению линейной антенной длиной $2L$, осуществляется с помощью суммирования по длине антенны. В частности, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — электрическое поле, возбуждаемое линейной антенной, будет равно

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(j)} = \Sigma\mathbf{E}^{(j)}(\rho_\eta, z), \tag{6}$$

где $\mathbf{E}^{(j)}(\rho_\eta, z)$ — поле диполя, находящегося в точке η антенны.

Решение системы (2) с граничными условиями (3) строится в цилиндрической системе координат $(z,\ \rho,\ \phi)$ в виде разложения по базисным функциям $\cos\frac{m}{2}\phi$, $m = 0,\ 1, \ldots$, образующим полную систему на промежутке $(0,\ 2\pi]$ [9].

Дальнейшие шаги хорошо известны [5,6] и связаны с определением с учетом граничных условий соответствующих функций, входящих в разложение и зависящих от $\rho,\ z$. Поэтому, опуская довольно несложные преобразования, приведем конечный результат вычисления $A_x^{(j)}$ и $A_z^{(j)}$ для источника (5)

$$A_x^{(j)} = \frac{J\cdot\Delta_x}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{2i\exp\left(i\sqrt{k_j^2-\lambda^2}|z|\right)}{\sqrt{k_0^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}}J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda,$$

$$A_z^{(j)} = \frac{J\cdot\Delta_x}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(k_0^2-k_1^2\right)$$

$$\times\int\limits_0^\infty \frac{2\exp\left(i\sqrt{k_j^2-\lambda^2}|z|\right)}{\left(\sqrt{k_0^2-\lambda^2}+\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\right)\left(k_1^2\sqrt{k_0^2-\lambda^2}+k_0^2\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\right)}$$

$$\times J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \tag{7}$$

$j = 0.1$. Ветвь квадратного корня фиксировали, исходя из условия

$$\operatorname{Im}\sqrt{k_j^2-\lambda^2} > 0. \tag{8}$$

Для компактности записи, а также чтобы иметь аналогию с работами по геоэлектрике [3,6], преобразуем формулу (7), введя новые обозначения

$$k_j = i\varkappa_j, \qquad \nu_j = -i\sqrt{k_j^2-\lambda^2} = \sqrt{\varkappa_j^2+\lambda^2},$$

$$A_x^{(j)} = \frac{j\cdot\Delta_x}{4\pi}\Pi^{(j)}(\rho, z), \quad A_z^{(j)} = \frac{J\cdot\Delta_x}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}F^{(j)}(\rho, z). \tag{9}$$

Из соотношения (8) следует $\operatorname{Re}\nu_j > 0$, а из (9) и (7) получаем

$$\Pi^{(j)}(\rho, z) = \int\limits_0^\infty \frac{2}{\nu_0+\nu_1}\exp(-\nu_j|z|)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda,$$

$$F^{(j)}(\rho, z) = \left(\varkappa_1^2-\varkappa_0^2\right)$$

$$\times\int\limits_0^\infty \frac{2}{(\nu_0+\nu_1)(\varkappa_0^2\nu_1+\varkappa_1^2\nu_0)}\exp(-\nu_j|z|)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda,$$

$$j = 0,\ 1. \tag{10}$$

Система (10) является базовой при вычислении электрического поля. Рассмотрим практически важный случай — поле в нижней среде (в воде). Принимая во внимание, что электрическое поле $\mathbf{E}^{(j)}$ связано с электрическим вектор-потенциалом следующим соотношением:

$$\mathbf{E}^{(1)} = i\omega\mu_0\mathbf{A}^{(1)} - \operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\mathbf{A}^{(1)}}{i\omega\tilde{\varepsilon}_1'\varepsilon_0}, \tag{11}$$

