

03

Построение промежуточных областей для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса

© А.М. Блохин,^{1,2} А.Ю. Голдин²

^{1,2} Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

e-mail: blokhin@math.nsc.ru, goldinandrey@list.ru

(Поступило в Редакцию 3 ноября 2015 г.)

Обсужден подход к построению областей двухфазных состояний для реальных газов, состояние которых описано модифицированным уравнением Ван-дер-Ваальса в форме, предложенной Р.Л. Фогельсоном и Е.Р. Лихачевым.

Введение

В настоящей работе мы распространяем алгоритм построения областей двухфазных состояний или промежуточных областей по терминологии из [1] на уравнение состояния реального газа, предложенное в [1] (обобщенный газ Ван-дер-Ваальса).

Принято считать, что уравнение Ван-дер-Ваальса достаточно адекватно описывает жидкое и газообразное состояния реального вещества и переход из одного его состояния в другое [2–5]. При этом переход из одного состояния в другое на практике осуществляется через двухфазное состояние [5]. Поскольку изотермы $T < T_{cr}$ (T_{cr} — критическая температура) для газа Ван-дер-Ваальса сильно отличаются от экспериментальных изотерм реального газа, возникает проблема построения „истинных“ изотерм для газа Ван-дер-Ваальса (эти изотермы должны содержать кусок изобары, чтобы достаточно правильно описывать область перехода через двухфазное состояние вещества). Наш подход к построению истинных изотерм для газа Ван-дер-Ваальса и соответственно к построению областей двухфазных состояний изложен, например, в [6]. При этом мы активно используем принцип равных площадей Максвелла [3–5]. Чтобы проиллюстрировать разработанный нами алгоритм, мы используем конкретные численные результаты из [7,8], относящиеся к обтеканию клина обобщенным газом Ван-дер-Ваальса.

1. Обтекание клина обобщенным газом Ван-дер-Ваальса. Предварительные сведения

Как известно(см., например, [9–11]), уравнения газовой динамики имеют точное решение, которое соответствует стационарному обтеканию бесконечного клина равномерным потоком газа (рис. 1).

Структура этого решения такова. При $\theta > b$ ($\theta = b$ — уравнение фронта ударной волны в полярной системе

координат r, θ):

$$u = \hat{u}_\infty(\theta) = U_\infty \cos(\theta), \quad v = \hat{v}_\infty(\theta) = -U_\infty \sin(\theta),$$

$U_\infty = \text{const}$ — скорость газа в набегающем потоке, $P = \hat{P}_\infty = f(\hat{\rho}_\infty, \hat{S}_\infty) = \text{const}$, $\hat{\rho} = \rho_\infty = \text{const}$, $S = \hat{S}_\infty = \text{const}$, $V = \hat{V}_\infty = \frac{1}{\hat{\rho}_\infty} = \text{const}$ — давление, плотность, энтропия и удельный объем в набегающем потоке газа, $c^2 = \hat{c}_\infty^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\hat{\rho}_\infty, \hat{S}_\infty)$ — квадрат скорости звука в набегающем потоке газа, причем $U_\infty \sin(b) > \hat{c}_\infty$, при $0 < a < \theta < b < \frac{\pi}{2}$ ($\theta = a$ — уравнение поверхностного клина):

$$u = \hat{u}(\theta) = \hat{u}(a) \cos(s),$$

$$v = \hat{v}(\theta) = -\hat{u}(a) \sin(s), \quad s = \theta - a,$$

$P = \hat{P} = f(\hat{\rho}, \hat{S}) = \text{const}$ ($\hat{P} > \hat{P}_\infty$), $\rho = \hat{\rho} = \text{const}$ ($\hat{\rho} > \hat{\rho}_\infty$), $S = \hat{S} = \text{const}$ ($\hat{S} > \hat{S}_\infty$), $V = \hat{V} = \frac{1}{\hat{\rho}} = \text{const}$ — давление, плотность, энтропия и удельный объем в газе за ударной волной, $c^2 = \hat{c}^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\hat{\rho}, \hat{S})$ — квадрат скорости звука в газе за ударной волной, при $\theta = b$ выполняются условия

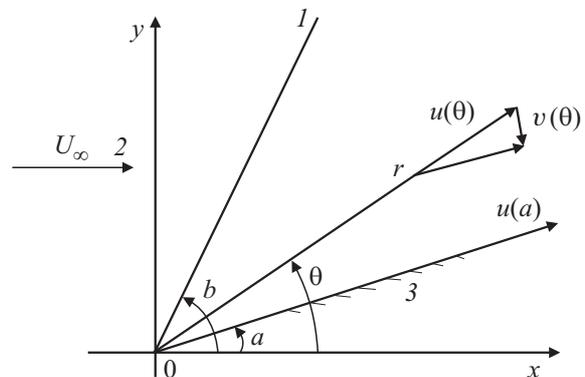


Рис. 1. Обтекание клина равномерным потоком вещества: 1 — ударная волна, 2 — набегающий поток, 3 — клин.

