

Известно, что однородное электрическое поле, параллельное свободной поверхности жидкого диэлектрика, оказывает стабилизирующее воздействие на вызываемые различными факторами неустойчивости поверхностей раздела диэлектрическая жидкость—газ: на капиллярную неустойчивость жидкого цилиндра [10], на сверхтонкий (толщиной 100–1000 Å) плоский слой диэлектрической жидкости, динамика которой в значительной степени определяется расклинивающим давлением, создаваемым силами Ван-дер-Ваальса [11], на неустойчивость Рэлея–Тейлора [12].

В настоящей работе изучен капиллярный распад осесимметричного слоя, не содержащего свободных электрических зарядов жидкого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1 , покрывающего находящуюся в однородном продольном электрическом поле \mathbf{E}_0 недеформируемую прямолинейную цилиндрическую нить. Проницаемость материала нити $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. Предполагается, что средняя толщина слоя мала по сравнению с радиусом поперечного сечения нити. Вывод эволюционного уравнения проведен с учетом поверхностных пондеромоторных сил, создаваемых приложенным полем.

Целью работы является исследование влияния определяющих параметров на характеристики капиллярной неустойчивости: пространственный масштаб и скорость роста наиболее быстро растущей моды, нейтральную кривую, область неустойчивости.

Определяющие уравнения

Рассматривается вызываемое силами поверхностного натяжения движение вязкой диэлектрической жидкости с проницаемостью ε_1 при капиллярном распаде цилиндрического в начальный момент времени неподвижного слоя, покрывающего диэлектрическую нить с проницаемостью $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. Нить и жидкость находятся в однородном продольном электрическом поле \mathbf{E}_0 , созданном внешним устройством (рис. 1). Снаружи жидкий слой окружен газом, давление в котором p_a постоянно. Предполагается, что E_0 не превышает пробивное значение, составляющее для сухого воздуха 30 kV/cm [13]. Далее, как и в [13], используется гауссова система CGS.

Система уравнений и граничных условий электрогидродинамики в рамках модели Тейлора–Мелчера [14] является итогом многочисленных работ, выполненных во второй половине XX в. Эта модель учитывает утечку из рассматриваемого объема жидкого диэлектрика свободных электрических зарядов как поступающих в объем извне, так и образующихся за счет различных физико-химических процессов в самом объеме и на его границе.

В электрогидродинамике используется также приближение однородного по температуре и другим физическим характеристикам идеального несжимаемого жидкого диэлектрика, не содержащего свободных электрических зарядов (см., например, [10,11,15–17]). Осно-

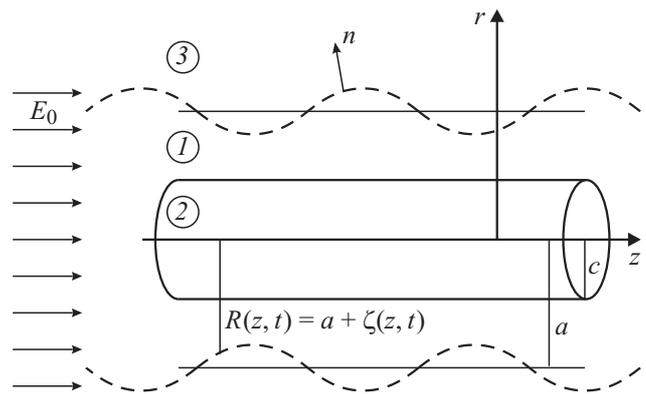


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

вы соответствующей теории были заложены в конце XIX в. [13]. При этом математическая запись пондеромоторных сил является частным случаем общих формул электродинамики сплошных сред [18]. Ввиду отсутствия свободных электрических зарядов объемные пондеромоторные силы отсутствуют, так что в рамках такой модели электрическое поле оказывает силовое воздействие на жидкость лишь за счет пондеромоторных сил, локализованных на поверхности раздела с газом или с жидкостью, имеющей другую диэлектрическую проницаемость [13,18].

Обозначим через ρ , η , α , g соответственно плотность жидкости, ее динамическую вязкость, коэффициент поверхностного натяжения и ускорение силы тяжести. Пусть c — радиус поперечного сечения нити, а δ — средняя толщина слоя.

Помимо ε_1 , ε_2 и геометрического фактора δ/c безразмерными параметрами подобия, характеризующими исследуемое явление, являются число Бонда $Bo = (c + \delta)^2 / l_c^2$, число Онезорге $Oh = \eta^2 / [\rho \alpha (c + \delta)]$ и электрокапиллярное число $N = (c + \delta) E_0^2 / \alpha$. Здесь $l_c = \sqrt{\alpha / (\rho g)}$ — капиллярная длина.

