01

Канонические алгоритмы численного интегрирования уравнений движения заряженных частиц

© И.Н. Ефимов, Е.А. Морозов, А.Р. Морозова

Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,
427622 Ижевск, Россия
e-mail: chti@chti.ru

(Поступило в Редакцию 13 июля 2015 г. В окончательной редакции 29 марта 2016 г.)

Рассмотрен метод численного интегрирования уравнений движения заряженных частиц в магнитном поле, в основе которого лежат канонические преобразования фазового пространства гамильтоновой механики. Использование канонических преобразований обеспечивает устойчивость процесса интегрирования к накоплению погрешности счета. Алгоритмы интегрирования содержат минимально возможное количество арифметических операций и могут быть использованы для расчета ускорителей и приборов электронной и ионной оптики.

DOI: 10.21883/JTF.2017.02.44121.1519

Введение

В основе гамильтоновой механики лежат канонические преобразования фазового пространства координат и импульсов, сохраняющие элемент его объема [1]. В частности, механическое движение рассматривается как частный случай такого преобразования. В работе [2] рассматриваются алгоритмы численного интегрирования уравнений Гамильтона, представляющие собой бесконечно малые канонические преобразования. В этом случае следствием сохранения элемента объема является устойчивость алгоритмов к накоплению погрешности счета, а сам процесс численного интегрирования воспроизводит движение исходной системы в условиях малого консервативного возмущения. Отсутствие накопления погрешности счета в каноническом методе позволяет исследовать эволюцию системы на протяжении больших интервалов времени, что невозможно при использовании традиционных методов Эйлера и Рунге–Кутта.

Указанные свойства канонического метода делают перспективным его использование для численного интегрирования движения заряженных частиц в ускорителях и приборах электронной и ионной оптики. Поставим задачу найти алгоритмы интегрирования уравнений движения заряженных частиц в магнитном поле, которые осуществляют каноническое преобразование фазового пространства.

Основные положения

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в магнитном поле [3]. В гамильтоновой механике магнитное поле характеризуется векторным потенциалом $\mathbf{A}$, который, в общем случае, является функцией радиус-вектора частицы $\mathbf{r}$ и времени t: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Функция Гамильтона, определяющая характер движения частицы в релятивистском случае, имеет вид

$$H = [m^2c^4 + c^2(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2]^{0.5}, \tag{1}$$

где c — скорость света, $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы.

В нерелятивистском случае функции Гамильтона (1) принимает вид

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2. \tag{2}$$

Обобщенный импульс частицы связан с ее импульсом $\mathbf{p}$ выражением

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}. \tag{3}$$

Уравнения Гамильтона, определяющие закон движения, имеют вид

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}. \tag{4}$$

Для сокращения записи будем использовать оператор набла ∇, отмечая нижним индексом переменную, по которой берется производная, в частности, $\partial H/\partial \mathbf{P} = \nabla_{\mathbf{p}} H$, $\partial H/\partial \mathbf{r} = \nabla \mathbf{r} H$.

Линейное пространство $R^6 = (\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ является фазовым пространством частицы. Преобразование фазового пространства

$$\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\right) \to \left(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, x_3^{(i+1)}, p_1^{(i+1)}, p_2^{(i+1)}, p_3^{(i+1)}\right) \tag{5}$$

называется каноническим, если для него выполнены условия [1]

$$[p_j^{(i+1)}, x_j^{(i+1)}] = \frac{\partial p_j^{(i+1)}}{\partial p_j^{(i)}} \frac{x_j^{(i+1)}}{\partial x_j^{(i)}} - \frac{\partial p_j^{(i+1)}}{\partial x_j^{(i)}} \frac{x_j^{(i+1)}}{\partial p_j^{(i)}} = 1,$$

$$j = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Выражение (6) называется скобкой Пуассона.

Для канонических преобразований справедлива теорема Лиувилля, они сохраняют фазовый объем, занимаемый системой частиц [1].