Рэнкина–Гюгонио на фронте ударной волны:

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(b) &= \hat{u}_\infty(b), \\ (\hat{v}(b) + U_\infty \sin(b))^2 + (\hat{P} - \hat{P}_\infty)(\hat{V} - \hat{V}_\infty) &= 0, \\ E(\hat{V}, \hat{P}) - E(\hat{V}_\infty, \hat{P}_\infty) + (\hat{V} - \hat{V}_\infty) \frac{\hat{P} + \hat{P}_\infty}{2} &= 0 \text{ —} \\ &\text{адиабата Гюгонио,} \\ \hat{\rho}\hat{v}(b) &= \hat{\rho}_\infty\hat{v}_\infty(b) = -j (j > 0 \text{ — поток газа} \\ &\text{через разрыв).} \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости газа в полярной системе координат, $P = f(\rho, S)$, $e = E(V, P)$ — уравнения состояния газа, e — внутренняя энергия газа.

Справедлив также первый закон термодинамики [11,12]:

$$TdS = de + PdV, \quad (2)$$

где T — температура газа. Если $P = P(V, T)$, $e = e(V, T)$, $S = S(V, T)$, то из условия интегрируемости (2) мы приходим к ограничению

$$\frac{\partial e}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{P}{T} \right). \quad (3)$$

Кроме этого,

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{c_V}{T}, \quad \frac{dS}{dV} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial V} + P \right). \quad (4)$$

Здесь $c_V = \frac{\partial e}{\partial T}$ — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

В настоящей работе мы будем иметь дело с обобщенным уравнением состояния газа Ван-дер-Ваальса [1,7,8]:

$$P = \frac{RT}{V - V_0} - \frac{A}{(V + C)^k T^m}, \quad V > V_0, \quad (5)$$

где $V_0, A, k, m > 0, C$ — некоторые постоянные, R — газовая постоянная. Заметим, что при $k = 2, C = m = 0$ уравнение (5) переходит в известное уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса, а при $C = m = 0$ — в уравнение из работы [13].

Для уравнения состояния (5) мы последовательно можем получить [7, 8]:

$$e(V, T) = F(T) - \frac{m+1}{k-1} \frac{A}{(V+C)^{k-1} T^m}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{V^2(mP - (m+1)RT/(V - V_0))^2}{T \left(F'(T) + \frac{m(m+1)}{k-1} (V+C) \left(\frac{R}{V-V_0} - \frac{P}{T} \right) \right)} \\ &+ \frac{RTV^2}{(V - V_0)^2} - \frac{kV^2}{V+C} \left(\frac{RT}{V - V_0} - P \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $F(T)$ — некоторая функция.

Адиабату Гюгонио (1) для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса сначала можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} F(T) - \frac{m+1}{k-1} (V+C) \left(\frac{RT}{V-V_0} - P \right) - F(\hat{T}_\infty) \\ + \frac{m+1}{k-1} (\hat{V}_\infty + C) \left(\frac{R\hat{T}_\infty}{\hat{V}_\infty - V_0} - \hat{P}_\infty \right) + (V - \hat{V}_\infty) \frac{P + \hat{P}_\infty}{2} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

т.е.

$$V = W(P; \hat{P}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, C, A, m, k), \quad (8')$$

где $T = T(P, V)$ — функция, которая находится из (5), $\hat{T}_\infty = T(\hat{P}_\infty, \hat{V}_\infty)$.

Путем громоздких выкладок из (8) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dP} (\hat{P}; \hat{P}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, C, A, m, k) \\ = - \left(\frac{\hat{V} - \hat{V}_\infty}{2} + \frac{F'(\hat{T})(\hat{V} - V_0)}{\hat{r}} + \frac{m+1}{k-1} (\hat{V} + C) \right. \\ \times \left(1 - \frac{R}{T} \right) \Big) / \left(\left(\frac{\hat{P} + \hat{P}_\infty}{2} + \left(F'(\hat{T}) - \frac{m+1}{k-1} \right. \right. \right. \\ \times \left. \left. \frac{R(\hat{V} + C)}{\hat{V} - V_0} \right) \frac{\frac{R\hat{T}}{\hat{V} - V_0} + \frac{k}{V+C} (\hat{P}(\hat{V} - V_0) - R\hat{T})}{\hat{r}} \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{m+1}{k-1} \left(\frac{R\hat{T}}{\hat{V} - V_0} - \hat{P} \right) + \frac{m+1}{k-1} (\hat{V} + C) \frac{R\hat{T}}{(\hat{V} - V_0)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\hat{r} = R + m \left(R - \frac{\hat{P}(\hat{V} - V_0)}{T} \right)$, $\hat{T} = T(\hat{P}, \hat{V})$.