Предполагается, что в рассматриваемом случае $Bo \ll 1$. При выполнении этого условия влияние силы тяжести на форму свободной поверхности жидкости пренебрежимо мало [5] и, как показывают проведенные в отсутствие поля эксперименты [6], движение жидкости осесимметрично и не имеет закрутки. В этой связи следует отметить, что в задаче Рэлея цилиндрическая струя является устойчивой по отношению ко всем возмущениям, которые не являются осесимметричными [3].

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z , ось z которой является осью нити, и обозначим \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_z единичные векторы вдоль соответствующих координатных линий. Пусть уравнение $r = R(z, t)$, где t — время, представляет форму свободной поверхности слоя.

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \Delta w, \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь $u(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ — проекции вектора скорости на координатные линии r и z , а $p(r, z, t)$ — давление жидкости.

Будем отмечать индексами $j = 1, 2, 3$ электрическое поле $E_j(r, z, t) = -\text{grad}\Phi_j$ в слое ($j = 1$), в нити ($j = 2$) и в окружающем газе ($j = 3$). Ввиду отсутствия в жидкости свободных электрических зарядов распределения потенциалов $\Phi_j(r, z, t)$ всюду описываются уравнением Лапласа

$$\Delta \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Граничные условия электростатики на поверхностях раздела сред с различными диэлектрическими свойствами выражают непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля и непрерывность нормальной компоненты вектора индукции:

при $r = c$:

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad (5)$$

при $r = R(z, t)$:

$$\Phi_1 = \Phi_3, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_r, 0, n_z)$ — единичный вектор внешней к свободной поверхности нормали

$$\mathbf{n}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}} \left(\mathbf{a}_r - \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{a}_z \right).$$

Вдали от жидкого слоя поле однородно и направлено вдоль оси z :

при $\frac{r}{c} \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = -E_0. \quad (7)$$

На свободной поверхности $r = R(z, t)$ должны выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} = u \quad (8)$$

и динамические условия

$$p - p_a = \alpha \text{divn} + \frac{2\eta}{1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi [1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2]} \times \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$\left[1 - \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial R}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (10)$$

Кинематическое условие (8) выражает равенство скоростей удаления точек свободной поверхности от оси симметрии и радиальных скоростей жидких частиц, образующих свободную поверхность. Условие (9) выражает равенство нормальных напряжений на противоположных сторонах свободной поверхности. Пропорциональное $\varepsilon_1 - 1$ слагаемое описывает вклад поверхностных пондеромоторных сил [18]. Условие (10) выражает отсутствие касательных напряжений на внешней границе слоя.

На поверхности нити выполняются условия при $r = c$:

$$u = 0, \quad w = 0. \quad (11)$$

Задача (1)–(11) имеет точное решение

$$u = 0, \quad w = 0, \quad R = c + \delta, \quad p_0 = p_a + \frac{\alpha}{a} - \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} E_0^2,$$

$$a = c + \delta, \quad \Phi_j^0 = -E_0 z, \quad j = 1, 2, 3,$$

описывающее гидростатическое состояние жидкости, образующей слой постоянной толщины δ , поляризованный однородным продольным полем, вызывающим уменьшение давления, создаваемого капиллярными силами.

Сделаем линейную замену части искомых функций

$$R(z, t) = a + \xi(z, t), \quad p(r, z, t) = p_0 + p_1(r, z, t), \quad (12)$$

$$\Phi_j(r, z, t) = \Phi_j^0(z) + \varphi_j(r, z, t), \quad j = 1, 2, 3.$$

Отметим, что в рамках нелинейной постановки задачи $\xi(z, t) \sim \delta$. При записи потенциала в виде (12) уравнения (4) и граничные условия (5), (6), естественно, не изменяются, но задача электростатики формулируется для функций $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$, а на бесконечности (7) ставится условие $\partial \varphi_3 / \partial z \rightarrow 0$ при $r/c \rightarrow \infty$.

Постановка задачи

Исследуем влияние пондеромоторных сил на развитие капиллярной неустойчивости осесимметричного слоя, характерная толщина которого много меньше радиуса поперечного сечения нити: $\delta/c \ll 1$. Покажем, что в этом случае после отбрасывания малых величин в определяющих уравнениях и граничных условиях (1)–(11), преобразованных с учетом (12), задача существенно упрощается.

Обратимся к численным данным, полученным в отсутствие поля при экспериментальном исследовании капиллярного распада слоя касторового масла на тонкой проволочке [19]. Обозначим через $\kappa_m = k_m(c + \delta)$ безразмерное волновое число наиболее быстро растущей моды. Согласно [19], для характеризовавших эксперимент пар величин c, δ , последовательно имевших значения: 0.0762, 0.1619 mm; 0.125, 0.125 mm; 0.254, 0.015 mm

были зарегистрированы соответственно следующие безразмерные волновые числа: $\kappa_m = 0.68, 0.67, 0.66$. Эти результаты показывают, что величина отношения δ/c слабо влияет на κ_m . Полученные значения не слишком сильно отличаются от теоретической величины $\kappa_m = 1/\sqrt{2}$, вычисленной в задаче об устойчивости цилиндрической струи радиуса $a = c + \delta$ [3]. В этой задаче все моды с волновыми числами k , для которых $ka < 1$, неустойчивы, тогда как мода с $k_0 = a^{-1}$ нейтрально устойчива, а моды с $ka > 1$ устойчивы.