Зависящее от параметра τ преобразование (5) называется бесконечно малым параметрическим преобразованием, если выполнено условие

$$\tau \to 0, \quad \left(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, x_3^{(i+1)}, p_1^{(i+1)}, p_2^{(i+1)}, p_3^{(i+1)}, \tau\right) \to \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}, \tau\right). \tag{7}$$

Алгоритмы численного интегрирования уравнений Гамильтона (4) могут быть построены на основе использования преобразований (7), если параметр τ принять за шаг интегрирования.

Поставим задачу найти бесконечно малые параметрические преобразования фазового пространства (7) при выполнении условия каноничности (6) для различных случаев движения заряженных частиц в ускорителях и приборах электронной и ионной оптики.

Нерелятивистская частица в постоянном магнитном поле

В большинстве устройств, использующих магнитное поле для формирования и фокусировки потоков заряженных частиц, векторный потенциал обладает осевой симметрией, поэтому для исследования движения частиц в таких полях используют цилиндрическую систему координат. Пусть $O\rho\varphi z$ — такая система с осью Oz, совпадающей с осью симметрии поля. В выбранной системе координат векторный потенциал имеет составляющие

$$A_\varphi = A_\varphi(\rho, z), \quad A_\rho = A_z = 0. \tag{8}$$

Пусть векторный потенциал (8) постоянен во времени, электрическое поле отсутствует, а скорость частицы много меньше скорости света. Такой случай, в частности, имеет место в электронных магнитных спектрометрах [4]. Запишем функцию Гамильтона (2) и динамические уравнения (4) в системе координат $O\rho\varphi z$, принимая без ограничения общности массу частицы, равной единице

$$H = 0.5\left(P_\rho^2 + P_z^2 + \rho^{-2}(P_\varphi - e\rho^2 A_\varphi)^2\right), \tag{9}$$

$$\dot{P}_\rho = -\rho(P_\varphi - eA_\varphi)(P_\varphi - eA_\varphi - e\rho\nabla_\rho A_\varphi),$$
$$\dot{\rho} = P_\rho, \quad \dot{P}_\varphi = 0,$$
$$\dot{\varphi} = (P_\varphi - eA_\varphi), \quad \dot{P}_z = e\rho^2(P_\varphi - eA_\varphi)\nabla_z A_\varphi, \quad \dot{z} = P_\varphi, \tag{10}$$

где P_ρ, P_φ, P_z — цилиндрические составляющие обобщенного импульса, $A_\varphi = A_\varphi(\rho, z)$. Из равенства нулю производной углового импульса следует его сохранение $P_\varphi = P_0 = \mathrm{const}$. Введем следующие обозначения для правых частей (10):

$$f_\rho = -\rho(P_\varphi - eA_\varphi)(P_\varphi - eA_\varphi - e\rho\nabla_\rho A_\varphi),$$
$$f_\varphi = (P_\varphi - eA_\varphi), \quad f_z = e\rho^2(P_\varphi - eA_\varphi)\nabla_z A_\varphi, \tag{11}$$

и перепишем систему (10) в виде

$$P_\varphi = P_0, \ \dot{P}_\rho = f_\rho, \ \dot{P}_z = f_z, \ \dot{\varphi} = f_\varphi, \ \dot{\rho} = P, \ \dot{z} = P. \tag{12}$$

Рассмотрим бесконечно малое по параметру τ преобразование фазового пространства, которое будет определять алгоритм численного интегрирования уравнений (10)

$$P_\varphi^{(i+1)} = P_0, \ P_\rho^{(i+1)} = P_\rho^{(i)} + f_\rho\tau, \ P_z^{(i+1)} = P_z^{(i)} + f_z\tau,$$
$$\varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + f_\varphi\tau, \ \rho^{(i+1)} = \rho^{(i)} + P_\rho^{(i+1)}\tau,$$
$$z^{(i+1)} = z^{(i)} + P_z^{(i+1)}\tau, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Подчеркнем, что при вычислении координат используются импульсы, вычисленные в первых операторах. Докажем, что преобразование (13) является каноническим преобразованием. Для этого приведем его к явному виду

$$P_\varphi^{(i+1)} = P_\varphi^{(i)}, \quad P_\rho^{(i+1)} = P_\rho^{(i)} + f_\rho\tau,$$
$$P_z^{(i+1)} = P_z^{(i)} + f_z\tau, \quad \varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + f_\varphi\tau,$$
$$\rho^{(i+1)} = \rho^{(i)} + P_\rho^{(i)}\tau + f_\rho\tau^2, \ z^{(i+1)} = z^{(i)} + P_z^{(i)}\tau + f_z\tau^2,$$
$$i = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