а

$$\mathbf{A}^{(1)} = A_x^{(1)}\mathbf{e}_x + A_z^{(1)}\mathbf{e}_z,$$

получим с учетом (9)

$$E_x^{(1)} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}J\cdot\Delta_x\left[\Pi^{(1)}(\rho, z) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\varkappa_1^2}\frac{\partial}{\partial x}P^{(1)}(\rho, z)\right],$$

$$E_y^{(1)} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}J\cdot\Delta_x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\varkappa_1^2}\frac{\partial}{\partial y}P^{(1)}(\rho, z)\right],$$

$$E_z^{(1)} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}J\cdot\Delta_x\frac{\partial}{\partial x}S^{(1)}(\rho, z), \tag{12}$$

где обозначено

$$P^{(1)}(\rho, z) = \Pi^{(1)}(\rho, z) + \frac{\partial}{\partial z}F^{(1)}(\rho, z),$$

$$S^{(1)}(\rho,z)=F^{(1)}(\rho,z)-\frac{1}{\varkappa_1^2}\frac{\partial}{\partial z}P^{(1)}(\rho,z). \qquad (13)$$

Воспользуемся (10), тогда можно будет представить функции, определяющие $\mathbf{E}^{(1)}$, через интегралы, содержащие функции Бесселя:

$$\Pi^{(1)}(\rho,z)=\int\limits_0^\infty \frac{2}{\nu_0+\nu_1}\exp(\nu_1 z)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda,$$

$$P^{(1)}(\rho,z)=\varkappa_1^2\int\limits_0^\infty \frac{2}{\varkappa_0^2\nu_1+\varkappa_1^2\nu_0}\exp(\nu_1 z)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda,$$

$$S^{(1)}(\rho,z)=-\int\limits_0^\infty \frac{2\nu_0}{\varkappa_0^2\nu_1+\varkappa_1^2\nu_0}\exp(\nu_1 z)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda. \qquad (14)$$

Таким образом, имеем несобственные интегралы, содержащие осциллирующую функцию $J_0(\lambda\rho)$. Для вычисления таких интегралов существуют хорошо разработанные численные методы, в частности метод Лонгмана [10,11]. Для практически важного случая КНЧ и более низкого диапазона формулы (14) допускают упрощение и возможность их представления через хорошо исследованные функции.

2. Квазистационарное приближение

В квазистационарном приближении полагают $\varkappa_0=0$. Физически это соответствует пренебрежению максвелловским током смещения по сравнению с током проводимости. При использовании волн очень низкой частоты хорошо выполняется условие $|\varkappa_0^2/\varkappa_1^2|\ll 1$, что дает возможность заменить в формулах (14) $\varkappa_0$ нулем, а $\nu_0\to\lambda$. Тогда будем иметь

$$\Pi(\rho,z)=\Pi^{(1)}(\rho,z)\big|_{\varkappa_0=0}=\int\limits_0^\infty \frac{2\exp(\nu_1 z)}{\nu_1+\lambda}J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda,$$

$$P(\rho,z)=P^{(1)}(\rho,z)\big|_{\varkappa_0=0}=\int\limits_0^\infty 2\exp(\nu_1 z)J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$S(\rho,z)=S^{(1)}(\rho,z)\big|_{\varkappa_0=0}=-\frac{1}{\varkappa_1^2}\int\limits_0^\infty 2\exp(\nu_1 z)J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda. \qquad (15)$$

Интегралы, определяющие $\Pi(\rho,z)$, $P(\rho,z)$ и $S(\rho,z)$, являются производными от двух интегралов Ватсона: один, определяющий падающее поле [5]

$$\int\limits_0^\infty \frac{\exp(\nu_1 z)}{\nu_1}J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda=\frac{\exp(-\varkappa_1 R)}{R}=\frac{\exp(ik_1 R)}{R},$$

$$R=\sqrt{\rho^2+z^2}, \qquad (16)$$

другой связан с произведением модифицированных функций Бесселя [9]

$$\int\limits_0^\infty \frac{\exp(\nu_1 z)}{\nu_1}J_0(\lambda\rho)d\lambda=I_0(r_+)K_0(r_-), \qquad (17)$$

где

$$r_+=\frac{\varkappa_1}{2}(R+z),\qquad r_-=\frac{\varkappa_1}{2}(R-z),$$

а I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя.