С учетом вышесказанного в качестве характерного пространственного масштаба мод в задаче о капиллярной неустойчивости диэлектрического слоя выберем величину $\lambda_0 = 2\pi k_0^{-1}$. Введем безразмерный параметр $\gamma = 2\pi\delta/\lambda_0 = \delta/a$. В качестве численного примера укажем, что в случае, когда $c = 0.25$ mm, имеем $\gamma = 0.074$ при $\delta = 0.02$ mm; $\gamma = 0.17$ при $\delta = 0.05$ mm.

Предполагая выполненным условие $\gamma \ll 1$ (что эквивалентно $\delta/c \ll 1$), запишем соответствующее этому случаю приближение (называемое длинноволновым) рассматриваемой задачи.

В длинноволновом приближении лидирующий член разложения по γ выражения единичного вектора внешней к свободной поверхности нормали имеет вид $\mathbf{n}(z, t) = \mathbf{a}_r - \frac{\partial \xi}{\partial z} \mathbf{a}_z$. С учетом этой формулы второе граничное условие (6) записывается следующим образом: при $r = a + \xi(z, t)$:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \left[(1 - \varepsilon_1) E_0 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]. \quad (13)$$

Далее, подставив (12) в граничные условия (8)–(10) на свободной поверхности $r = a + \xi(z, t)$ при учете лишь лидирующего члена разложения $\mathbf{n}(r, z, t)$, имеем

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + w \frac{\xi}{\partial z} = u. \quad (14)$$

$$p_1 = -\frac{\alpha}{a^2} \left(\xi + a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + 2\eta \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \Pi_e, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} \left\{ \varepsilon_1 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(E_0 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 - 2E_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) \right\}, \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В общем случае все слагаемые в (13) по порядку величины одинаковы, ввиду чего на свободной поверхности при $\varepsilon_1 - 1 \sim \varepsilon_1$ имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \sim E_0 \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \sim E_0.$$

С учетом этих оценок с точностью до малых высшего порядка получаем

$$\Pi_e = \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - 2E_0 \right) \Big|_{r=a+\xi(z,t)}. \quad (17)$$

При проведении оценок в уравнениях (1)–(3) и в граничных условиях гидродинамики (14)–(16) с целью упрощения введем переменную $x = r - c$, область изменения которой $0 \leq x \leq \delta + \xi(z, t)$ совпадает с протяженностью в радиальном направлении области, занятой жидкостью.

Конкретизируем рассматриваемое движение жидкости. С этой целью укажем характерные величины определяющих параметров.

Поскольку движение вызывается капиллярными силами (по крайней мере в отсутствие электрического поля), то из динамического условия (15) следует, что характерное отклонение давления в слое p_1^0 от гидростатического давления по порядку величины равно $p_1^0 \sim \delta\alpha/a^2 \sim \gamma\alpha/a$.

Далее рассматривается режим течения для которого, как и в гидродинамической теории смазки [9], имеется баланс сил трения и продольного градиента давления: $\partial p_1/\partial z \sim \eta \partial^2 w/\partial x^2$. Из этого условия легко оценить характерную величину продольной скорости: $w_0 \sim p_1^0 \delta^2/(\eta\lambda_0) \sim \gamma^3 \alpha/\eta$.

Из уравнения неразрывности (1) следует оценка $u_0 \sim \gamma^4 \alpha/\eta$. При этом характерное время имеет порядок $\delta/u_0 \sim \delta\eta/(\gamma^4 \alpha)$.

Отметим, что в постановках задач механики сплошной среды число определяющих параметров обычно больше числа основных единиц измерения используемой системы (см., например, [20]).

Используя выписанные характерные величины, введем безразмерные переменные и искомые функции (со звездочками)

$$x = \delta x_*, \quad z = \frac{\delta}{\gamma} z_*, \quad t = \frac{\delta\eta}{\gamma^4 \alpha} t_*, \quad \xi = \delta \xi_*(z_*, t_*),$$

$$u = \frac{\gamma^4 \alpha}{\eta} u_*(x_*, z_*, t_*), \quad w = \frac{\gamma^3 \alpha}{\eta} w_*(x_*, z_*, t_*),$$

$$p_1 = \frac{\gamma^2 \alpha}{\delta} p_1^*(x_*, z_*, t_*), \quad \varphi_1 = E_0 a \varphi_1^*(r, z_*, t_*).$$

В правые части этих равенств безразмерный малый параметр γ входит в разных степенях, поскольку в задаче имеется 2 характерных пространственных масштаба, а характерные значения параметров, определяющих рассматриваемый режим осесимметричного течения, получены путем оценок на базе системы дифференциальных уравнений в частных производных и граничных условий, содержащих производные по координатам разных порядков.