и, вычисляя скобку Пуассона (6) полученного преобразования, имеем

$$[P_\rho^{(i+1)}, \rho^{(i+1)}] = 1, [P_z^{(i+1)}, z^{(i+1)}] = 1, [P_\varphi^{(i+1)}, \varphi^{(i+1)}] = 1. \tag{15}$$

Таким образом, алгоритм численного интегрирования уравнений Гамильтона (10) движения нерелятивистской частицы в магнитном поле осуществляет каноническое преобразование фазового пространства и устойчив к накоплению погрешности счета.

Для сравнения рассмотрим преобразование фазового пространства, соответствующее методу Эйлера численного интегрирования

$$P_\varphi^{(i+1)} = P_0, \ P_\rho^{(i+1)} = P_\rho^{(i)} + f_\rho\tau, \ P_z^{(i+1)} = P_z^{(i)} + f_z\tau,$$
$$\varphi^{(i+1)} = \varphi^{(i)} + f_\varphi\tau, \quad \rho^{(i+1)} = \rho^{(i)} + P_\rho^{(i)}\tau,$$
$$z^{(i+1)} = z^{(i)} + P_z^{(i)}\tau, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Вычисляя скобку Пуассона, для преобразования Эйлера получим

$$[P_\rho^{(i+1)}, \rho^{(i+1)}] = -\nabla_\rho f_\rho \tau^2 \neq 1,$$
$$[P_z^{(i+1)}, z^{(i+1)}] = -\nabla_z f_z \tau^2 \neq 1, \quad [P_\varphi^{(i+1)}, \varphi^{(i+1)}] = 1.$$

Нарушение условия каноничности ведет к быстрому накоплению погрешности счета в методе Эйлера. Тот же недостаток имеют и все другие известные алгоритмы, например алгоритм Рунге–Кутта [2].

Укажем некоторые свойства алгоритма (13). Поскольку в алгоритме сначала вычисляются импульсы, которые затем используются для вычисления координат, в теории канонического интегрирования его принято называть „импульс–координата“. Меняя местами порядок вычисления, можно получить алгоритм „координата–импульс“

$$\varphi^{(i+1)}=\varphi^{(i)}+f_\varphi\tau,\quad \rho^{(i+1)}=\rho^{(i)}+P_\rho^{(i+1)}\tau,$$

$$z^{(i+1)}=z^{(i)}+P_z^{(i+1)}\tau,$$

$$P_\varphi^{(i+1)}=P_\varphi^{(i)},\quad P_\rho^{(i+1)}=P_\rho^{(i)}+f_\rho^{(i+1)}\tau,$$

$$P_z^{(i+1)}=P_z^{(i)}+f_z^{(i+1)}\tau,\quad i=1,2,\ldots,\qquad(17)$$

где $f_\varphi^{(i+1)}=f_\varphi(\rho^{(i+1)},z^{(i)})$, $f_z^{(i+1)}=f_\varphi(\rho^{(i)},z^{(i+1)})$.

Из эквивалентности импульсов и координат в гамильтоновой механике следует, что алгоритм „координата–импульс“ также будет каноническим.

Как видно из явного выражения (14), алгоритм „импульс–координата“ имеет первый порядок точности при вычислении импульсов и второй — при вычислении координат. Для алгоритма „координата–импульс“ ситуация будет обратной. Таким образом, порядок точности обоих методов равен 1.5. Отсюда следует, что оптимальным будет использование алгоритма „импульс–координата–координата–импульс“. В этом случае порядок точности оказывается близок к двум без увеличения общего количества вычисляемых операторов.

В заключение заметим, что полученные алгоритмы содержат минимально возможное количество операторов. В частности, в сравнении с алгоритмом Эйлера (13) отсутствует оператор, фиксирующий значение старых координат. В этой связи канонические алгоритмы обладают максимально возможным быстродействием.