Вычислим функции $\Pi(\rho,z)$, $P(\rho,z)$ и $S(\rho,z)$, используя интегралы Ватсона (16) и (17):

$$\Pi(\rho,z)=\frac{2}{\varkappa_1^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\exp(-\varkappa_1 R)}{R}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}-\varkappa_1^2\frac{\partial}{\partial z}\right)I_0(r_+)K_0(r_-)\right],$$

$$P(\rho,z)=2\frac{\partial}{\partial z}I_0(r_+)K_0(r_-),$$

$$S(\rho,z)=-\frac{2}{\varkappa_1^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\exp(-\varkappa_1 R)}{R}. \qquad (18)$$

Для определения поля линейной антенны необходимо проинтегрировать выражение (12) по длине антенны, заменив $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ на $\rho_\eta=\sqrt{(x-\eta)^2+y^2}$, $J\Delta_x\to Jd\eta$, $\frac{\partial}{\partial x}\to-\frac{\partial}{\partial\eta}$.

Обозначим $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(1)}\big|_{\varkappa_0=0}=\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\rho_\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho_\eta}=\frac{x-\eta}{\rho_\eta}\frac{\partial}{\partial\rho_\eta},$$

а

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial\rho_\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho_\eta}=\frac{y}{\rho_\eta}\frac{\partial}{\partial\rho_\eta},$$

тогда в результате интегрирования по η получим

$$\mathcal{E}_x=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}$$
$$\times J\left[\int\limits_{-L}^{L}\Pi(\rho_\eta,z)d\eta+\frac{x-\eta}{\varkappa_1^2\rho_\eta}\frac{\partial}{\partial\rho_\eta}P(\rho_\eta,z)\big|_{\eta=-L}^{\eta=L}\right],$$

$$\mathcal{E}_y=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi\varkappa_1^2}J\frac{y}{\rho_\eta}\frac{\partial}{\partial\rho_\eta}P(\rho_\eta,z)\big|_{\eta=-L}^{\eta=L},$$

$$\mathcal{E}_z=-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}JS(\rho_\eta,z)\big|_{\eta=-L}^{\eta=L}. \qquad (19)$$

Выражения (19) — формальное решение задачи. В нем используются преобразования хорошо изученных модифицированных функций Бесселя. Для придания физической наглядности полученному решению сделаем еще ряд дополнительных шагов.

Начнем с определения поля на границе раздела $z=0$. Для этого необходимо знать $\Pi(\rho,0)$ и

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho,z)\big|_{z=0}.$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho,z)=\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z}I_0(r_+)K_0(r_-).$$

Для предельного перехода к $z=0$ целесообразно продифференцировать по ρ и z произведение модифицированных функций Бессселя. Последовательно дифференцируя по ρ и z, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho,z)=2\Bigg[-\frac{r_+}{R^3}K_0(r_-)I_1(r_+)-\frac{r_-}{R^3}I_0(r_+)K_1(r_-)+\frac{\varkappa_1^2 z}{2R^2}\big(I_0(r_+)K_0(r_-)-I_1(r_+)K_1(r_-)\big)\Bigg]. \tag{20}$$

Отсюда следует, что при $z=0$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho,z)\Big|_{z=0}=-\frac{\varkappa_1}{\rho^2}\left[K_0\left(\frac{\varkappa_1}{2}\rho\right)I_1\left(\frac{\varkappa_1}{2}\rho\right)+I_0\left(\frac{\varkappa_1}{2}\rho\right)K_1\left(\frac{\varkappa_1}{2}\rho\right)\right].$$