После перехода в уравнениях (1)–(3) к безразмерным переменным получаем (звездочки опущены)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma u}{\gamma x + 1 - \gamma} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\gamma^7}{Oh} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \gamma^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\gamma x + 1 - \gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\gamma^2 u}{(\gamma x + 1 - \gamma)^2} \right], \quad (19)$$

$$\frac{\gamma^5}{Oh} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{\gamma x + 1 - \gamma} \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\gamma^2 w}{(\gamma x + 1 - \gamma)^2}, \quad (20)$$

где Oh — ранее введенное число Онезорге. В безразмерных переменных кинематическое условие на свободной поверхности сохраняет форму записи (14), а динамические условия (15), (16) с учетом (17) принимают вид

$$p_1 = -\left(\xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + 2 \left[\gamma^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\gamma^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \gamma^4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi\gamma} N \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - 2 \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (22)$$

Из (19), (20) следует, что отношение инерционных членов к силам трения по порядку величины равно γ^5/Oh . В качестве численного примера укажем, что для касторового масла [19] $\rho = 0.96 \text{ g/cm}^3$, $\eta = 6.6 \text{ g/cm} \cdot \text{sec}$, $\alpha = 33 \text{ dyn/cm}$, $Oh = 52.9$ при $a = 0.026 \text{ mm}$.

Удерживая в (18)–(20), (22) члены лидирующего порядка и возвращаясь к размерным переменным, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=\delta+\xi(z,t)} = 0. \quad (24)$$

Из (21) следует, что в динамическом условии на свободной поверхности вклад вязких напряжений пренебрежимо мал. Ввиду этого при $N \sim 8\pi\gamma/(\varepsilon_1 - 1)$ в размерном виде имеем при $x = \delta + \xi(x, t)$:

$$p_1 = -\frac{\alpha}{a^2} \left(\xi + a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) - \frac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_1(c + x, z, t) \times \left[\frac{\partial}{\partial z} \varphi_1(c + x, z, t) - 2E_0 \right]. \quad (25)$$

Поскольку $x = r - c$, то условия на поверхности нити (11) записываются в виде при $x = 0$:

$$u = 0, \quad w = 0. \quad (26)$$

Таким образом, в случае слоя, толщина которого меньше радиуса поперечного сечения нити, динамика жидкости описывается решением плоской задачи (14), (23)–(26). Эта задача легко преобразуется к существенно более простой постановке [8].

Из первого уравнения (23) следует

$$u(x, z, t) = -\int_0^x \frac{\partial w}{\partial z} dx. \quad (27)$$

Отметим, что на поверхности нити профиль радиальной компоненты скорости (27) удовлетворяет условию непроницаемости (26).

С учетом (27) кинематическое условие на свободной поверхности (14) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\delta+\xi(z,t)} w dx = 0. \quad (28)$$

Из второго уравнения (23) следует, что распределение давления в слое не зависит от x . Вследствие этого функция $p_1(z, t)$ определяется из граничного условия на свободной поверхности (25).

Из последнего уравнения (23) с учетом (25) и граничных условий на свободной поверхности (24) и на поверхности нити (26) находим

$$w(x, z, t) = \frac{x}{2\eta} \frac{\partial p_1}{\partial z} \{x - 2[\delta + \xi(x, t)]\}. \quad (29)$$

Используя (29) при вычислении интеграла в выражении (28) и принимая во внимание (25), получаем нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\delta + \xi)^3 \left[\frac{\alpha}{a^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + a^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \right) - \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - E_0 \right) \right] \right\} = 0, \\ \psi(z, t) = \varphi_1(r, z, t)|_{r=a+\xi(z,t)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнение (30) совместно с задачей электростатики для функций $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ описывает изменение локальной толщины слоя с ростом времени. При численном решении уравнения (30) требуется задать начальное условие для этого уравнения — функцию $\xi(z, 0)$ и найти решение задачи электростатики, соответствующее этой начальной форме свободной поверхности.

После нахождения функций $\xi(z, t)$, $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ распределение переменной части давления $p_1(x, z, t)$ и профили скоростей $u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ вычисляются с помощью выражений (25), (27), (29).