Релятивистская частица в постоянном магнитном поле

Пусть по-прежнему векторный потенциал (8) постоянен во времени, но скорость частицы может быть близкой к скорости света. В частности, этот случай реализуется в бета-спектрометрах [5].

Запишем функцию и динамические уравнения Гамильтона (1), (3) в цилиндрической системе координат $O\rho\varphi z$

$$H=[m^2c^4+c^2P_\rho^2+c^2P_z^2+c^2\rho^2(P_\varphi-eA_\varphi)^2]^{0.5},\qquad(18)$$

$$\dot P_\rho=-c^2H^{-1}\rho(P_\varphi-eA_\varphi)(P_\varphi-eA_\varphi-e\rho\nabla_\rho A_\varphi),$$

$$\dot\rho=c^2H^{-1}p_\rho,\quad \dot P_\varphi=0,$$

$$\dot\varphi=c^2H^{-1}\rho^2(P_\varphi-eA_\varphi),$$

$$\dot P_z=c^2eH^{-1}\rho^2(P_\varphi-eA_\varphi)\nabla_\rho A_\varphi,\quad \dot z=c^2H^{-1}P_z,\qquad(19)$$

где P_ρ,P_φ,P_z — компоненты обобщенного импульса в системе $O\rho\varphi z$.

Поскольку рассматриваемая нами система является консервативной, имеет место закон сохранения энергии

$$[m^2c^4+c^2P_\rho^2+c^2P_z^2+c^2\rho^2(P_\varphi-eA_\varphi)^2]^{0.5}=H_0,\qquad(20)$$

где значение функции Гамильтона H_0 определяется начальными условиями. Поэтому систему (16) можно записать в виде

$$\dot P_\varphi=0,\ \dot P_\rho=c^2H_0^{-1}f_\rho,\ \dot P_z=c^2H_0^{-1}f_z,\ \dot\varphi=c^2H_0^{-1}f_\varphi,$$

$$\dot\rho=c^2H_0^{-1}P_\rho,\quad \dot z=c^2H_0^{-1}P_z,\qquad(21)$$

где мы ввели обозначения

$$f_\rho=-\rho(P_\varphi-eA_\varphi)(P_\varphi-eA_\varphi-e\rho\nabla_\rho A_\varphi),$$

$$f_\varphi=\rho^2(P_\varphi-eA_\varphi),\quad f_z=e\rho^2(P_\varphi-eA_\varphi)\nabla_z A_\varphi.\qquad(22)$$

Формально система (21) эквивалентна системе (12), поэтому мы сразу получаем канонические алгоритмы численного интегрирования „импульс–координата“ и „координата–импульс“ для уравнений Гамильтона (19)

$$P_\varphi^{(i+1)}=P_0,\quad P_\rho^{(i+1)}=P_\rho^{(i)}+c^2H_0^{-1}f_\rho\tau,$$

$$P_z^{(i+1)}=P_z^{(i)}+c^2H_0^{-1}f_z\tau,$$

$$\varphi^{(i+1)}=\varphi^{(i)}+c^2H_0^{-1}f_\varphi\tau,\ \rho^{(i+1)}=\rho^{(i)}+c^2H_0^{-1}P_\rho^{(i+1)}\tau,$$

$$z^{(i+1)}=z^{(i)}+c^2H_0^{-1}P_z^{(i+1)}\tau,\quad i=1,2,\ldots\qquad(23)$$

$$\varphi^{(i+1)}=\varphi^{(i)}+c^2H_0^{-1}f_\varphi\tau,\ \rho^{(i+1)}=\rho^{(i)}+c^2H_0^{-1}P_\rho^{(i+1)}\tau,$$

$$z^{(i+1)}=z^{(i)}+c^2H_0^{-1}P_z^{(i+1)}\tau,\quad P_\varphi^{(i+1)}=P_0,$$

$$P_\rho^{(i+1)}=P_\rho^{(i)}+c^2H_0^{-1}f_\rho^{(i+1)}\tau,$$

$$P_z^{(i+1)}=P_z^{(i)}+c^2H_0^{-1}f_z^{(i+1)}\tau,\quad i=1,2,\ldots,\qquad(24)$$

где по-прежнему $f_\varphi^{(i+1)}=f_\varphi(\rho^{(i+1)},z^{(i)})$, $f_z^{(i+1)}==f_\varphi(\rho^{(i)},z^{(i+1)})$.