В [9] показано, что выражение, находящееся в квадратных скобках, равно $2/(\varkappa_1\rho)$, и соответственно имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho,z)\Big|_{z=0}=-\frac{2}{\rho^3}.$$

Следовательно, на границе раздела снизу составляющая $\mathcal{E}_y$ электромагнитного поля будет равна

$$\mathcal{E}_y\Big|_{z=0}=-\frac{i\omega\mu_0}{2\pi\varkappa_1^2}\frac{y}{\rho_\eta^3}\Big|_{\eta=-L}^{\eta=L}. \tag{21}$$

Применяя вышеописанную схему, после ряда несложных, но громоздких преобразований можно получить значение $\Pi(\rho,0)$:

$$\Pi(\rho,0)=\frac{2}{\varkappa_1^2\rho^3}\left[1-(1+\varkappa_1\rho)\exp(-\varkappa_1\rho)\right]$$

и соответственно выражение для $\mathcal{E}_x\big|_{z=0}$:

$$\mathcal{E}_x\Big|_{z=0}=\frac{i\omega\mu_0}{2\pi\varkappa_1^2}J\left[\int\limits_{-L}^{L}\frac{1-(1+\varkappa_1\rho_\eta)\exp(-\varkappa_1\rho_\eta)}{\rho_\eta^3}\,d\eta-\frac{x-\eta}{\rho_\eta^3}\Big|_{\eta=-L}^{\eta=L}\right]. \tag{22}$$

Анализируя (21) и (22), видим, что составляющая $\mathcal{E}_x$ в отличии от $\mathcal{E}_y$ содержит экспоненциальное слагаемое, связанное с волной, распространяющейся в нижней среде. Сравнение выражений (21) и (22) с результатами, полученными для поля на границе раздела при подходе к ней сверху [6], показывает их идентичность. Этого и следовало ожидать в силу непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля на границе раздела двух сред.

Проанализируем поведение поля на некотором удалении от антенны и границы раздела. Учитывая, что компонента $\mathcal{E}_Z$ имеет простую структуру и практически определяется волной, идущей от источника в точку приема, рассмотрим более подробно составляющую $\mathcal{E}_y$.

Считаем выполненным условие $|r_+|\gg 1$ или

$$\left|(R+z)\frac{\varkappa_1}{2}\right|\gg 1. \tag{23}$$

Так как $z\le 0$, то и

$$|r_+|=\left|(R-z)\frac{\varkappa_1}{2}\right|\gg 1.$$

При выполнении условий $|r_+|\gg 1$, $|r_-|\gg 1$ можно воспользоваться асимптотическими разложениями для модифицированных функций Бесселя и следующих из них асимптотических представлений для произведений модифицированных функций Бесселя:

$$\begin{aligned}
I_0(r_+)K_0(r_-)&\sim\frac{\exp(\varkappa_1 z)}{\varkappa_1\rho}\left[1-\frac{\varkappa_1 z}{2\varkappa_1^2\rho^2}\right],\\
I_0(r_+)K_1(r_-)&\sim\frac{\exp(\varkappa_1 z)}{\varkappa_1\rho}\left[1+\frac{\varkappa_1 z}{2\varkappa_1^2\rho^2}+\frac{\varkappa_1 R}{\varkappa_1^2\rho^2}\right],\\
I_1(r_+)K_0(r_-)&\sim\frac{\exp(\varkappa_1 z)}{\varkappa_1\rho}\left[1+\frac{\varkappa_1 z}{2\varkappa_1^2\rho^2}-\frac{\varkappa_1 R}{\varkappa_1^2\rho^2}\right],\\
I_1(r_+)K_1(r_-)&\sim\frac{\exp(\varkappa_1 z)}{\varkappa_1\rho}\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{\varkappa_1 z}{\varkappa_1^2\rho^2}\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