Дисперсионное соотношение

При исследовании влияния электрического поля на развитие капиллярной неустойчивости ограничимся линейной постановкой задачи. Считая $|\xi| \ll \delta$,

$|\partial\varphi_j/\partial z| \ll E_0$, $j = 1, 2, 3$, после линеаризации уравнения (30) и задачи (4), (5), (13) имеем

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\alpha\delta^3}{3\eta a^2} \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^4\xi}{\partial z^4} + \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{a^2}{\alpha} E_0 \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3} \Big|_{r=a} \right) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_j}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

при $r = c$:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial r},$$

при $r = a$:

$$\varphi_1 = \varphi_3, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial r} = (1 - \varepsilon_1) E_0 \frac{\partial\xi}{\partial z},$$

при $\frac{r}{c} \rightarrow \infty$:

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial r} \rightarrow 0.$$

Предполагается, что решение $\xi(z, t)$, $\varphi_j(r, z, t)$, $j = 1, 2, 3$ задачи (31) допускает представление в виде линейных суперпозиций нормальных мод, соответственно имеющих вид

$$Z(k) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\},$$

$$F_j(r, k) \exp\{i[kz - \omega(k)t]\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь i — мнимая единица, k — вещественный параметр (волновое число), а функцию $\omega(k)$ требуется найти из уравнений и граничных условий (31).

Выполнив в уравнении Лапласа переход к нормальным модам, имеем

$$\frac{d^2F_j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_j}{dr} - k^2F_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Линейно независимыми решениями уравнения (32) являются модифицированные функции Бесселя $I_0(kr)$, $K_0(kr)$ [21]. Учитывая условия ограниченности функций $\partial\varphi_2/\partial r$ при $r \rightarrow 0$ и $\partial\varphi_3/\partial r$ при $r \rightarrow \infty$, получаем

$$F_1 = A_1 I_0(kr) + B_1 K_0(kr),$$

$$F_2 = A_2 I_0(kr), \quad F_3 = B_2 K_0(kr). \quad (33)$$

Константы A_1, A_2, B_1, B_2 определяются из граничных условий электростатики, записанных с использованием нормальных мод:

$$A_1 I_0(\beta\kappa) + B_1 K_0(\beta\kappa) = A_2 I_0(\beta\kappa),$$

$$\varepsilon_1 [A_1 I_1(\beta\kappa) - B_1 K_1(\beta\kappa)] = \varepsilon_2 A_2 I_1(\beta\kappa),$$

$$A_1 I_0(\kappa) + B_1 K_0(\kappa) = B_2 K_0(\kappa),$$

$$\varepsilon_1 [A_1 I_1(\kappa) - B_1 K_1(\kappa)] + B_2 K_1(\kappa) = i(1 - \varepsilon_1) E_0 Z.$$

Здесь и далее приняты обозначения $\kappa = ka$, $\beta = 1 - \gamma$, так что $\beta\kappa = kc$. Решение этой системы уравнений имеет вид

$$A_1 = \frac{i\sigma}{d} K_0(\kappa) [\varepsilon_1 I_0(\beta\kappa) K_1(\beta\kappa) + \varepsilon_2 I_1(\beta\kappa) K_0(\beta\kappa)],$$

$$A_2 = \frac{i\sigma}{d} \frac{\varepsilon_1}{\beta\kappa} K_0(\kappa), \quad B_1 = \frac{i\sigma}{d} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I_0(\beta\kappa) I_1(\beta\kappa) K_0(\kappa),$$

$$B_2 = \frac{i\sigma}{d} \left\{ \varepsilon_1 I_0(\beta\kappa) [I_0(\kappa) K_1(\beta\kappa) + I_1(\beta\kappa) K_0(\kappa)] - \varepsilon_2 I_1(\beta\kappa) [I_0(\beta\kappa) K_0(\kappa) - I_0(\kappa) K_0(\beta\kappa)] \right\},$$

$$d = [I_0(\kappa) K_1(\kappa) + \varepsilon_1 I_1 K_0(\kappa)]$$

$$\times [\varepsilon_1 I_0(\beta\kappa) K_1(\beta\kappa) + \varepsilon_2 I_1(\beta\kappa) K_0(\beta\kappa)]$$

$$- (\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I_0(\beta\kappa) I_1(\beta\kappa) K_0(\kappa) K_1(\kappa),$$

$$\sigma = (1 - \varepsilon_1) E_0 Z.$$

После перехода в (31) к нормальным модам с учетом первого выражения (33) получаем дисперсионное соотношение

$$\omega = i \frac{\alpha\delta^3}{3\eta a^4} \kappa^2 \left[1 - \kappa^2 - \frac{(\varepsilon_1 - 1)^2 \kappa}{4\pi} N\Gamma(\kappa, \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \right], \quad (34)$$

где

$$N = \frac{a}{\alpha} E_0^2, \quad \Gamma = \frac{1}{d} \left\{ I_0(\kappa) K_0(\kappa) [\varepsilon_1 I_0(\beta\kappa) K_1(\beta\kappa) + \varepsilon_2 I_1(\beta\kappa) K_0(\beta\kappa)] + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I_0(\beta\kappa) I_1(\beta\kappa) K_0^2(\kappa) \right\}.$$

Таким образом, $\omega(k)$ является чисто мнимой функцией при всех $\kappa \neq 0$. Ввиду этого в случае $\omega_i = \text{Im}\omega > 0$ амплитуды нормальных мод начального возмущения толщины слоя экспоненциально возрастают по времени, а в случае $\omega_i < 0$ — экспоненциально затухают. При $\omega_i = 0$ мода с соответствующим волновым числом нейтрально устойчива.