Свойства алгоритмов (13) и (17) переносятся на алгоритмы (23), (24).

Релятивистская частица в переменном магнитном поле

Пусть векторный потенциал (8) изменяется во времени и скорость частицы вследствие индукционного ускорения может стать как угодно близкой к скорости света, как это имеет место в бетатронах [6].

Функция Гамильтона (1) в цилиндрической системе координат $O\rho\varphi z$ будет иметь форму (18), но векторный потенциал будет, кроме того, явной функцией времени $A_\varphi=A_\varphi(\rho,z,t)$. Значение функции Гамильтона (20) по-прежнему будет определяться начальными значениями координат и импульсов, но сама функция будет изменяться вследствие явной зависимости от времени A_φ

$$H_0(t)=[m^2c^4+c^2P_{\rho0}^2+c^2P_{z0}^2+c^2\rho_0^2(P_{\varphi0}-eA_{\varphi0})^2]^{0.5},\qquad(25)$$

где $P_{\rho0},P_{z0},H_0,\rho_0,z_0$ определяются начальными условиями, $A_{\varphi0}=A_\varphi(\rho_0,z_0,t)$ — заданная функция времени.

Поскольку (25) не зависит от изменения координат, скобки Пуассона (6), вычисленные для системы (19) при явной зависимости векторного потенциала от времени вновь приводят к выполнению условия каноничности (15).

Таким образом, алгоритмы (23), (24) и их свойства распространяются на случай движения частицы в переменном магнитном поле.

Релятивистский осциллятор

Для верификации полученных результатов осуществим численное интегрирование уравнений движения релятивистского электрона в постоянном магнитном поле бетатронного типа каноническим методом, методом Эйлера и методом Рунге–Кутта. Пусть в плоскости $z = 0$ цилиндрической системы координат $O\rho\varphi z$ определена изолиния векторного потенциала в виде окружности радиуса ρ_0, $A(\rho_0) = A_0$, в окрестности которой векторный потенциал изменяется по закону

$$(A_\varphi r)^2 = A_0^2(1 + 0.5r^2), \quad A_\rho = A_z = 0, \qquad (26)$$

где $r = \rho - \rho_0$. Рассмотрим движение релятивистского электрона в поле (26) при начальных условиях $r = 0$, $z = 0$, $p_\varphi = A_0$, $P_\rho = P_{\rho 0} \ll p_\varphi$, $P_\varphi = 0$. Для упрощения анализа введем безразмерные комбинации

$$t \leftarrow \frac{tc}{\rho_0}, \quad r \leftarrow \frac{r}{\rho_0}, \quad a \leftarrow \frac{A_\varphi}{A_0}, \quad h \leftarrow \frac{H}{ce(A_0\rho_0)},$$

$$e_0 \leftarrow \frac{mc}{e(A_0\rho_0)}, \quad p_\varphi \leftarrow \frac{p_\varphi}{ecA_0}, \quad p_\rho \leftarrow \frac{P_\rho}{ec(A_0\rho_0)}. \qquad (27)$$

Запишем функцию Гамильтона и динамические уравнения электрона

$$h = \left[e_0^2 + p_\rho^2 + (p_\varphi r)^2 + (1 + 0.5r^2)\right]^{0.5},$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{r}{h}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{h}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{h}. \qquad (28)$$

Функция Гамильтона является интегралом движения, поэтому динамические уравнения можно переписать в виде

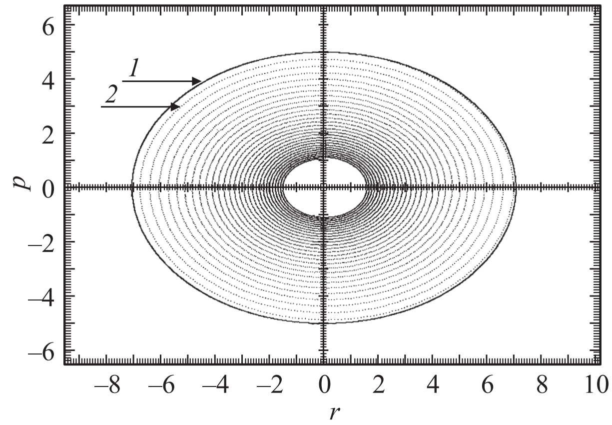
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{h_0}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{r}{h_0}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{h_0}, \qquad (29)$$

где h_0 — начальное значение функции Гамильтона.