В терминах агрегата

$$\Delta = j^2 \frac{dW}{dP} (\hat{P}; \hat{P}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, C, A, m, k) \quad (1), (9)$$

ударная волна для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса абсолютно (равномерно) устойчива, если [7,8]

$$\Delta + 1 > 0, \quad N < 0, \quad (10)$$

ударная волна нейтрально устойчива, если

$$N, \mathcal{F} > 0, \quad (11)$$

где

$$N = \Delta - \frac{1 - M^2 \sin^2(\delta)(1 + \bar{\rho})}{1 + M^2 \sin^2(\delta)(\bar{\rho} - 1)}, \quad \mathcal{F} = 1 + 2M \sin(\delta) - \Delta,$$

$$M^2 = \left(\frac{\hat{u}(a)}{\hat{c}} \right)^2, \quad \bar{\rho} = \frac{\hat{V}_\infty}{V} > 1, \quad \delta = b - a,$$

M — число Маха в потоке вещества за ударной волной, \hat{c}^2 вычисляется по формуле (7).

Замечание 1.1. Первое, второе и четвертое соотношения (1) можно заменить на следующие:

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(a) &= U_\infty \frac{\cos(b)}{\cos(\delta)}, \\ \hat{P} &= \hat{P}_\infty + jU_\infty \frac{\sin(a)}{\cos(\delta)}, \\ \hat{\rho} &= \text{ctg}(\delta) \text{tg}(b). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Удобно ввести следующие безразмерные параметры для уравнения состояния (5) [7, 8]

$$\alpha = \frac{AR^m}{\hat{P}_\infty^{m+1} \hat{V}_\infty^{m+k}}, \quad \beta = \frac{V_0}{\hat{V}_\infty} \quad (0 < \beta < 1),$$

$$\tilde{\delta} = \frac{C}{\hat{V}_\infty}, \quad \gamma_\infty = 1 + \frac{R}{F'(\hat{T}_\infty)} > 1.$$

Тогда [7,8]

$$\frac{\hat{P}}{\hat{P}_\infty} = 1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy}, \quad \tilde{M}_\infty^2 = M_\infty^2 \frac{\hat{c}_\infty^2}{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty},$$

$$\frac{\hat{c}_\infty^2}{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty} = \frac{\Lambda_\infty}{(1-\beta)^2} + \frac{k}{1+\tilde{\delta}} \left(1 - \frac{\Lambda_\infty}{1-\beta}\right) + \frac{(m - (m+1)\Lambda_\infty/(1-\beta))^2}{\Lambda_\infty \left(\frac{1}{\gamma_\infty - 1} + \frac{m(m+1)(1+\tilde{\delta})}{(k-1)\Lambda_\infty} \left(\frac{\Lambda_\infty}{(1-\beta)} - 1\right)\right)},$$

$$\Lambda_\infty = (1-\beta) \left(1 + \frac{\alpha}{(1+\tilde{\delta})^k \Lambda_\infty^m}\right),$$

$$\Lambda = (1-\beta\bar{\rho}) \frac{\hat{P}/\hat{P}_\infty + \alpha\bar{\rho}^k/(1+\tilde{\delta}\bar{\rho})^k \Lambda^m}{\bar{\rho}},$$

$$\frac{\hat{c}_\infty^2}{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty} = \frac{\Lambda_\infty}{(1-\beta\bar{\rho})^2} + \frac{k}{\bar{\rho}(1+\tilde{\delta}\bar{\rho})} \left(\frac{\hat{P}}{\hat{P}_\infty} - \frac{\Lambda\bar{\rho}}{1-\beta\bar{\rho}}\right) + \frac{(m\hat{P}/\hat{P}_\infty - (m+1)\Lambda\bar{\rho}/(1-\beta\bar{\rho}))^2}{\Lambda\bar{\rho}^2 \left(\frac{F'(\hat{T})}{R} + \frac{m(m+1)(1+\tilde{\delta}\bar{\rho})}{k-1} \left(\frac{1}{1-\beta\bar{\rho}} - \frac{\hat{P}}{\hat{P}_\infty} \Lambda\bar{\rho}\right)\right)},$$

$$M^2 = \tilde{M}_\infty^2 \frac{1 + \text{tg}^2(\delta) \hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{1 + x^2} \frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{\hat{c}_\infty^2}.$$

Здесь $M_\infty^2 = \frac{U_\infty^2}{\hat{c}_\infty^2}$ — квадрат числа Маха в набегающем потоке,

$$y = \text{tg}(a), \quad x = \text{tg}(b), \quad \hat{T}_\infty = \frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty,$$

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda, \quad \bar{\rho} = \frac{x(1+xy)}{x-y}. \quad (12)$$

Из формул, приведенных выше, следует, что агрегаты Λ_∞, Λ находятся неявным образом. Этот факт существенно усложняет численную реализацию соответствующего алгоритма.