В отсутствие электрического поля (при $N = 0$) дисперсионное соотношение (34) с точностью до обозначений совпадает с результатом, полученным в работе [7]. В этом случае, как и в классической задаче Рэлея о неустойчивости жидкого цилиндра, неустойчивы все моды с длинами волн $\lambda > 2\pi a$.

Воздействие поля на капиллярную неустойчивость

Исследуем влияние электрического поля на развитие капиллярной неустойчивости слоя касторового масла, имеющего [22] диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_1 = 4.5$. Материалом нити являются: 1) полиэтилен, у которого $\varepsilon_2 = 2.3$; 2) капрон, $\varepsilon_2 = 4.5$; 3) поливинилхлоридный пластикат изоляционный, $\varepsilon_2 = 7$ (данные приведены в [23]). В случае касторового масла при $E_0 = 15 \text{ kV/cm}$, $a = 0.26 \text{ mm}$ имеем $N = 2$.

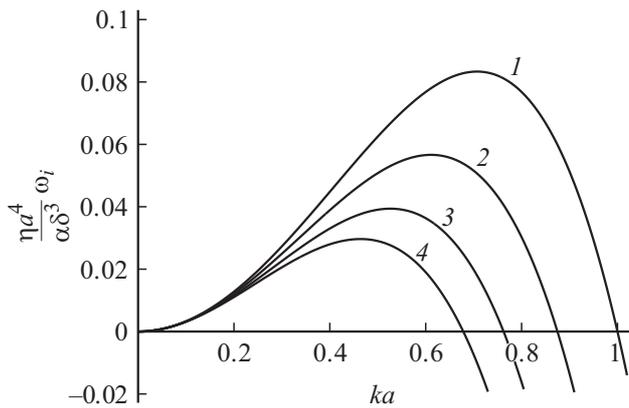


Рис. 2. Дисперсионные зависимости при $\epsilon_1 = 4.5$, $\epsilon_2 = 2.3$ и различных значениях N : 1 — 0, 2 — 0.7, 3 — 1.4, 4 — 2.

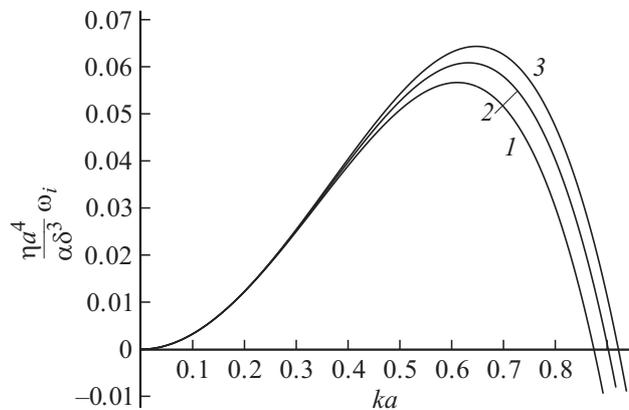


Рис. 3. Дисперсионные зависимости при $\epsilon_1 = 4.5$, $N = 0.7$ и различных значениях ϵ_2 : 1 — 2.3, 2 — 4.5, 3 — 7.

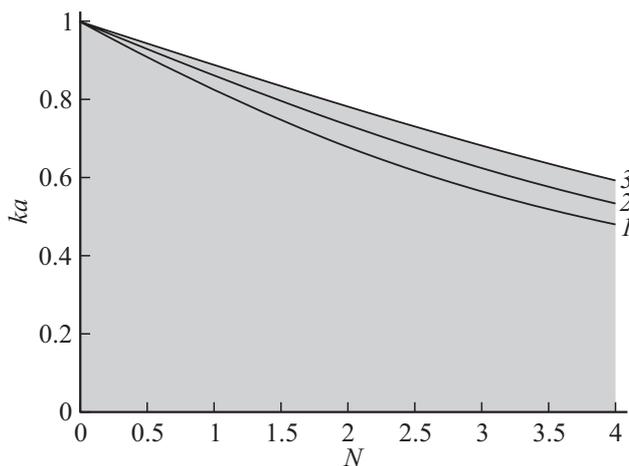


Рис. 4. Нейтральные кривые и области неустойчивости при $\epsilon_1 = 4.5$ и различных значениях ϵ_2 : 1 — 2.3, 2 — 4.5, 3 — 7.

В безразмерном виде дисперсионная зависимость (34) представлена на рис. 2, 3. Из графиков рис. 2 видно, что с увеличением напряженности поля волновое число k_n нейтрально устойчивой моды уменьшается: при $N = 0$

имеем $k_n = a^{-1}$, тогда как $k_n < a^{-1}$ при $N > 0$. В результате при фиксированных ϵ_1, ϵ_2 с ростом напряженности поля диапазон неустойчивых мод сужается.