Мы видим, что движение электрона состоит из равномерного движения по окружности изолинии, задаваемым первым уравнением, и гармонических колебаний перпендикулярно окружности, определяемых двумя последними уравнениями. Для сравнительного анализа алгоритмов будем численно интегрировать уравнения гармонических колебаний (29). Запишем алгоритмы интегрирования.

Канонический алгоритм импульс–координата содержит два оператора

$$p_r = p_r - 0.5h_0^{-1}r\tau, \quad r = r + p_r h_0^{-1} p_r \tau. \qquad (30)$$



Фазовые траектории релятивистского осциллятора: *1* — интегрирование по каноническому алгоритму, *2* — интегрирование по алгоритму Рунге–Кутта.

Алгоритм Эйлера содержит три оператора

$$p_r^* = p_r, \quad p_r = p_r - 0.5h_0^{-1}r\tau, \quad r = r + p_r^* h_0^{-1} p_r \tau. \qquad (31)$$

Алгоритм Рунге–Кутта 4-го порядка содержит десять операторов

$$K_1 = -0.5h_0^{-1}r\tau, \; L_1 = h_0^{-1}p_r\tau,$$

$$K_2 = -0.5h_0^{-1}(r + 0.5L_1)\tau, \; L_2 = h_0^{-1}(p_r + 0.5K_1)\tau,$$

$$K_3 = -0.5h_0^{-1}(r + 0.5L_2)\tau, \; L_3 = h_0^{-1}(p_r + 0.5K_2)\tau,$$

$$K_4 = -0.5h_0^{-1}(r + L_3)\tau, \; L_4 = h_0^{-1}(p_r + K_3)\tau,$$

$$p_r = p_r + 6^{-1}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$r = r + 6^{-1}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4).$$

Очевидно, наибольшее быстродействие у канонического алгоритма.

Сравнение устойчивости осуществим, интегрируя систему динамических уравнений релятивистского электрона (28), используя алгоритмы (30) и (32). На рисунке приведены полученные фазовые траектории электрона $p_r = p_r(r)$ при шаге интегрирования $\tau = 0.5$ и числе шагов 10 000. При интегрировании каноническим алгоритмом фазовая траектория представляет собой устойчивый эллипс. Интегрирование методом Рунге–Кутта приводит к фазовой траектории в виде спирали, что означает неустойчивость этого метода к накоплению погрешности счета. Тем более будет неустойчив алгоритм Эйлера, поскольку его можно рассматривать как алгоритм Рунге–Кутта второго порядка.

Заключение

Мы построили алгоритмы численного интегрирования динамических уравнений для различных случаев движения заряженных частиц в магнитном поле с осевой симметрией. Выполнение условия каноничности преобразований фазового пространства, осуществляемого алгоритмами, обеспечивают устойчивость процесса интегрирования к накоплению погрешности счета. Это свойство делает перспективным применение предложенных алгоритмов для расчета технических устройств, использующих движение заряженных частиц в магнитном поле с осевой симметрией.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
[2] *Ефимов И.Н., Морозов Е.А.* Каноническое интегрирование динамических систем. Екатеринбург. Изд-во Института экономки УрО РАН, 2006. 143 с.
[3] *Ландау Л.Д.* Теория поля. М.: Наука, 1967. С. 460.
[4] *Трапезников И.А., Евстафьев А.И., Сапожников В.П., Шабанова И.Н.* и др. // ФММ. 1973. Т. 36. № 6. С. 1293–1305.
[5] *Зигбан К.* Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия. М.: Атомиздат, 1969. 567 с.
[6] *Лебедев А.Н., Шальнов А.В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоиздат, 1991. 528 с.