Адиабата Гюгонио из (1), также (8) может быть переписана так:

$$\frac{F(\hat{T}) - F(\hat{T}_\infty)}{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty} - \frac{y(1+x^2)}{x(1+xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1+xy)}\right) + \frac{m+1}{k-1} \left((1+\tilde{\delta}) \left(\frac{\Lambda_\infty}{1-\beta} - 1\right) - (1+\tilde{\delta}\bar{\rho}) \left(\frac{\Lambda}{1-\beta\bar{\rho}} - \frac{\hat{P}}{\hat{P}_\infty \bar{\rho}}\right)\right) = 0. \quad (13)$$

Далее мы конкретизируем вид функции $F(T)$. В отличие от [13] мы возьмем $F(T)$ в таком виде

$$F(T) = c_v^* T \left(1 + \frac{A_1}{2} T\right), \quad (14)$$

где $c_v^*, A_1 > 0$ — некоторые постоянные (в работе [13] полагается, что $A_1 = 0$). Тогда [7,8]

$$c_v(T) = F'(T) = c_v^* (1 + A_1 T),$$

$$\frac{c_v(\hat{T})}{R} = \frac{1}{\gamma^* - 1} (1 + \alpha_T \Lambda),$$

$$\gamma^* = 1 + \frac{R}{c_v^*} > 1, \quad \alpha_1 = A_1 \frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R},$$

$$\frac{c_v(\hat{T}_\infty)}{R} = \frac{1}{\gamma_\infty - 1} = \frac{1}{\gamma^* - 1} (1 + \alpha_1 \Lambda_\infty),$$

т.е.

$$\gamma^* > \gamma_\infty \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \frac{\gamma^* - \gamma_\infty}{(\gamma_\infty - 1)\Lambda_\infty},$$

$$\frac{F\left(\frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty\right)}{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty} = \frac{\Lambda_\infty}{\gamma^* - 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty\right),$$

$$\frac{F\left(\frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda\right)}{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty} = \frac{\Lambda}{\gamma^* - 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda\right)$$

и соответственно соотношение (13) переписывается так

$$Q(x) = \Lambda \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda\right) - \Lambda_\infty \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty\right) + (\gamma^* - 1) \times \left[-\frac{y(1+x^2)}{x(1+xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1+xy)}\right) + \frac{m+1}{k-1} \left((1+\tilde{\delta}) \times \left(\frac{\Lambda_\infty}{1-\beta} - 1\right) - (1+\tilde{\delta}\bar{\rho}) \left(\frac{\Lambda}{1-\beta\bar{\rho}} - \frac{\hat{P}}{\hat{P}_\infty \bar{\rho}}\right)\right) \right] = 0.$$

Следовательно, при заданных $a, \gamma_\infty, \gamma^*, M_\infty, \alpha, \beta, \tilde{\delta}$ находим корни уравнения $Q(x) = 0$ и, значит, углы b .

Замечание 1.2. Из (4) с учетом (14) получаем

$$\frac{S - S_0}{R} = \ln(V - V_0) + \frac{1}{\gamma^* - 1} (\ln T + A_1 T) - \frac{mA}{R(k-1)(V+C)^{k-1} T^{m+1}}, \quad (15)$$

где S_0 — некоторая постоянная.

Таблица 1.

M_∞	$\hat{T}_\infty < T_{cr}$			M_∞	$\hat{T}_\infty < T_{cr}$	
3.0	b	29.7077°	75.4234°	5.0	20.8432°	76.4641°
	M	1.5665	0.5397		1.9381	0.4967
	$\Delta + 1$	0.4568	0.8675		0.6221	0.9476
	N	-0.6759	-0.6762		-0.7164	-0.6070
	$\bar{\rho}^{-1}$	0.9599	0.9328		0.9478	0.9285
	\hat{P}/\hat{P}_∞	3.1969	1.5013		5.0854	4.2836
	Q	0.2322	1.2382		0.3971	2.4666
		$(\hat{T} < T_{cr})$	$(\hat{T} > T_{cr})$		$(\hat{T} > T_{cr})$	$(\hat{T} > T_{cr})$

Таблица 2.

M_∞	$\hat{T}_\infty < T_{cr}$			M_∞	$\hat{T}_\infty < T_{cr}$	
3.0	b	20.1368°	89.3231°	5.0	12.2378°	89.5217°
	M	2.9039	0.5673		4.7677	0.5212
	N	0.0106	0.1117		0.0192	0.2262
	\mathcal{F}	3.8015	2.2763		3.7105	2.1395
	$\bar{\rho}^{-1}$	0.9463	0.4036		0.9161	0.3235
	\hat{P}/\hat{P}_∞	1.1257	12.7892		1.2071	38.1474
	Q	0.0004	0.6433		-0.0006	1.5258
		$(\hat{T} < T_{cr})$	$(\hat{T} > T_{cr})$		$(\hat{T} < T_{cr})$	$(\hat{T} > T_{cr})$