Подстановка разложений (24) в (20) и получившегося результата в (19) дает

$$\mathcal{E}_y=-\frac{i\omega\mu_0}{2\pi\varkappa_1^2}\frac{y}{\rho_\eta^3}\left[1-\frac{z}{2R_\eta}\left(1+\frac{3z^2}{\rho_\eta^2}\right)\frac{1}{\varkappa_1 R_\eta}\right]\exp(\varkappa_1 z), \tag{25}$$

где $R_\eta=\sqrt{\rho_\eta^2+z^2}$. Учтем, что $z/R_\eta\le 1$ и на больших расстояниях, значительно превышающих скин-слой, можно пренебречь членами, имеющими порядок $|l/(\varkappa_1 R_\eta)|$, тогда из (25) получаем следующий результат:

$$\mathcal{E}_y\simeq\mathcal{E}_y\Big|_{z=0}\exp(\varkappa_1 z). \tag{26}$$

Таким образом, в отличие от составляющей $\mathcal{E}_z$, которая описывается волной, распространяющейся исключительно в нижней среде, имеем волну, которая сперва распространяется в верхней среде без поглощения, а затем проникает на глубину вниз, испытывая изменения по экспоненциальному закону.

Выполнив аналогичные преобразования для $\mathcal{E}_x$, можно увидеть более сложную структуру формирования $\mathcal{E}_x$, которая будет суперпозицией двух волн, одна из которых, как и при формировании $\mathcal{E}_z$, определяется распространением исключительно в нижней среде, а другая распространяется в верхней среде, впоследствии проникая вниз.

Учитывая, что величина прямого поля в нижней среде есть величина порядка отброшенных членов в асимптотическом разложении (24), им можно пренебречь. Поэтому закономерность изменения $\mathcal{E}_x$ с глубиной будет подобна $\mathcal{E}_y$.

Заключение

Таким образом, в результате проведенных вычислений получены выражения для компонент электрического поля, возбуждаемого линейной заводненной антенной, в виде интегралов, содержащих быстроосциллирующие функции. В области частот, для которых выполняется условие малости волнового числа, в вакууме по сравнению с модулем волнового числа в нижней среде, что справедливо для морской воды для частот от нуля до нескольких килогерц, найдено решение задачи в виде хорошо изученных специальных функций.

Показано, что вертикальная компонента поля формируется волной, распространяющейся исключительно в нижней среде. При этом на границе раздела горизонтальная компонента электрического поля, перпендикулярная к антенне, определяется полем, распространяющимся в верхней среде, а продольная — суммой волн в нижней и в верхней среде. В то же время при удалении от антенны изменение составляющих $\mathcal{E}_x$ и $\mathcal{E}_y$ с глубиной происходит по экспоненциальному закону.

Список литературы

[1] *Sommerfeld A.* // Ann. Phys. 1909. Vol. 28. P. 665–736
[2] *Weil H.* // Ann. Phys. 1919. Vol. 60. P. 481–500.
[3] *Бурсиан В.Р.* // Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л.: Недра, 1972. 367 с.
[4] *Wait J.R.* // Electromagnetic waves in stratified madia. NY: Pergamon press, 1962. 372 p.
[5] *Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т.* // Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. М.: Наука, 1991. 196 с.
[6] *Вешев А.В.* // Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. 2-е изд. перераб. и дополн. Л.: Недра, 1980. 391 с.
[7] *King R.W.P., Owens M., Wu Tai Tsun.* Lateral Electromagnetic Waves. Theory and Applications to Communications, Geophysical Exploration and Remote Sensing. NY: Springer–Verlag, 2011. 746 p.
[8] *Жданов М.С.* // Теория обратных задач и регуляция в геофизике. М.: Научный Мир, 2007. 661 с.
[9] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* // Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
[10] *Терещенко П.Е.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 147–150.
[11] *Куваркин А.Б., Новикова Е.И.* // Вычислительная математика и математическая физика. 1981. Т. 21. № 5. С. 1091–1099.