Взаимное расположение дисперсионных кривых на рис. 3 показывает, что увеличение диэлектрической проницаемости материала нити ϵ_2 при фиксированных N и ϵ_1 вызывает дестабилизацию, поскольку при этом диапазон неустойчивых мод расширяется. Количественно этот эффект показан на рис. 4, где области неустойчивости, построенные в плоскости параметров N, ka , выделены темным цветом. Границами областей неустойчивости являются оси координат и соответствующие выбранным значениям ϵ_2 кривые нейтральной устойчивости, вдоль которых $\omega_i = 0$.

При исследовании капиллярного распада осесимметричного жидкого слоя особый интерес представляет волновое число k_m наиболее быстро растущей моды, реализующее при заданных $\epsilon_1, \epsilon_2, N$ максимум дисперсионной кривой. В линейной постановке ввиду доминирующего влияния этой моды на развитие неустойчивости ее пространственный масштаб $\lambda_m = 2\pi/k_m$ является характерным расстоянием между периодически располагающимися вдоль нити капельками, формирующимися на финальной стадии развития неустойчивости. В настоящей работе, как и при обработке экспериментальных данных в [6], образование сателлитов не учитывается.

При $N = 0$ из дисперсионного соотношения (34) легко находятся $k_m^0 = (\sqrt{2}a)^{-1}$, $\lambda_m^0 = 2\sqrt{2}\pi a$, что совпадает с величиной, приведенной в [6] для предельного ($\delta \rightarrow 0$) случая тонкого слоя. Скорость роста этой моды $s_0 = \omega_i(k_m^0)$ определяется выражением $s_0 = \alpha\gamma^3/(12\eta a)$.

Из построенных на рис. 5 графиков следует, что при фиксированных ϵ_1, ϵ_2 с ростом напряженности поля расстояние между капельками увеличивается. На этом рисунке кривая 2 соответствует случаю $\epsilon_1 = \epsilon_2$, когда при переходе границы между нитью и жидкостью нормальная компонента возмущения поля не испытывает

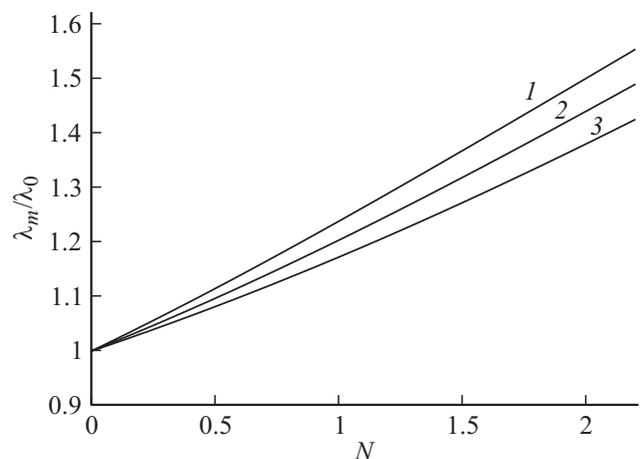


Рис. 5. Зависимость от N нормированной длины волны наиболее быстро растущей моды при $\epsilon_1 = 4.5$ и различных значениях ϵ_2 : 1 — 2.3, 2 — 4.5, 3 — 7.

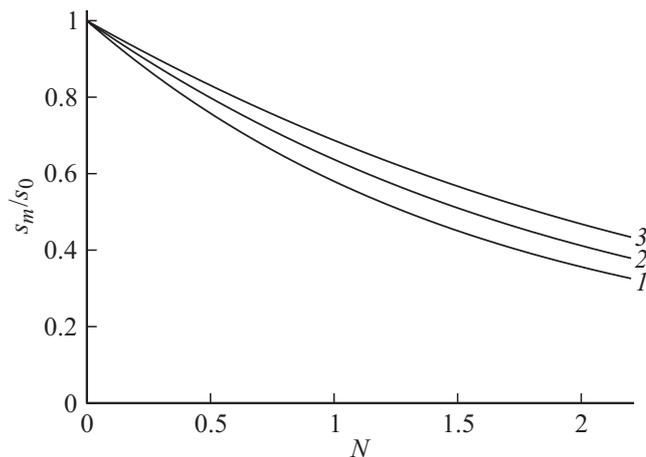


Рис. 6. Зависимость от N нормированной скорости роста наиболее быстро растущей моды при $\varepsilon_1 = 4.5$ и различных значениях ε_2 : 1 — 2.3, 2 — 4.5, 3 — 7.

скачка. Из графиков следует, что при фиксированной напряженности поля расстояние между соседними капельками в случае $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ оказывается больше, чем в случае $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

На рис. 6 представлены графики зависимости от N нормированной скорости роста s_m/s_0 наиболее быстро растущей моды, построенные при фиксированном ε_1 и различных ε_2 . Графики показывают, что величина s_m/s_0 уменьшается с ростом напряженности поля тем значительнее, чем меньше диэлектрическая проницаемость материала нити.