Следуя [3–5] (см. также [1]), введем так называемые критические параметры для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса:

$$A = \frac{(k+1)^2}{4k} (1+\nu)^{k-1} R T_{cr}^{m+1} V_{cr}^{k-1},$$

$$V_0 = \frac{k-1-2\nu}{k+1} V_{cr},$$

$$C = \nu V_{cr}, \quad P_{cr} V_{cr} = \frac{k^2-1}{4k(1+\nu)} R T_{cr}.$$

Отсюда получаем

$$T_{cr} = \frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \tilde{l}, \quad \tilde{l} = \left(\frac{\alpha l}{(\beta + \tilde{\delta})^{k-1}} \right)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$l = \frac{4k(k-1)^{k-1}}{(k+1)^{k+1}}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\beta\nu(k+1)}{k-1-2\nu},$$

$$V_{cr} = \frac{\beta(k+1)}{k-1-2\nu}, \quad P_{cr} V_{cr} = \frac{k^2-1}{4k(1+\nu)} \tilde{l}$$

(параметры P_{cr} , V_{cr} отнесены к \hat{V}_∞ , \hat{P}_∞).

Замечание 1.3. Величины k , m , ν для различных реальных газов приведены в [1]. Кроме этого, напомним, что параметр T_{cr} характеризует собой ту изотерму, выше которой реальный газ нельзя превратить в жидкость. Заметим также, что неравенства

$$\hat{T}_\infty, \hat{T} \leq T_{cr}$$

сводятся к следующим:

$$\Lambda_\infty, \Lambda \leq \tilde{l}. \quad (16)$$

Наконец, из (15) получаем выражение для скачка энтропии на ударной волне

$$\begin{aligned} \frac{\hat{S} - \hat{S}_\infty}{R} &= Q(a, b) \\ &= \ln \left(\frac{1 - \beta \bar{\rho}}{\bar{\rho}(1 - \beta)} \right) + \frac{\ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} \right) + \alpha_1 (\Lambda - \Lambda_\infty)}{\gamma^* - 1} \\ &\quad - \frac{m\alpha}{(k-1)} \left(\frac{\bar{\rho}^{k-1}}{(1 + \bar{\rho}\tilde{\delta})^{k-1} \Lambda^{m+1}} - \frac{1}{(1 + \tilde{\delta})^{k-1} \Lambda_\infty^{m+1}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Мы не будем приводить здесь многочисленные результаты расчетов для различных газов (они подробно обсуждаются в работах [7,8]). Отметим только, что далее нас будут интересовать ситуации, когда для вещества в набегающем потоке и после ударной волны выполнены неравенства $\hat{T}_\infty, \hat{T} < T_{cr}$. Это означает, что вещество в таком случае может находиться в двухфазном состоянии [5]. Основная цель настоящей работы заключается в том, чтобы научиться строить области двухфазных состояний для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса.

Замечание 1.4. Для иллюстрации приведены три таблицы. В табл. 1 для азота ($\nu = 0$, $k = 1.91$, $m = 0.36$, [1]) приведены величины b , M , $\Delta + 1$, N , $\bar{\rho}^{-1}$, \hat{P}/\hat{P}_∞ , Q ($= Q(a, b)$, (17)) при $a = 1^\circ$, $\beta = 0.9$, $\alpha = 0.5$, $\gamma_\infty = 2.1$, $\gamma^* = 2.2$.

Таблица 3.

M_∞	$\hat{T}_\infty < T_{cr}$		M_∞	$\hat{T}_\infty < T_{cr}$		
3.0	b	20.2065°	89.3387°	5.0	12.2806°	89.5460°
	M	2.8875	0.5666		4.7418	0.5159
	N	0.0311	0.1222		0.0421	0.8995
	\mathcal{F}	3.8037	2.2738		3.7134	2.1319
	$\bar{\rho}^{-1}$	0.9465	0.3980		0.9163	0.3122
	\hat{P}/\hat{P}_∞	1.1241	12.7013		1.2044	38.1377
	Q	-0.0014	0.6435		-0.0021	1.5533
		$(\hat{T} < T_{cr})$	$(\hat{T} > T_{cr})$			$(\hat{T} < T_{cr})$

Аналогично, в табл. 2 для фреона-12 ($\nu = 0.322$, $k = 2.03$, $m = 0.94$ [1]) приведены величины $b, M, N, \mathcal{F}, \bar{\rho}^{-1}, \hat{P}/\hat{P}_\infty, Q$ при $a = 1^\circ, \beta = 0.01, \alpha = 0.5, \gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2$.

Наконец в табл. 3 для окиси углерода ($\nu = -0.091$, $k = 1.8, m = 0.28$ [1]) приведены величины $b, M, N, \mathcal{F}, \bar{\rho}^{-1}, \hat{P}/\hat{P}_\infty, Q$ при $a = 1^\circ, \beta = 0.01, \alpha = 0.5, \gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2$.

Прокомментируем табл. 1–3. Как и для нормального газа, мы имеем два режима обтекания клина: с сильной ударной волной ($M < 1$) и со слабой ударной волной ($M > 1$). В табл. 1 для всех режимов ударная волна абсолютно устойчива. Для табл. 2 и 3 мы имеем интересную ситуацию: все режимы таковы, что ударные волны для них нейтрально устойчивы. Кроме этого, режим со слабой ударной волной является практически изэнтропическим. Судя по табл. 1–3, для режимов, соответствующих слабым ударным волнам, возможна ситуация, когда вещество как в набегающем потоке, так и после ударной волны может находиться не только в жидком или газообразном состоянии, но и в двухфазном состоянии.

2. Построение областей двухфазных состояний

Уравнение изотерм в наших обозначениях имеет следующий вид (см. уравнение состояния (5)):

$$P = \frac{\lambda}{V - \beta} - \frac{\alpha}{\lambda^m (V + \tilde{\delta})^k}, \quad (18)$$

при этом (см. разд. 1): $\lambda \in (0, \lambda_{cr}), \lambda_{cr} = \tilde{l}$,

$$\tilde{l} = \left[\frac{\alpha l}{(\beta + \tilde{\delta})^{k-1}} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad l = \frac{4k(k-1)^{k-1}}{(k+1)^{k+1}},$$

$$V_{cr} = \frac{(k+1)\beta}{k-1-2\nu}, \quad P_{cr} V_{cr} = \frac{(k^2-1)}{4k(1+\nu)} \tilde{l}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\beta\nu(k+1)}{k-1-2\nu}.$$

Напомним, что в (18) давление P отнесено к \hat{P}_∞ , удельный объем V к \hat{V}_∞ .

Типичная изотерма $ABCD$ изображена на рис. 2. Понятно, что она не является истинной изотермой (на

это указывает наличие S -образных участков). Истинная изотерма $T = \frac{\hat{P}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \lambda, 0 < \lambda < \tilde{l} (T < T_{cr})$ — это ломаная кривая $ABCD$ (BC — отрезок горизонтальной линии $P = P_s$ (изобары)). Область двухфазных состояний на рис. 2 для заданных величин α, β, ν, m выделена штриховой кривой, проходящей через точки M, B, K, C, N .

Приступим теперь к определению параметров P_s, V_B, V_C (рис. 2). Привлекая правило равных площадей Максвелла [3–5] и уравнение (18), получим следующую нелинейную алгебраическую систему для нахождения параметров $V_B, V_C, P_s (V_B \neq V_C)$:

$$P_s \Delta = \lambda \ln \left(\frac{V_C - \beta}{V_B - \beta} \right) - \frac{\alpha}{\lambda^m} \frac{(V_C + \tilde{\delta})^{k-1} - (V_B + \tilde{\delta})^{k-1}}{(V_B V_C + \tilde{\delta}(V_B + V_C) + \tilde{\delta}^2)^{k-1} (k-1)}, \quad (19)$$

$$P_s = \frac{\lambda}{V_B - \beta} - \frac{\alpha}{\lambda^m} \frac{1}{(V_B + \tilde{\delta})^k} = \frac{\lambda}{V_C - \beta} - \frac{\alpha}{\lambda^m} \frac{1}{(V_C + \tilde{\delta})^k}, \quad (20)$$

где $\Delta = V_C - V_B$.

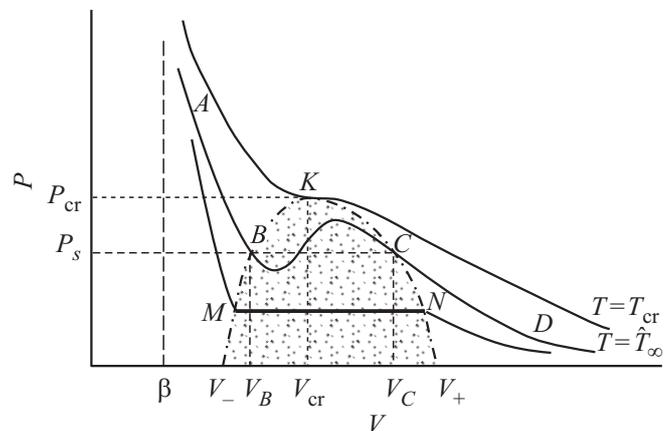


Рис. 2. Область двухфазных состояний.

Применяя лемму Адамара [14], перепишем систему (19), (20) так

$$\frac{\lambda^{m+1}}{V_B V_C - \beta(V_C + V_B) + \beta^2} = \alpha k \frac{\int_0^1 [s\Delta + V_B + \tilde{\delta}]^{k-1} ds}{(V_B V_C + \tilde{\delta}(V_B + V_C) + \tilde{\delta}^2)^k}, \quad (21)$$

$$\lambda^{m+1} \left\{ \frac{1}{V_B - \beta} + \frac{1}{\Delta} \ln \left(\frac{V_B - \beta}{V_C - \beta} \right) \right\} = \alpha \frac{(V_C + \tilde{\delta})^{k-1} - (V_B + \tilde{\delta}) \int_0^1 [s\Delta + V_B + \tilde{\delta}]^{k-2} ds}{(V_B + \tilde{\delta})(V_B V_C + \tilde{\delta}(V_B + V_C) + \tilde{\delta}^2)^{k-1}}. \quad (22)$$