Графики на рис. 2–6 построены при $\beta = 0.93$. При малых γ влияние параметра β на дисперсионные зависимости незначительно.

Заключение

Применительно к случаю малых чисел Бонда изучено влияние однородного продольного электрического поля E_0 на капиллярную неустойчивость осесимметричного слоя вязкой диэлектрической жидкости, не содержащей свободных электрических зарядов. Слой покрывает прямолинейную диэлектрическую нить цилиндрической формы и окружен снаружи газом, находящимся при постоянном давлении. Диэлектрические проницаемости жидкости ε_1 и материала нити ε_2 в общем случае различны. Средняя толщина слоя много меньше радиуса поперечного сечения нити.

В предположении о балансе сил трения и продольного градиента давления (что реализуется при гидродинамической смазке [9]) проведены оценки порядков величин в уравнениях и граничных условиях гидродинамики, учитывающих поверхностные пондеромоторные силы.

На базе постановки задачи, учитывающей только члены лидирующего порядка, выведено нелинейное параболическое уравнение, описывающее эволюцию с ростом

времени возмущения постоянной в начальный момент толщины слоя. Распределения поля в нити, в слое и в окружающем слое газе описываются уравнениями и граничными условиями электростатики.

В рамках линеаризованного эволюционного уравнения и задачи электростатики с линеаризованными граничными условиями на свободной поверхности слоя получено дисперсионное соотношение и проведен его анализ.

Показано, что электрическое поле стабилизирует некоторый диапазон неустойчивых в отсутствие поля нормальных мод с пространственными масштабами, превышающими периметр внешней границы кольца, представляющего поперечное сечение исходного слоя постоянной толщины. При фиксированных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ с ростом E_0 диапазон стабилизируемых полей мод увеличивается. Если же E_0 и ε_1 фиксированы, то увеличение диэлектрической проницаемости материала нити ε_2 оказывает дестабилизирующее воздействие.

При фиксированном ε_1 и различных значениях ε_2 в плоскости параметров: электрокапиллярное число — безразмерное волновое число построены кривые нейтральной устойчивости, разделяющие области неустойчивости, соответствующие различным ε_2 .

Установлено, что при фиксированных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ с ростом E_0 увеличивается пространственный масштаб наиболее быстро растущей моды, что приводит к увеличению расстояния между соседними капельками, формирующимися на финальной стадии развития капиллярной неустойчивости слоя. Если же E_0 и ε_1 фиксированы, а ε_2 изменяется, то в случае $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ расстояние между капельками оказывается больше, чем в случае $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Показано также, что при фиксированной диэлектрической проницаемости жидкости с увеличением E_0 скорость роста наиболее быстро растущей моды уменьшается тем значительнее, чем меньше величина диэлектрической проницаемости материала нити.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00056).

Список литературы

- [1] Бойс Ч. Мыльные пузыри. Петроград: Научное книгоиздательство, 1919. 192 с.; Boys C.V. Soap bubbles and the forces which mould them. New Delhi: Vigyan Prasar, 2002. 96 p.
- [2] Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.
- [3] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 287 с.
- [4] Бондаренко В.С. // ЖФХ. 1961. Т. 35. № 12. С. 2775–2777.
- [5] Quééré D. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. P. 347–384.
- [6] Goren S.L. // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 12. N 2. P. 309–319.
- [7] Yarin A.L., Oron A., Rosenau Ph. // Phys. Fluid. A. 1993. Vol. 5. N 1. P. 91–98.

- [8] *Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G.* // *Rev. Mod. Phys.* 1997. Vol. 69. N 3. P. 931–980.
- [9] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
- [10] *Saville D.A.* // *Phys. Fluid.* 1970. Vol. 13. N 12. P. 2987–2994.
- [11] *Savtaseerane K., Papageorgiou D.T., Petropoulos P.G., Tilley B.S.* // *Phys. Fluid.* 2003. Vol. 15. N 3. P. 641–652.
- [12] *Коровин В.М.* // *ЖТФ.* 2011. Т. 81. Вып. 10. С. 12–19.
- [13] *Сивухин Д.В.* Электричество. М.: Наука, 1983. 688 с.
- [14] *Saville D.A.* // *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 1997. Vol. 29. P. 27–64.
- [15] *Tilley B.S., Petropoulos P.G., Papageorgiou D.T.* // *Phys. Fluid.* 2001. Vol. 13. N 12. P. 3547–3563.
- [16] *Papageorgiou D.T., Vanden-Broeck J.-M.* // *J. Fluid. Mech.* 2004. Vol. 508. P. 71–88.
- [17] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89. Вып. 6. С. 317–321.
- [18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [19] *Goren S.L.* // *J. Colloid Sci.* 1964. Vol. 19. P. 81–86.
- [20] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
- [21] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Мир, 1979. 830 с.
- [22] Таблицы физических величин / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
- [23] Физические величины / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.