Следуя [6], вместо V_B, V_C введем следующие параметры:

$$V_C = y \frac{1 + \sqrt{1-q}}{2}, \quad V_B = y \frac{1 - \sqrt{1-q}}{2}, \quad q = \frac{4x}{y^2} (< 1), \quad (23)$$

где величины $y, x > 0$. Тогда из (21) получаем

$$x = \beta y - \beta^2 + \frac{\lambda^{m+1}(x + \tilde{\delta}y + \tilde{\delta}2)^k}{\alpha k \int_0^1 [s\Delta + V_B + \tilde{\delta}]^{k-1} ds}, \quad (24)$$

причем

$$\int_0^1 [s\Delta + V_B + \tilde{\delta}]^{k-1} ds = \int_0^1 \left[s\sqrt{y^2 - 4x} + \frac{y - \sqrt{y^2 - 4x} + 2\tilde{\delta}}{2} \right]^{k-1} ds.$$

Замечание 2.1. Вышеупомянутая лемма Адамара [14] для нашего случая формулируется так:

$$(V_C + \tilde{\delta})^\mu - (V_B + \tilde{\delta})^\mu + \mu\Delta \int_0^1 [s\Delta + V_B + \tilde{\delta}]^{\mu-1} ds.$$

Здесь μ — некоторая постоянная величина.

Находя зависимость $x = x(y)$ и подставляя ее в соотношение (22), получим

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(y) &= Q(x(y), y) \\ &= \lambda^{m+1} \left\{ \frac{1}{V_B - \beta} + \frac{1}{\sqrt{y^2 - 4x}} \ln \left(\frac{V_B - \beta}{V_C - \beta} \right) \right\} - \alpha \\ &\times \frac{(V_C + \tilde{\delta})^{k-1} - (V_B + \tilde{\delta}) \int_0^1 \left[s\sqrt{y^2 - 4x} + \frac{y - \sqrt{y^2 - 4x} + 2\tilde{\delta}}{2} \right]^{k-2} ds}{(V_B + \tilde{\delta})(x + y\tilde{\delta} + \tilde{\delta}^2)^{k-1}} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Определяя нули функции $\tilde{Q}(y)$, находим затем параметры V_B, V_C, P_S .

Таким образом, наш алгоритм построения областей двухфазных состояний заключается в следующем: мы для уравнения состояния (18), $\lambda \in (0, \lambda_{cr})$ и конкретных значений параметров α, β, ν, m строим сначала „истинные“ изотермы, а затем зависимости

$$V = V_B(P), \quad 0 < P < P_{cr}$$

и

$$V = V_C(P), \quad 0 < P < P_{cr}.$$

Эти кривые и ограничивают искомую область двухфазных состояний для данных α, β, ν, m . Для того чтобы определить, в каком состоянии находится вещество (либо в набегающем потоке, либо после ударной волны), мы должны определить положение точек $(1, 1), (\frac{P}{P_\infty}, \frac{1}{\rho})$ относительно построенной области. Для параметров $\alpha, \beta,$

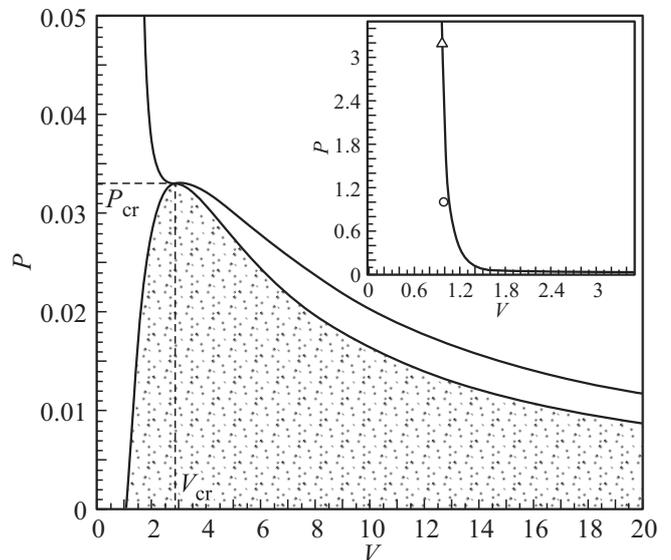


Рис. 3. Область двухфазных состояний для азота (табл. 1).

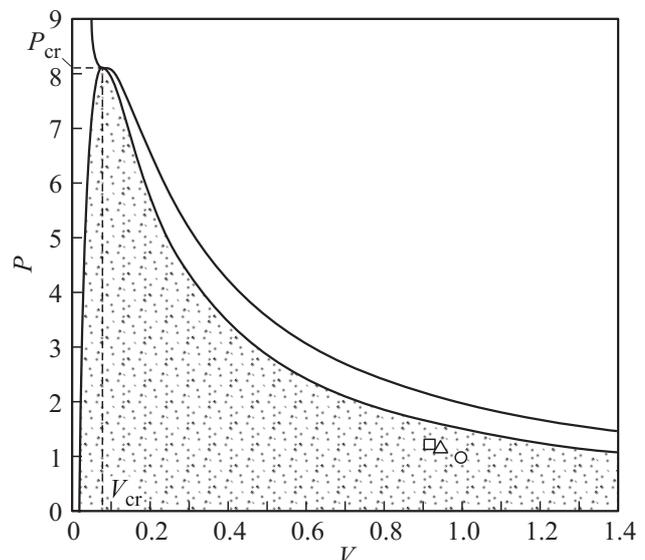


Рис. 4. Область двухфазных состояний для фреона-12 (табл. 2).

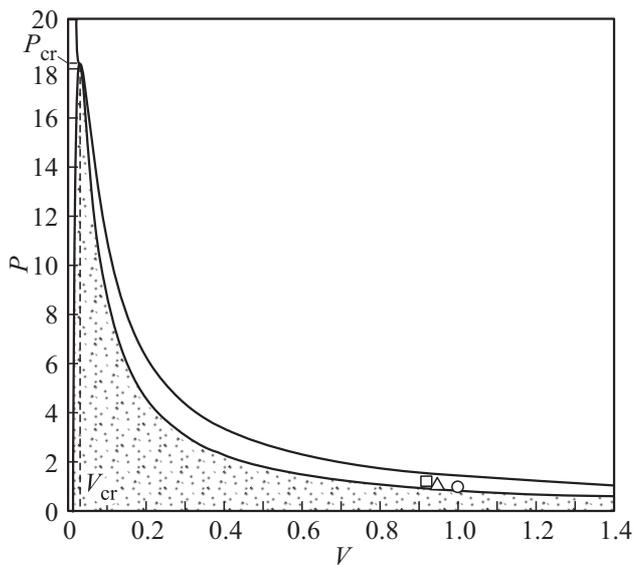


Рис. 5. Область двухфазных состояний для окиси углерода (табл. 3).

v , m , взятых из табл. 1–3, области двухфазных состояний изображены на рис. 3–5 (кружочком обозначена точка (1, 1), треугольником — точка $(\frac{\bar{p}}{3}, \frac{1}{3})$ при $M_\infty = 3$, квадратиком — точка $(\frac{\bar{p}}{5}, \frac{1}{5})$ при $M_\infty = 5$).

Заключительные замечания

Прокомментируем рис. 3–5. Для азота вещество в набегающем потоке (табл. 1, $M_\infty = 3$) находится в жидком состоянии (рис. 3). Вещество после ударной волны также находится в жидком состоянии (точка $(\frac{\bar{p}}{3}, \bar{\rho}^{-1})$ при $M_\infty = 3$ обозначена треугольником). Для фреона-12 вещество как в набегающем потоке, так и после ударной волны находится в двухфазном состоянии (рис. 4), причем поскольку все точки расположены близко от правой границы области двухфазных состояний, в веществе больше насыщенного пара, чем жидкости. Для окиси углерода (рис. 5) вещество как в набегающем потоке, так и после ударной волны, скорее, находится в газообразном состоянии.

Авторы признательны А.С. Бычкову за проведенные численные расчеты, касающиеся обтекания клина обобщенным газом Ван-дер-Ваальса.

Список литературы

- [1] Фогельсон Р.Л., Лихачев Е.Р. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 129–130.
- [2] Вуклович М.П., Новиков Н.Н. Уравнение состояния реальных газов. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1948. 340 с.
- [3] Тер Хаар Д., Вергеланд Г. Элементарная термодинамика. М.: Мир, 1968. 220 с.
- [4] Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир, 1970. 304 с.
- [5] Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М.: Оникс, Мир и образование, 2006. 360 с.
- [6] Blokhin A.M., Goldin A.Yu. Construction of domains of two-phase states for a real substance. International Conference on the Methods of Aerophysical Research, June 27–July 3, 2016. Perm, Russia: Abstracts. Pt I/Ed. V.M. Fomin. P. 29–30.
- [7] Блохин А.М., Ткачев Д.Л. // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 7. С. 20–30.
- [8] Блохин А.М., Бычков А.С., Мякишев В.О. О выполнении условия Лопатинского в задаче об обтекании клина нормальным газом и газом Ван-дер-Ваальса. Препринт / Институт математики СО РАН, № 280, Новосибирск, 2012. 58 с.
- [9] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
- [10] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- [11] Седов Л.Н. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
- [12] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
- [13] Конохов А.В., Лихачев А.Р., Фортвов В.Е., Опарин А.М., Анисимов С.Н. Нейтрально устойчивые ударные волны в термодинамически неидеальных средах: теория и вычислительный эксперимент. Тр. Междунар. конф. „IX Забабанские научные чтения“. 2007.
- [14] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1976. 256 с.